

## Composition de Physique A, filière PC (XE)

Le sujet, intitulé *Imagerie par tomographie photo-acoustique*, proposait comme son titre l'indique, une étude des mécanismes physiques à l'origine du fonctionnement d'une nouvelle technique d'imagerie médicale, appelée la tomographie photo-acoustique. Ce sujet permettait de tester les connaissances des candidat(e)s sur une partie importante du programme de physique des classes préparatoires. Il nécessitait une mise en pratique des notions acquises en première et deuxième années des classes préparatoires relatives à l'électromagnétisme, la thermodynamique, la mécanique des fluides et la physique des ondes. Il se composait de quatre parties distinctes de difficultés assez comparables et qui pouvaient être traitées de manière indépendante. L'énoncé de ces quatre parties était précédé d'un court texte d'introduction, accompagné d'une photo illustrant le type d'image pouvant être obtenue avec cette technique novatrice sur des tissus vivants, et d'un formulaire mathématique se trouvant en fin d'énoncé. La première partie du problème étudiait la source laser impulsionnelle utilisée pour ce type de techniques. La deuxième se focalisait sur la génération des phénomènes photo-acoustiques survenant lorsque la lumière du laser pénétrant les tissus biologiques, interagit avec des nanoparticules d'or, utilisées comme agents de contraste. La troisième partie visait à décrire la génération acoustique (champs de pression et de température), produite au sein du tissu biologique par une nanoparticule individuelle illuminée par le laser, et les techniques de formation et de reconstruction d'image à partir des données expérimentales obtenues. La quatrième et dernière partie s'intéressait à une application directe visant à suivre l'écoulement sanguin et à mesurer la vitesse du sang par imagerie photoacoustique.

Chaque partie du problème comportait des questions de cours ou d'application directe du cours ainsi que quelques questions nécessitant plus de réflexion. Des applications numériques et des estimations d'ordre de grandeur étaient systématiquement demandées. L'immense majorité des candidat(es) a pu aborder chacune des quatre parties du problème.

Pour les 1023 candidat(e)s français(es) ayant passé l'épreuve la moyenne est de 9,81/20 avec un écart type de 3,41.

### Remarques générales :

Comme chaque année, il nous semble important de souligner et rappeler quelques règles générales, qui bien qu'évidentes restent toujours méconnues de nombreux(ses) candidat(e)s:

- Soigner son expression écrite et ne pas rédiger dans un langage approximatif, indigne de futur(e)s ingénieur(e)s. Eviter les erreurs grammaticales et orthographiques qui

nuisent véritablement à la lecture et à la compréhension des explications données pour justifier un raisonnement ou un résultat. De telles erreurs affectent nécessairement l'évaluation globale de la copie.

- Bien s'appliquer, ne pas négliger la forme et la tenue générale de sa copie et produire une écriture déchiffrable afin de faciliter le travail du correcteur.
- Vérifier systématiquement l'homogénéité des résultats obtenus. Cette démarche permet souvent de s'affranchir d'erreurs stupides, comme par exemple des erreurs typographiques.
- Présenter un résultat numérique avec les unités physiques correctes. Veiller à ce que le nombre de décimales significatives données soit en adéquation avec la précision des données numériques fournies par l'énoncé.
- Toujours justifier les hypothèses faites et invoquer les principes appliqués lors d'un raisonnement. Des résultats obtenus sans aucune justification ne sont pas considérés valides. Penser à définir de manière très explicite les variables introduites pour mener à bien un calcul.
- Ne pas négliger les applications numériques demandées car celles-ci constituent une part importante du nombre total de points attribués dans l'évaluation finale.
- Les questions demandées ne sont pas un commentaire de texte et les réponses ne doivent pas être une paraphrase de celui-ci. Pour chaque question, une réponse argumentée, s'appuyant sur un raisonnement physique rigoureux est attendue.

## Commentaire détaillé de l'épreuve.

### Partie I. Etude de la source laser.

**1** De manière très surprenante dans beaucoup de copies, les candidat(e)s parviennent à une valeur numérique éronnée  $\Delta E=1.43$  eV (au lieu de la valeur exacte  $\Delta E=1.25$  eV). Cette erreur d'inattention est certainement due au stress des candidat(e)s. Certain(e)s ne connaissent pas les domaines en longueur d'onde des ondes électromagnétiques correspondantes au spectre visible, infra-rouge et ultra-violet.

**2** Question de réflexion. Peu de candidat(e)s ont compris qu'avec ce processus il était possible de générer toutes les harmoniques  $n\omega_0$  du signal d'entrée. La plupart ont limité leur étude à la génération de la seconde harmonique, et beaucoup de ceux(celles) ayant fait un raisonnement par récurrence sont parvenu(e)s à des longueurs d'onde générées de la forme  $\lambda_n=\frac{\lambda_0}{2^n}$  et non pas  $\lambda_n=\frac{\lambda_0}{n}$  (avec n entier). Les techniques permettant de linéariser des fonctions trigonométriques correspondant à des produits de fonction sinus et/ou des produits de leurs puissances ne sont pas encore bien maîtrisées par de nombreux(ses) candidat(e)s.

**3** Question d'analyse de document ne présentant pas de difficulté majeure.

**4** Une toute petite minorité de candidat(e)s a compris que la diffraction fixait le rayon de la tâche centrale (Formule d'Airy). Les réponses ne présentant pas le préfacteur 1.22 (qui n'est plus au programme des classes préparatoire) ont été considérées comme valides. Seul un nombre restreint de copies parvient à établir l'expression littérale exacte de la puissance laser créée du fait d'une estimation erronnée de la puissance moyenne délivrée par le laser liée à une mauvaise prise en compte de la durée d'éclairement par unité de temps du fait des impulsions.

## Partie II. Génération photo-acoustique.

**5** La plupart des candidat(e)s se sont borné(e)s à donner seulement quelques exemples illustratifs de conversion d'énergie sans tenter de classifier le type de conversions possibles.

**6** Pour répondre correctement il suffisait simplement de noter que la longueur d'onde du laser utilisée correspond à la fenêtre de transparence des tissus biologiques. Dans de nombreuses copies, la démonstration de l'équation de diffusion de la chaleur en coordonnées sphériques est fausse car bien que les candidat(e)s fassent un bilan d'énergie sur la couche de fluide comprise entre les sphères concentriques de rayon  $r$  et  $r + dr$ , ils ne s'aperçoivent pas que le flux thermique traversant la surface de la sphère de rayon  $r + dr$  s'écrit  $\Phi(r + dr) = 4\pi(r + dr)^2 j(r + dr)$  et non pas  $\Phi(r + dr) = 4\pi r^2 j(r + dr)$ . La forme de l'équation qu'ils(elles) obtiennent correspondent alors à celle d'une équation de diffusion 1D exprimée en coordonnées cartésiennes. Les candidat(es) qui combinent l'équation locale de la conservation de l'énergie interne volumique  $\frac{\partial u}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}) = 0$  avec la loi de Fourier  $\vec{j} = -\lambda \vec{G} \text{rad}(T)$  évitent ce piège et parviennent directement à la forme générale correcte de l'équation de diffusion, valable dans tous les systèmes de coordonnées. Malheureusement, certain(e)s d'entre eux (elles) par étourderie, inattention et/ou absence de lecture du formulaire donné à la fin de l'énoncé, n'utilisent pas dans la suite l'expression du Laplacien en coordonnées sphériques mais simplement  $\frac{\delta^2 T}{\delta r^2}$ . Seul un nombre restreint de copies invoque le premier principe dans leur raisonnement.

**7** Les mêmes remarques que précédemment s'appliquent à la résolution de cette question. Beaucoup reprennent l'équation obtenue à la question précédente et ajoute de manière erronée le terme de production volumique de chaleur,  $P_v$ , dans le premier membre au lieu du second. Une simple analyse physique de l'équation leur aurait pourtant permis de corriger cette erreur. En effet la température d'un système homogène en présence d'une terme positif de production volumique d'énergie doit nécessairement croître.

**8** Question sans difficulté majeure à laquelle l'immense majorité des candidat(e)s a bien répondu. Les applications numériques sont en revanche souvent fausses. Il est dommage que certain(e)s candidat(e)s n'aient pas jugé utile d'effectuer ces applications numériques, cela les a pénalisé(e)s non seulement dans le nombre de points obtenus à l'épreuve mais également dans la compréhension de la cinétique d'évolution de la température au sein de la nanoparticule et du fluide environnant, une information utile pour bien appréhender la

physique du problème et ainsi répondre correctement aux questions suivantes.

**9** Question sans réelle difficulté pour ceux(celles) ayant obtenu à la question 7 l'expression correcte de l'équation de diffusion de la chaleur au sein de la nanoparticule .

**10** Question relativement simple si la question 9 avait été préalablement résolue correctement. Afin de ne pas pénaliser doublement les candidat(e)s, les erreurs de signe sur le préfacteur du terme  $P_v$  dans l'équation de diffusion obtenue à la question 7 n'ont pas été prises en compte dans la notation de la question 10, si toutefois le raisonnement était correctement mené.

**11** Pour répondre correctement à cette question, il convenait de remarquer qu'en négligeant le terme de conservation du flux thermique à l'interface, la dérivée temporelle de la température varie de manière similaire à  $P_v$ , puisque  $\beta$  est positif. Il suffisait alors de tracer la variation Gaussienne de  $P_v$  en fonction du temps,  $t$ , c'est à dire celle de  $\frac{dT_g}{dt}$ , puis de tracer qualitativement la variation temporelle de  $T_g$ , en notant que  $T_g$  présente un point d'inflexion à l'instant où  $P_v$  prend sa valeur maximale et que la température initiale est  $T_0$ .

**12** Une simple analyse dimensionnelle permettait de déterminer l'expression de la longueur thermique  $\ell_{th} = \sqrt{D\tau_p}$ . Certain(e)s candidat(e)s ont cependant utilisé à tort comme expression du temps caractéristique non pas  $\tau_p$  mais  $\frac{1}{f_{rep}}$ . Seule une poignée de candidat(e)s est parvenue à obtenir une expression correcte du profil radial de température dans le fluide après extinction de l'impulsion laser.

### Partie III. Génération acoustique et formation d'image.

**13** Application directe d'une question de cours puisqu'il s'agissait seulement de linéariser l'équation locale de la conservation de la masse  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v})$ . Certain(es) candidat(e)s ont jugé utile de redémontrer la conservation de la masse en effectuant un bilan de masse sur le volume élémentaire contenu entre deux sphères concentriques de rayon respectifs  $r$  et  $r+dr$ .

**14** Question sans réelle difficulté, puisqu'il s'agissait seulement de linéariser l'équation d'Euler. Beaucoup de candidat(e)s ne justifient pas les hypothèses simplificatrices permettant de parvenir à l'équation d'Euler alors que cela était pourtant explicitement demandé dans l'énoncé de la question.

**15** Beaucoup, ayant mal interprété l'énoncé, ont tenté en vain de démontrer la formule:  $\rho_a(\vec{r}, t) = \frac{p_a(\vec{r}, t)}{c_0^2} - \rho_0 \beta T_a(\vec{r}, t)$ . Question peu discriminante dans la mesure où il suffisait de combiner les équations obtenues aux questions 13 et 14 avec la formule donnée par l'énoncé.

**16** L'immense majorité des candidat(e)s a reconnu une équation de propagation avec un second membre. Cependant, dans la plupart des copies, ce second membre est interprété à tort comme un terme d'amortissement et non pas de source. Seule une minorité de copies a noté que du fait des symétries du problème et de l'expression de l'opérateur Laplacien en

coordonnées sphériques, il était naturel d'introduire la variable  $rp_a(r)$ , ce qui leur permettait de prédire directement la génération d'une onde acoustique sphérique, et non pas plane.

**17** Pour répondre correctement à cette question il fallait à partir de l'estimation du temps caractéristique du signal acoustique, relevé sur la Figure 3, déterminer la valeur numérique de la fréquence de l'onde acoustique émise. La valeur obtenue pour cette fréquence permettait alors de justifier la nature ultrasono de l'onde. Pour justifier le caractère ponctuel de la source, il fallait comparer la longueur d'onde de cette onde émise au rayon de la nanoparticule chauffée, la générant. Ce second point a été souvent omis dans les copies. Notons que dans de nombreuses copies, les candidat(e)s ont utilisé à tort, très probablement par étourderie, la vitesse de la lumière en lieu et place de celle du son, pour déterminer à partir de la fréquence, la longueur d'onde acoustique.

**18** Pour obtenir la totalité des points à cette question il convenait de calculer le temps d'arrivée du signal et l'amortissement de l'amplitude,  $A$ , reçue, résultant du caractère sphérique de l'onde.

**19** Dans beaucoup de copies, la profondeur calculée est fausse, soit parce que le temps pris pour estimer cette longueur est la durée d'une impulsion,  $\tau_p$ , et non pas la durée,  $\frac{1}{f_{rep}}$ , séparant deux impulsions consécutives soit parce que la célérité prise correspond à la vitesse de la lumière et non pas à celle de l'onde sonore. De nombreux(ses) candidat(e)s considèrent à tort que l'onde doit effectuer un aller-retour dans le milieu, ce qui les conduit à obtenir une valeur de la profondeur deux fois plus faible que la valeur correcte. Peu de commentaires sur la pertinence de la valeur de la profondeur obtenue pour les applications en imagerie médicale.

**20** Très peu de bonnes réponses à cette question. Peu de candidat(e)s ont compris que le temps de montée en température de la nanoparticule était contrôlé par la durée de l'impulsion laser,  $\tau_p$ .

**21** Question relativement peu traitée. Peu de ceux(celles) ayant abordé cette question ont compris qu'il s'agissait en fait d'un problème de triangulation.

**22** Question peu abordée.

**23** Question très peu traitée. Le facteur 1,22 de la formule de Airy, non exigible au programme, n'a pas été pris en compte dans la notation de la question.

## Partie IV. Mesure de la vitesse du sang.

**24** Une démonstration de l'effet Doppler était attendue pour  $\Delta f$ , avec un développement limité à l'ordre 1 du terme  $\frac{v}{c}$ . Beaucoup de copies n'ont pas tenu compte de l'angle  $\alpha$ , pourtant indiqué explicitement sur le schéma de l'énoncé, et ont seulement considéré la situation  $\alpha = 0$ .

**25** Question assez discriminante dans la mesure où pour répondre à cette question, il fallait avoir établi préalablement la bonne expression de  $\Delta f$ . Dans quelques copies, des valeurs totalement fantaisistes de la vitesse sanguine (des vitesses parfois de l'ordre de  $10^2 \text{ ms}^{-1}$  et plus) ont été trouvées sans que cela n'interroge les candidat(e)s sur la validité de leur calcul.

**26** Question de cours relativement bien traitée. Les applications numériques sont en revanche souvent fausses du fait que pour mener le calcul il fallait utiliser les valeurs des vitesses sanguines, obtenues à la question 25.

**27** Question relativement bien traitée. Notons cependant que seul(e)s quelques candidat(e)s parviennent à démontrer rigoureusement (en utilisant les symétries du problème, la condition d'incompressibilité du fluide et le caractère irrotationnel de l'écoulement) que la vitesse ne possède qu'une composante suivant l'axe  $z$ .

**28** Question relativement bien traitée par ceux(elles) l'ayant abordée. La majeure partie des candidat(e)s a obtenu un écoulement parabolique avec une vitesse s'annulant aux parois. Notons cependant que des erreurs d'inhomogénéité ont été observées sur l'expression de la vitesse. De manière très surprenante et décevante, le calcul du débit volumique et donc de la vitesse moyenne a été très mal mené dans l'immense majorité des copies, les candidat(e)s n'ayant pas sommé la vitesse  $v(r)$  sur l'élément de surface  $2\pi r dr$  mais uniquement sur  $dr$ .

**29** Question très peu traitée. Notons que l'expression de  $\xi$ , le facteur de friction de Darcy-Weisbach, donnée par l'énoncé n'était pas homogène du fait de l'omission du terme  $\Delta P$  probablement due à une erreur typographique ou d'impression. L'expression  $\xi = \frac{2D\Delta P}{\rho v^2 L}$  apparaissant sur la Figure 4 était en revanche correcte. Quelques excellent(e)s candidat(e)s, faisant preuve d'esprit critique et d'une bonne maturité scientifique, se sont rendu(e)s compte de cette erreur d'homogénéité et l'on corrigée d'eux(elles)-même. Nous les en félicitons.

**30** Question traitée par seulement quelques candidat(e)s.

**31** Question très peu abordée et discriminante dans la mesure où pour y répondre il fallait avoir obtenu préalablement, à la question 28, l'expression analytique correcte du débit volumique.