

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES

CONCOURS D'ADMISSION 2003

FILIÈRE PC

DEUXIÈME COMPOSITION DE PHYSIQUE
(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices est autorisée pour cette épreuve.

Charges atmosphériques et orages

Les rayons cosmiques ionisent une partie de l'atmosphère. Les ions ainsi produits sont, avec les charges à la surface de la Terre, à l'origine du champ électrique terrestre. Ces ions ne restent pas immobiles et l'objet du problème est d'analyser quelques aspects de leur circulation.

Dans tout le problème, on supposera pour simplifier qu'il s'agit d'ions monovalents.

Dans la première partie, on aborde le problème de la distribution des ions et de leur mouvement par beau temps. Dans la deuxième partie, on effectue l'analyse de quelques processus qui contribuent à créer un champ électrique important dans les cumulo-nimbus. La troisième partie montre que les éclairs jouent un rôle essentiel dans la redistribution des charges atmosphériques.

Les réponses aux questions qualitatives doivent être formulées en deux phrases au maximum faisant ressortir clairement les arguments développés.

L'étude est locale, sur une zone de faible extension (quelques dizaines de kilomètres) ; le seul paramètre pertinent est l'altitude z par rapport à la surface de la Terre.

Données numériques

Rayon de la Terre	$R_T = 6,4 \times 10^3$ km
Champ de pesanteur terrestre	$g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
Masse volumique de l'eau	$\rho_{\text{eau}} = 1,00 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Mobilité des ions au niveau du sol	$k_0 = 1,5 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$
Champ magnétique terrestre	$\ \vec{B}_T\ = 1 \times 10^{-5} \text{ T}$
Masse molaire de l'air	$M = 29 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$
Constante d'Avogadro	$N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante des gaz parfaits	$R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
Rapport C_P/C_V pour l'air	$\gamma = 1,40$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
Charge élémentaire	$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$
Permittivité du vide	$\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$

Formulaire

En coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{grad}} &= \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ \Delta V &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2(rV)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\end{aligned}$$

Nombre de Reynolds : $R_e = \frac{\rho v d}{\eta}$, v et d désignant respectivement une vitesse et une dimension caractéristique de l'écoulement, ρ et η respectivement la masse volumique et la viscosité dynamique du fluide.

I. Distribution et circulation des ions par beau temps

L'atmosphère est supposée homogène horizontalement et on s'intéresse à sa couche basse d'altitude inférieure à 15 km. En plus du champ magnétique terrestre, il y règne un champ électrique vertical, orienté par beau temps vers le sol : $\vec{E}(\vec{r}) = E(z) \vec{e}_z$ avec $E(z) < 0$.

1. Mobilité des ions

On étudie dans cette question le mouvement d'un cation, de charge e et de masse m , se déplaçant à la vitesse \vec{v} et soumis au champ électrique terrestre \vec{E} , le champ magnétique terrestre et la pesanteur étant négligés. En mouvement, l'ion subit une force moyenne de type frottement visqueux, proportionnelle à la fréquence de ses chocs avec les molécules composant l'air environnant : $\vec{f} = -\lambda \vec{v}$, λ constante.

- a) En supposant que la composition de l'air est indépendante de l'altitude, expliquer pourquoi λ est proportionnel à la masse volumique de l'air $\rho(\vec{r})$.

b) Donner l'équation du mouvement de l'ion.

c) Donner l'expression de $\vec{v}(t)$ pour un ion initialement immobile en supposant le champ électrique \vec{E} constant et localement uniforme.

d) Montrer qu'il existe une vitesse limite \vec{v}_l pour le cation. Quel est le temps caractéristique τ d'évolution de sa vitesse ? Comment sont modifiés ces résultats pour un anion de charge $-e$ mais de même masse m ?

e) Pour une valeur du champ électrique E de $-15 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ et en prenant pour m la masse moyenne d'une molécule de l'air, calculer numériquement $|\vec{v}_l|$ et τ avec $\lambda = 5 \times 10^{-16} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$. Est-il légitime dans ces conditions de négliger l'influence du champ magnétique terrestre ? même question pour la force de pesanteur ? Calculer la distance caractéristique $|\vec{v}_l|\tau$; justifier le caractère local de la relation entre \vec{E} et \vec{v}_l .

f) La mobilité k des cations est définie par $\vec{v}_l = k\vec{E}$ et celle des anions par $\vec{v}_l = -k\vec{E}$. Déterminer k en fonction de λ et e . L'évaluer numériquement.

2. Densité des ions

Soient $n_+(z)$ et $n_-(z)$ les densités (nombre par unité de volume) respectivement des cations et des anions. Ces ions sont créés dans l'atmosphère par les rayons cosmiques avec un taux d'ionisation (nombre de paires d'ions créés par unité de volume et de temps) q uniforme. On suppose qu'ils se recombinent par paires avec un taux donné par $-\alpha n_+ n_-$, α constante. On suppose aussi qu'ils sont animés de leur vitesse limite \vec{v}_l .

a) Montrer que la densité de cations obéit à l'équation : $\frac{\partial n_+}{\partial t} + \frac{\partial(n_+ kE)}{\partial z} = q - \alpha n_+ n_-$. À quelle équation obéit la densité d'anions ?

b) Cations et anions étant formés et se recombinant par paires, on suppose que $n_+(z) = n_-(z) = n(z)$. Quelle est avec cette hypothèse l'équation d'évolution temporelle de $n(z)$? Montrer que $n k E$ ne dépend pas de z .

c) On suppose le régime stationnaire atteint avec pour n la valeur n_0 . Donner alors l'expression de n_0 en fonction de α et q . Les mesures montrent que n_0 ne dépend pratiquement pas de l'altitude ; est-ce cohérent avec le résultat obtenu ? Montrer alors que $E(z)$ est proportionnel à $\rho(z)$.

d) Donner une évaluation de la durée de vie moyenne τ' d'un ion à l'aide de α et q .

e) Application numérique. On donne $q = 10^7 \text{ m}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}$, $\alpha = 1,4 \times 10^{-12} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$. Calculer n_0 ; calculer τ' et comparer sa valeur avec celle de τ obtenue en 1.e).

f) En prenant $E = -15 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ et pour ordre de grandeur de $|dE/dz| : 3 \times 10^{-3} \text{ V} \cdot \text{m}^{-2}$, montrer qu'un ion est pratiquement soumis à un champ constant lors de sa durée de vie.

3. Basse atmosphère

Soit $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ le champ de pesanteur supposé uniforme. On considère l'air comme un gaz parfait de masse molaire moyenne M et on suppose l'atmosphère en équilibre adiabatique pour lequel $\left(\frac{\rho(z)}{\rho(0)}\right)^{\gamma-1} = 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{g\rho(0)}{P(0)} z$, où $P(0)$ est la pression au sol.

- a) Exprimer $E(z)$ en fonction de E_0 , champ à proximité du sol, g, γ, M, R et de la température au sol T_0 .
- b) On donne $E_0 = -50 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ et $T_0 = 293 \text{ K}$. Calculer E pour les altitudes de 1000 m, 5000 m et 10 000 m. Comparer aux valeurs expérimentales de la figure 1.
- c) Soit $\vec{j} = j_z \vec{e}_z$ la densité de courant électrique; exprimer j_z en fonction de e, n, k et $E(z)$. Calculer numériquement j_z en $z = 0$.
- d) On cherche à justifier l'hypothèse $n_+(z) = n_-(z)$. Exprimer $n_+ - n_-$ en fonction de dE/dz . Donner une évaluation numérique de $n_+ - n_-$ et conclure quant à la validité de l'hypothèse.

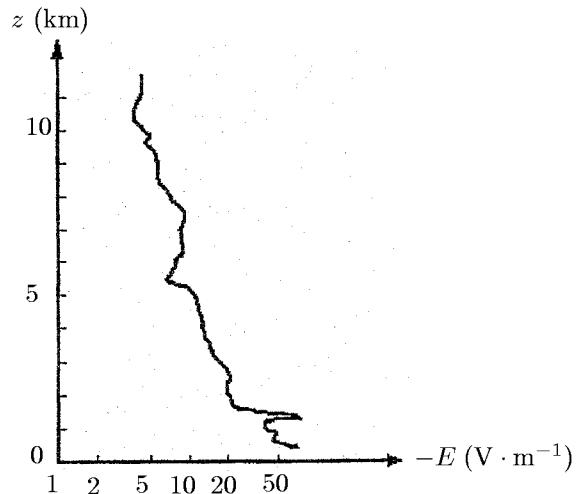


Figure 1.

II. Formation de champs électriques au sein d'un nuage

L'objectif est de montrer que la distribution des charges à l'intérieur d'un nuage est très différente de celle étudiée dans la première partie. La seule variable d'espace pertinente est toujours l'altitude z .

1. Chute d'une goutte d'eau dans l'air

La goutte sphérique, de rayon R_g , est soumise à la pesanteur et au frottement de l'air. L'air est supposé immobile, de masse volumique ρ et de viscosité dynamique η . En régime laminaire, la force de traînée sur une goutte de vitesse \vec{v}_g est donnée par la formule de Stokes $\vec{F}_v = -6\pi\eta R_g \vec{v}_g$; en régime turbulent, elle est donnée par $\vec{F}_i = -C_d(\pi R_g^2) (\frac{1}{2}\rho v_g^2) (\vec{v}_g/v_g)$ avec $C_d = 0,45$ pour une sphère.

- a) Pour chacun de ces deux régimes, donner l'expression de la vitesse limite de la goutte.
- b) Calculer numériquement les vitesses correspondantes pour $R_g = 10 \mu\text{m}$ et pour $R_g = 1 \text{ mm}$. On donne $\rho \cong 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et $\eta = 1,8 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$.
- c) Pour chacune de ces valeurs de R_g , préciser en justifiant votre réponse quel est le régime adapté; en déduire la valeur effective de \vec{v}_g pour ces deux tailles de goutte.

2. Déplétion en ions

Dans un nuage, les gouttes d'eau absorbent les ions qu'elles rencontrent et on désire évaluer le temps caractéristique d'évolution de la densité d'ions. Pour cela on utilise une approximation quasi-stationnaire.

Les gouttes sont assimilées à des conducteurs sphériques parfaits, toutes de rayon R_g . À ce premier stade d'évolution du nuage, R_g est suffisamment faible pour pouvoir négliger la vitesse de chute. On désigne par D le coefficient de diffusion des ions dans l'air ; on le suppose indépendant des ions ; on prendra pour les évaluations numériques $D = 10^{-5} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$.

a) Rappeler la loi de Fick reliant la densité de courant de diffusion au gradient de la densité de particules diffusantes.

b) On considère une goutte unique ; on suppose négligeable la convection des ions due au champ électrique ; de plus la neutralité électrique locale, $n = n_+ = n_-$, permet de ne pas tenir compte des charges des ions, et de considérer que la goutte, recevant autant de cations que d'anions, garde une charge totale nulle. Écrire l'équation aux dérivées partielles que doit satisfaire n en ne tenant compte que du courant de diffusion. En tenant compte de la symétrie sphérique du processus, résoudre cette équation en régime stationnaire, avec comme conditions aux limites $n = 0$ à la surface de la goutte et $n = n_0$ à grande distance.

c) En déduire le nombre de cations A_g absorbés par unité de temps par la goutte en fonction de D , R_g et n_0 .

d) Le nuage contient N gouttes par unité de volume ; établir en utilisant le calcul précédent l'équation d'évolution temporelle de n_0 compte tenu aussi du taux de création q (cf. I.2). En déduire la constante de temps d'évolution τ_D correspondante. Quelle est la valeur n_D atteinte par n_0 en régime permanent ?

e) On donne $R_g = 10\mu\text{m}$, $N = 10^8 \text{ m}^{-3}$. Calculer τ_D ; comparer au temps d'évolution d'un nuage. Calculer n_D ; comparer à la valeur stationnaire de n_0 obtenue au I.2.e). Est-il légitime de ne pas tenir compte de la recombinaison par paires des ions ?

f) Calculer la densité de courant de diffusion des ions à une distance typique $2R_g$ du centre de la goutte ; la comparer à la densité du courant de convection pour un champ électrique de $-15 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$. Était-il légitime de négliger le courant de convection par rapport au courant de diffusion ?

3. Charges portées par les gouttes

a) On suppose dans cette question que les gouttes ne sont soumises à aucun champ électrique externe.

a1) Les gouttes absorbent de manière équivalente les anions et les cations. Mais ce processus est aléatoire et leurs charges électriques ont une distribution statistique. Quelle en est la valeur moyenne ?

a2) Quel est le potentiel électrique V d'une goutte de charge Q ?

a3) L'énergie électrostatique W de la goutte a pour valeur $\frac{1}{2}QV$; sa valeur moyenne est de l'ordre de $k_B T$. En déduire une évaluation de la valeur moyenne de $|Q|$ en fonction de ε_0 , R_g et $k_B T$. La calculer numériquement à $T = 270$ K pour $R_g = 10\mu\text{m}$ et pour $R_g = 1$ mm.

b) Répartition de la charge à la surface d'une goutte.

On étudie une goutte seule dans le champ électrique vertical $\vec{E} = E\vec{e}_z$ avec $E < 0$.

b1) Donner, en coordonnées sphériques centrées sur la goutte, l'expression du potentiel $V_E(\vec{r})$ associé au champ \vec{E} .

b2) Dans le cas où $Q = 0$, on suppose le potentiel V_g créé par les charges surfaciques de la goutte de la forme $V_g(\vec{r}) = r^n g(\theta)$ où n est un entier. Le potentiel est alors $V_g(\vec{r}) + V_E(\vec{r})$. En exprimant que la surface de la goutte est équipotentielle, déterminer la fonction $g(\theta)$ à l'aide de E , R_g et n . Déterminer la valeur de n .

b3) Dans le cas général où $Q \neq 0$, donner l'expression du potentiel total $V_{\text{tot}}(\vec{r})$.

b4) Exprimer le champ \vec{E}_S à la surface de la goutte en fonction de la densité surfacique de charge $\sigma(\theta)$. Déterminer $\sigma(\theta)$.

b5) Pour un champ $E_z < 0$ comme c'est le cas dans l'atmosphère au moment de la formation du nuage, représenter sur un dessin la répartition surfacique de charge d'une goutte globalement neutre.

4. Amplification du champ

a) La densité d'ions est très faible à l'intérieur du nuage. Néanmoins, sous l'effet du champ électrique, les ions à l'extérieur du nuage sont toujours en mouvement vertical dans l'atmosphère et peuvent pénétrer dans le nuage, le champ au dessus et sous le nuage étant toujours orienté vers le sol. Cela induit une accumulation de gouttes chargées négativement à la base du nuage.

On considère une goutte de la base du nuage. Elle pourra se charger jusqu'à disparition de toute charge positive à sa surface. Déterminer l'expression de sa charge maximale $|Q|_{\text{max}}$ en fonction de E et R_g . Calculer numériquement $|Q|_{\text{max}}$ avec $E = -100 \text{ V m}^{-1}$ pour $R_g = 10\mu\text{m}$ et $R_g = 1$ mm. Comparer aux valeurs obtenues en **II.3.a3**).

b) Un autre mécanisme est à l'œuvre à l'intérieur d'un nuage et contribue à charger les gouttes lorsqu'elles ont atteint une taille suffisante pour que leur chute joue un rôle important.

b1) À l'aide du dessin représentant la répartition surfacique de charge d'une goutte globalement neutre (cf. **II.3.b5**), expliquer qu'une goutte qui tombe (suffisamment vite par rapport aux ions) va acquérir une charge d'un certain signe ; préciser ce signe. On admet que la charge finale est proche de celle obtenue en **II.4.a**).

b2) En déduire que E croît à l'intérieur du nuage. Cependant, lorsque $|E|$ croît, ce mécanisme devient de moins en moins efficace ; justifier pourquoi. On admet que la limite est atteinte lorsque les cations ont une vitesse voisine de celle de la goutte ; calculer le champ E_c correspondant pour $R_g = 1$ mm.

b3) Indiquer qualitativement la distribution des charges quand l'équilibre est atteint dans le nuage. Les observations montrent que le champ électrique à l'intérieur du nuage est beaucoup plus important que le champ initial et peut atteindre plus de 10 kV/m. Sont-elles compatibles avec la valeur limite E_c obtenue ci-dessus ?

III. Décharge du nuage

1. Cellule orageuse

D'après l'étude de la deuxième partie, on peut supposer que, après un certain nombre d'heures, la base d'un nuage d'orage consiste en une « cellule » contenant des gouttes chargées négativement. On assimile cette cellule à une sphère de rayon $R = 1$ km, uniformément chargée en volume et dont la partie la plus basse est à une distance $d = 1$ km du sol.

a) On suppose que la cellule contient une masse totale d'eau $M_C = 10^7$ kg et que les gouttes ont un rayon $R_g = 1$ mm. Calculer le nombre de gouttes N_C .

On suppose de plus que toutes les gouttes sont chargées à la valeur Q_{\max} (cf. **II.4.a)**) correspondant à un champ électrique de $10 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1}$ à l'intérieur du nuage. Quelle est la charge totale Q_t de la cellule ?

b) Quel est le potentiel V_C à la surface d'une sphère uniformément chargée, de charge totale Q_t et de rayon R_C , ce potentiel étant pris nul à l'infini ? Le calculer numériquement pour $R_C = 1$ km.

c) On considère nul le potentiel de la Terre ; donner une évaluation du champ électrique E moyen entre la base du nuage et la Terre. Préciser le sens de ce champ ; le comparer à celui qui existe par beau temps (cf. partie **I**). Le champ est-il plus fort à proximité du nuage ou du sol ?

2. Coup de foudre

Dans de l'air sec à la pression atmosphérique, l'application d'un champ électrique de l'ordre de $3 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ (30 kV par cm) produit une ionisation qui se propage par un processus d'avalanches électroniques (les électrons arrachés sont accélérés, et par collisions arrachent des électrons à d'autres molécules avec un coefficient multiplicateur) ; c'est le « champ de rupture ». Pour de l'air humide, contenant de plus des ions résiduels, la valeur de ce champ est notablement réduite. De plus des inhomogénéités ou des géométries particulières qui renforcent localement le champ électrique permettent à celui-ci d'atteindre plus aisément la valeur de rupture ; l'ionisation, une fois amorcée, se propage en formant un canal ionisé, appelé « traceur » ; un champ ambiant de l'ordre de $50 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1}$ peut suffire pour que ce processus se développe.

En général, durant la décharge, les observations suivantes peuvent être faites :

- la décharge part du nuage et descend vers le sol, l'intensité du courant est d'environ 1 kA.
- lorsque la décharge arrive à proximité du sol (quelques dizaines de mètres), une ionisation part du sol (« arc en retour ») et la rejoint ; l'intensité du courant transporté lors de cette seconde phase est importante.

a) Les valeurs numériques obtenues en **III.1.** sont-elles compatibles avec la formation d'un coup de foudre ?

b) La durée du phénomène est de l'ordre de $100\mu\text{s}$; déduire de ces valeurs l'ordre de grandeur de l'intensité moyenne du courant électrique correspondant.

Un millier de coups de foudre atteignent le sol chaque seconde dans le monde entier. Quelle est l'intensité totale moyenne I_0 entre la Terre et les nuages, en considérant que la charge moyenne transférée par coup de foudre est égale à Q_t ? Quel est le sens de ce courant ? Calculer la densité moyenne de courant ; comparer le sens du courant et sa densité à ceux existants par beau temps (cf. partie **I**). Que concluez-vous de cette comparaison ?

* *
*