Composition de Mathématiques, Filière PC

Rapport de MM. VU NGOC San et M. YURI Bilu, correcteurs.

Les notes des candidats français se répartissent selon le tableau suivant :

$0 \leqslant N < 4$	249	16,99%
$4 \leqslant N < 8$	516	42,0%
$8 \leqslant N < 12$	313	27,9%
$12 \leqslant N < 16$	139	10,4%
$16 \leqslant N \leqslant 20$	68	2,7%
=20	21	1,5%
Total	1285	100 %
Nombre de copies : 1285		
Note moyenne 7,69		
Écart-type : 4,28		

Le sujet de cette année, un joli problème mêlant géométrie et analyse, a dérouté de nombreux candidats. Il est vrai que le sujet tournait autour des séries de Fourier et de l'étude des courbes planes, qui sont deux chapitres souvent mal aimés par les élèves de classe préparatoire.

Il était très difficile de finir ce problème ; en particulier la dernière question a connu un taux de réussite nul. Nombreuses étaient les questions qui pouvaient se résoudre de plusieurs façons, ce qui paradoxalement défavorise souvent les candidats. Une première lecture attentive du sujet avant de s'y lancer permettait probablement de faire des choix judicieux.

Pour autant, il était relativement aisé de grappiller des points, car les questions faciles alternaient avec les plus difficiles jusqu'à la fin de l'énoncé. Certains candidats s'en sont rendu compte et en ont bien profité.

Le barème comptait plus de 30 points. On pouvait avoir la note maximale 20 en faisant parfaitement les 10 premières questions.

Passons à l'examen détaillé des questions.

Partie I

Cette partie établit les résultats d'analyse préliminaires au traitement du problème géométrique proposé en deuxième section. Elle requiert une assez bonne connaissance du cours sur les séries de Fourier.

1. La rédaction de cette question a souvent perturbé les candidats ... qui se sont mis à énoncer pêle-mêle tous les théorèmes de convergence qu'ils connaissaient en oubliant le contexte de la question. En ce sens, ce genre de question facile est très vite révélateur du niveau du candidat. Cette année encore, il faut insister sur l'importance de bien débuter un sujet.

On attendait bien sûr l'énoncé du théorème de convergence normale, facile ici puisque $f \in E$ est de classe C^2. Attention la série de Fourier de f'' n'a aucune raison de converger normalement. On pouvait néanmoins citer la convergence au sens de la norme quadratique.

Il est désolant de constater le nombre de candidats qui, emportés par l'énoncé de la question, se sont crus obligés de trouver une relation entre f et f'', et ont écrit $f''(x) = -n^2 f(x)$ (que vient faire n ici !!)

2. Cette question a été correctement traitée par la majorité des candidats. Le plus simple était d'invoquer la théorie des équations différentielles ordinaires linéaires du second ordre à coefficients constants... pour trouver que les solutions étaient engendrées par sin et cos. Attention, encore fallait-il vérifier que ces fonctions sont bien 2π-périodiques. Imaginez un peu que l'équation à résoudre ait été $f + 2f'' = 0$ ... C'est à cause de ce petit « détail » que trop peu de candidats ont obtenu la note maximale à cette question.

La question pouvait également se traiter à l'aide des séries de Fourier ... au prix d'une gymnastique non triviale de justification pour pallier le manque de convergence *a priori* de la série de f''.

3.a) Guère plus d'un candidat sur cinq a argumenté correctement pour cette question. Il s'agissait de voir que les fonctions de $E^\perp$ ont un développement de Fourier nul, et donc sont nulles *car continues*. Plusieurs candidats ont pensé à invoquer Parceval pour justifier cette affirmation.

3.b) Question très bien réussie, sauf pour les malheureux candidats qui ont essayé de passer par les séries de Fourier alors qu'une simple intégration par partie faisait l'affaire. Plusieurs ont souhaité inclure la démonstration que la dérivée d'une fonction périodique est périodique, ce qui (statistiquement parlant, en tous cas) était plus dangereux qu'autre chose.

3.c) Il y avait deux inclusions à démontrer. La première, $\ker P \subset (\mathrm{Im}\ P)^{\perp} \cap E$, a été bien réussie. Il suffisait d'utiliser la question précédente. L'inclusion inverse a connu beaucoup moins de succès. Il fallait juste penser à utiliser la question 3.a) (que plusieurs candidats ont redémontrée ici sans s'en rendre compte !).

4. Cette question n'était pas difficile, mais l'est devenue pour beaucoup car elle combinait un argument théorique (le même qu'en 3.b) : une fonction continue est nulle si et seulement si ses coefficients de Fourier le sont – en l'occurrence la fonction $f(x+\pi)+f(x)-f(\pi)-f(0))$ avec un calcul à faire avec précision.

Finalement, seul un quart des candidats a pu y donner une réponse satisfaisante.

Partie II

Dans cette partie on étudie une famille de courbes paramétrées, généralisant le cercle, l'un des buts étant d'établir l'inégalité isopérimétrique pour ces courbes.

5.a) Cette question ne servait qu'à contrôler la compréhension de la définition de la courbe Γ. Le taux de réussite a dépassé 90%, mais il y eut des fautes étonnantes, même dans les bonnes copies.

5.b), c) Le taux de réussite pour ces questions simples fut, contre toute attente, très bas. Une grande partie des candidats avaient étendu l'hypothèse de 5.a) à ces questions et n'ont déterminé que l'équation de la tangente au cercle unité (et la distance correspondante). Et parmi ceux qui avaient bien compris qu'il fallait considérer le cas général, plusieurs se sont révélés incapables d'écrire l'équation de la tangente à une courbe paramétrée, et/ou de trouver la distance d'une droite à l'origine.

6. C'est une question calculatoire. On peut bien la réussir en organisant le calcul correctement. Malheureusement, de nombreux candidats ont abandonné la question à cause d'une faute de calcul.

7.a) La formule a un aspect effrayant, mais en fait ce n'est qu'une variante de la formule du produit des nombres complexes. Toute personne ayant compris ceci a réussi. Pour obtenir la note maximale, il fallait également faire attention au fait que la fonction arctan prend ses valeurs seulement dans $]-\pi/2, \pi/2[$, ce qui a parfois engendré des problèmes de signe.

7.b) C'est une question bien délicate : ici on doit démontrer que la fonction

$$t \to t + \arctan \frac{f'(t)}{f(t)}$$

est strictement croissante sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, et prend ses valeurs sur un intervalle de longueur 2π. Peu de candidats l'ont fait proprement.

8. C'est une question relativement facile : il faut connaître la formule donnant la longueur d'une courbe paramétrée et savoir dériver des fonctions vectorielles. Plusieurs candidats ont réussi, et plusieurs autres avaient deviné la formule sans la démontrer, probablement par analogie avec le cercle.

9.a) Il y eut des solutions diverses pour cette question. Les plupart des candidats a utilisé des variantes de la formule de Green (parfois correctement, parfois non). D'autres ont préféré les coordonnées polaires, ce qui résultait en un calcul bien compliqué. Relativement nombreux sont ceux qui ont inventé un calcul aboutissant comme par hasard au résultat voulu, ce qui n'a pas vraiment plu aux correcteurs.

9.b) Cette question, généralement, n'a pas posé de grands problèmes, mais certains candidats, qui ont utilisé l'écriture trigonométrique des séries de Fourier, ont oublié le facteur $1/2$ là où il était nécessaire.

10. Plusieurs candidats ont tenté de résoudre cette question en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Mais la seule méthode correcte était l'analyse des coefficients de Fourier via la question 9.b).

On peut remarquer qu'une grande partie des candidats a correctement deviné la réponse sans la justifier.

11. Plusieurs candidats ont réussi à démonter cette « inégalité isopérimétrique », qui n'était qu'une conséquence immédiate de la question précédente. Beaucoup moins ont déterminé les cas d'égalité, parce que pour ceci il fallait vraiment avoir résolu la question 10., et non pas seulement avoir deviné la réponse.

12.a) et b) La question a) s'ést avérée relativement simple, elle a été résolue par un grand nombre de candidats. En revanche, très peu de candidats ont réussi la question b), probablement parce qu'ils n'avaient pas compris ce que signifiait le mot «comparer ».

13.a) et b) Il s'agit de calculs bien simples, mais, à cause du fait que cette question se trouvait à la fin du sujet, la plupart des candidats ne l'a pas tentée. Mais parmi ceux qui l'ont entamée, beaucoup l'ont réussie.

14.a) et b) Pour montrer 14.a) il suffit de rappeler des propriétés de base des fonctions continues. Malheureusement ceci n'a été fait que par très peu de candidats. Encore moins nombreux sont ceux qui ont reconnu le lien entre les questions 14.b) et 4.

14.c) Presque tout candidat qui s'engageait dans cette question a deviné l'expression de $L(f)$ en fonction de ℓ, toujours par analogie avec le cas du cercle. Mais très peu ont justifié la réponse, et encore moins ont proposé un exemple qui n'était pas un cercle.

15. Question relativement difficile et située à la fin de l'épreuve. Il n'est donc pas très étonnant que personne ne l'ait réussie.