ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES

CONCOURS D'ADMISSION 2007 FILIÈRE PC

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

Étude de quelques courbes planes

Première partie

On note F l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, périodiques de période 2π, et E le sous-espace vectoriel de F constitué des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, périodiques de période 2π et de classe C^2. Pour f et g dans F on définit le produit scalaire

$$(f \mid g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, g(x)\, dx \ .$$

Si H est un sous-espace vectoriel de F, on note

$$H^\perp = \{f \in F / \, (f \mid h) = 0 \, , \, \forall h \in H\} \ .$$

1. Exprimer, pour $f \in E$, la série de Fourier de f'' en fonction de celle de f. En quel sens la série de Fourier de f converge-t-elle ?

Soit $P : E \to F$ l'application linéaire définie par

$$P(f) = f + f'' \ .$$

2. Déterminer le noyau de P, que l'on note $\operatorname{Ker} P$.

3.a) Déterminer $E^\perp$.

3.b) Pour f et g dans E, montrer l'égalité

$$(P(f) \mid g) = (f \mid P(g)) \ .$$

3.c) En déduire que $\operatorname{Ker} P = (\operatorname{Im} P)^\perp \cap E$, où $\operatorname{Im} P$ désigne l'image de P.

4. On considère le sous-espace vectoriel de F,

$$G = \{f \in F \ / \ f(x+\pi) + f(x) = f(\pi) + f(0) \, , \, \forall x \in \mathbf{R}\} \ .$$

Montrer que f appartient à G si et seulement si les coefficients de Fourier de f satisfont certaines conditions que l'on explicitera.

Deuxième partie

Dans cette partie, on étudie certaines courbes du plan euclidien $\mathbf{R}^2$. On note O l'origine et $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ la base canonique. Soit $t \in \mathbf{R}$. On note

$$\vec{u}_t = \cos t \ \vec{e}_1 + \sin t \ \vec{e}_2 \qquad \text{et} \qquad \vec{v}_t = \vec{u}_{t+\frac{\pi}{2}} \ .$$

Soit $f \in E$ vérifiant les deux conditions suivantes :

i) $f(t) > 0 \, , \, \forall t \in \mathbf{R}$,

ii) $f(t) + f''(t) > 0 \, , \, \forall t \in \mathbf{R}$.

Pour toute fonction f de E satisfaisant i) et ii) et pour tout $t \in \mathbf{R}$, on pose

$$\overrightarrow{OM}(t) = f(t)\vec{u}_t + f'(t)\vec{v}_t \ ,$$

et l'on considère la courbe décrite par le point $M(t)$,

$$\Gamma_f = \{ M(t) \in \mathbf{R}^2 \, / \, t \in [0, 2\pi] \} \ .$$

5.a) Quelle est la courbe Γ_f si f est la fonction constante égale à 1 ?

5.b) Montrer que la courbe Γ_f admet en tout point $M(t)$ une tangente dont on déterminera l'équation cartésienne.

5.c) Quelle est la distance de cette tangente à l'origine ?

6. Soient a et b des nombres réels non nuls. On pose $f(t) = \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}$. On admettra que f satisfait i) et ii). Montrer que la courbe Γ_f est une ellipse centrée à l'origine.

On revient au cas général.

7.a) Montrer que

$$\overrightarrow{OM}(t) = \sqrt{f(t)^2 + f'(t)^2} \Big[\cos \Big(t + \text{Arctan} \frac{f'(t)}{f(t)} \Big) \vec{e}_1 + \sin \Big(t + \text{Arctan} \frac{f'(t)}{f(t)} \Big) \vec{e}_2 \Big] \ .$$

7.b) En déduire que toute demi-droite d'origine O contient un point et un seul de la courbe Γ_f.

8. Exprimer la longueur $L(f)$ de la courbe Γ_f en fonction de la valeur moyenne de f sur $[0, 2\pi]$.

On note $\Omega(f)$ la réunion des segments $OM(t), \ t \in [0, 2\pi]$.

9.a) Montrer que l'aire $A(f)$ du domaine $\Omega(f)$ est égale à $\pi(P(f) \mid f)$.

9.b) Exprimer cette aire en fonction des coefficients de Fourier de f.

10. Pour $c \geqslant 0$, on note E_c le sous-ensemble de E constitué des fonctions f qui satisfont

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = c\ .$$

Montrer que la fonction $f \mapsto (P(f) \mid f)$ de E_c dans $\mathbf{R}$ admet un unique maximum que l'on déterminera.

Pour quelles fonctions de E_c ce maximum est-il atteint ?

11. En déduire, pour $f \in E$ satisfaisant les conditions i) et ii), l'inégalité

$$A(f) \leqslant \frac{(L(f))^2}{4\pi}\ .$$

Quelles sont les fonctions f qui réalisent l'égalité et les courbes Γ_f correspondantes ?

12. Soient $f \in E$ et $h \in \operatorname{Ker} P$. On suppose que les fonctions f et $f+h$ vérifient les conditions i) et ii).

12.a) Comparer $L(f)$ et $L(f+h)$, puis $A(f)$ et $A(f+h)$.

12.b) Comparer les courbes Γ_f et Γ_{f+h}.

13. Soit r un réel positif.

13.a) Comparer $L(f)$ et $L(f+r)$.

13.b) Montrer la formule

$$A(f+r) = A(f) + L(f)\, r + \pi r^2\ .$$

14. Soient $\theta \in \mathbf{R}$ et D_θ la droite engendrée par le vecteur $\vec{u}_\theta$.

14.a) Montrer que la projection orthogonale de Γ_f sur D_θ est un intervalle dont on déterminera la longueur $\ell(\theta)$. C'est le *diamètre apparent* de la courbe dans la direction normale à D_θ.

14.b) Caractériser les fonctions f pour lesquelles le diamètre apparent de la courbe Γ_f est indépendant de θ.

14.c) Exprimer alors $L(f)$ en fonction de ℓ. Donner un exemple qui ne soit pas un cercle.

15. On revient au cas général. Soient M_1 et M_2 deux points de la courbe Γ_f. Montrer que le segment M_1M_2 est inclus dans $\Omega(f)$.

* *
*