Correction du polycopié de Transition Terminale $\to$ CPGE

Par un Collectif d'élèves

Novembre 2022

Introduction

Organisation du Contenu

Ce document, à mon initiative, est une correction du polycopié *Mathématiques : du lycée aux CPGE scientifiques* des lycées Louis-Le-Grand et Henry-IV. Entrant moi-même en année de mathématiques supérieure, il m'a semblé propice d'établir une correction qui pourra aider quiconque voulant s'essayer à ce polycopié. Il a la même organisation que le polycopié d'origine, avec les même parties et sous-parties. Les énoncés ont été recopiés pour plus de clarté, et le nom du correcteur est mentionné pour chaque exercice. Ce polycopié ne comporte pas les parties de cours et d'exemples du polycopié d'origine, donc certains exercices mentionnent des fonctions, propriétés et démonstrations qui ne sont pas dans ce document. Les corrections se veulent complètes au possible, et ne sont donc pas des indications mais des raisonnements entièrement rédigés. Cependant, en vu de la longueur de ce document, il se peut qu'il y ai des erreurs en tout genre. Si le lecteur rencontre de telles erreurs, il peut me le signaler à neilshrmn@gmail.com.

Remerciements

Ce projet conséquent a été le fruit d'une collaboration de plus de 75 élèves d'élèves, majoritairement entrant en première année de classe préparatoire, mais aussi d'élèves en route vers la seconde année, de lycéens et d'intégrés. Ce travail aurait été impossible sans la collaboration de tous, que ce soit dans la correction des exercices, leur vérification, l'administration, et autres taches longues et pénibles qui ont été faites en groupe et qui auraient été impossible sans l'aide de chacun.

J'aimerai particulièrement remercier certaines personnes qui ont été cruciales à la création de ce corrigé :

-Lancelot Achour, pour tes 60 exercices soumis, avec une efficacité et une rapidité qui a permis à ce document d'avancer considérablement, on te doit plus d'un dixième de ce corrigé !

-Léo Baciocchi, pour avoir été un administrateur extrêmement efficace, tes conseils LaTeX, ta participation et ta double correction. Ta présence en mon absence a assuré la continuité de la correction, et tu m'as secondé tout du long.

-Daniel Caby, Tristan Hottier et Octave Koenig, pour avoir été là dès le début et avoir fait les exercices les plus difficiles, tout en répondant aux questions de chacun. Votre investissement et encouragement nous a été fondamental.

-Tomás Jeria, pour avoir été le premier administrateur, m'avoir initié aux subtilités du LaTeX, et être le premier à réellement s'investir dans le projet, on te doit son envol.

-Ilies Kerkeni, pour être venu dans un moment où la motivation était au plus bas, ta modération efficace, ta prise en charge des transcriptions LaTeXainsi que ton long travail a permis à tout le monde de finir ce corrigé.

-Loise Launay pour ta participation active et les nombreux exercices que tu as rédigé.

-Les élèves déjà en classes préparatoire ou au-delà, pour vos conseils de rédactions et votre double-correction.

Et enfin, l'équipe des "transcripteurs", pour avoir transformé des réponses écrites sur papier en LaTeX, il n'est pas une exagération de dire que vous avez fait la partie la plus difficile et la plus longue de ce corrigé.

Finalement, il me semble opportun de remercier M. et Mme Tosel, et donc les lycées Louis-Le-Grand et Henry-IV, non seulement pour avoir créé le polycopié d'exercices, mais pour avoir re-rédigé et re-corrigé chacune des corrections faites par les élèves, pour avoir un document le plus exact et juste possible. L'équipe vous doit une supervision et des conseils qui ont permis à votre document d'être corrigé.

Table des matières

1 Modes de raisonnement

1.1 Le raisonnement par récurrence (1)

EXERCICE 1 (②) par Neil Sherman[∗]

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}_n$ la propriété

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Initialisation. La vérification de $\mathcal{P}_1$ est immédiate. En effet :

$$1^3 = \left(\frac{1(2)}{2}\right)^2 = 1.$$

Hérédité. Fixons n dans $\mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. On a donc :

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Alors :

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3.$$

Soit :

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + n + 1\right).$$

Mais :

$$\frac{n^2}{4} + n + 1 = \frac{n^2 + 4n + 4}{4} = \frac{(n+2)^2}{2^2} = \left(\frac{n+2}{2}\right)^2.$$

Et donc finalement

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = (n+1)^2\left(\frac{n+2}{2}\right)^2 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2.$$

Ce qui est exactement $\mathcal{P}_{n+1}$.

Conclusion. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

EXERCICE 2 (②) par Tristan Hottier [∗]

Montrer que, si $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier impair λ_n tel que

$$5^{2^n} = 1 + \lambda_n 2^{n+2}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, montrons par récurrence la proposition suivante :

$$\mathcal{P}_n \ : \text{Il existe } \lambda_n \text{ impair tel que } 5^{2^n} = 1 + \lambda_n 2^{n+2}$$

Initialisation. On vérifie que $\mathcal{P}_0$ est vraie :

$$\begin{aligned} 5^{2^0} &= 5^1 \\ &= 5 \\ &= 1+4 \\ &= 1+1\cdot 2^{0+2} \end{aligned}$$

On prend $\lambda_0 = 1$ qui est impair. Ainsi, $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie. On montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned} 5^{2^{n+1}} &= \left(1+\lambda_n 2^{n+2}\right)^2 \\ &= 1+\lambda_n^2 2^{2(n+2)} + \lambda_n 2^{n+3} \\ &= 1+\lambda_n^2 2^{n+3} 2^{n+1} + \lambda_n 2^{n+3} \\ &= 1+\left(\lambda_n^2 2^{n+1} + \lambda_n\right) 2^{n+3} \end{aligned}$$

On pose : $\lambda_{n+1} = \lambda_n^2 2^{n+1} + \lambda_n$. On note que λ_{n+1} est impair car $\lambda_n^2 2^{n+1}$ est pair et λ_n est impair. Alors, $5^{2^{n+1}} = 1 + \lambda_{n+1} 2^{n+3}$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Ainsi, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 3 (③) par Neil Sherman[*]

Soient a et b deux réels, $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b$$

On se propose de calculer u_n en fonction de n et u_0

a) Traiter le cas a =1
   On suppose désormais $a \neq 1$
b) Résoudre l'équation $x = ax + b$. On note ℓ la solution. Dans la question suivante, il est inutile (voire toxique) de remplacer ℓ par sa valeur ; seule est utile l'équation

$$\ell = a\ell + b$$

c) On pose, pour n dans $\mathbb{N}$:

$$v_n = u_n - \ell$$

   Montrer que $(v_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique. Conclure.
d) À quelles conditions portant sur a et u_0 la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est-elle convergente ?

a) Si $a = 1$ alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + b$
   La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite arithmétique. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = u_0 + nb.$$

b) On a

$$x = ax + b \leftrightarrow x - ax = b \leftrightarrow x(1-a) = b \leftrightarrow x = \frac{b}{1-a} = \ell.$$

c) On souhaite montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique. On écrit, si $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = au_n + b - \ell = au_n + b - a\ell - b = a(u_n - \ell) = av_n.$$

   Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a. Utilisant la formule explicite des suites géometriques, on obtient que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = v_0\, a^n = (u_0 - \ell)\, a^n$$

Or

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = v_n + \ell = (u_0 - \ell)a^n + \ell.$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) a^n + \frac{b}{1-a}$$

d) Une suite géométrique non identiquement nulle converge si et seulement si sa raison appartient à $]-1, 1]$. Comme $a \neq 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $-1 < a < 1$ ou si $u_0 = \dfrac{b}{1-a}$. Dans les deux cas, sa limite est ℓ.

EXERCICE 4 (③) par Neil Sherman[*]

La suite réelle $(t_n)_{n\geq 0}$ est définie par $t_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad t_{n+1} = \frac{\sqrt{t_n}}{e}.$$

En appliquant l'exercice précédent à la suite $(\ln(t_n)_{n\geq 0})$, exprimer t_n en fonction de n et étudier la convergence de $(t_n)_{n\geq 0}$.

Si $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\ln(t_{n+1}) = \ln\left(\frac{\sqrt{t_n}}{e}\right) = \ln(\sqrt{t_n}) - 1 = \frac{1}{2}\ln(t_n) - 1$$

Ainsi $\ln(t_{n+1})$ est de la forme $a\ln(t_n) + b$, avec $a = \frac{1}{2}$ et $b = 1$. La conclusion de l'exercice précédent montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \ln(t_n) = \left(\ln(t_0) - \frac{b}{1-a}\right) a^n + \frac{b}{1-a} = \left(\ln(1) - \frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2$$

Par suite,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad t_n = \exp(\ln(t_n)) = \exp\left(2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\right)$$

Comme une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ converge vers 0, $(\ln(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers -2. Par continuité de exp,

$$t_n \to \exp(-2).$$

EXERCICE 5 (③) par Neil Sherman[*]

La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est définie par $x_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = x_0 + x_1 + \cdots + x_n.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer x_n en fonction de n.

On remarque que, si $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+2} = x_0 + x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1} = x_{n+1} + x_{n+1} = 2x_{n+1}$. Ainsi, par décalage d'indice,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad x_{n+1} = 2x_n.$$

Comme $x_1 = 1$, il en résulte, par récurrence immédiate, que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad x_n = 2^{n-1}.$$

Le cas de $n = 0$ est exceptionnel ($x_0 = 1$).

EXERCICE 6 (④) par Neil Sherman[*]

Soit $c \in \mathbb{R}^{+*}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, soit $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+cx^2}}$. Calculer $f(f(x)), f(f(f(x)))$ et généraliser.

$$f(f(x))=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+cx^2}}}{\sqrt{1+c\left(\frac{x}{\sqrt{1+cx^2}}\right)^2}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+cx^2}}}{\sqrt{1+\frac{cx^2}{1+cx^2}}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+cx^2}}}{\frac{\sqrt{1+2cx^2}}{\sqrt{1+cx^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+2cx^2}}$$

De la même manière, on observe que $f(f(f(x)))=\frac{x}{\sqrt{1+3cx^2}}$ On peut donc conjecturer que, si on note $f^n(x)$ pour $\underbrace{f(f(...f(x)...))}_{n \text{ fois}}$, alors

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \forall x\in\mathbb{R},\quad f^n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+ncx^2}}.$$

Soit $\mathcal{P}_n$ cette propriété.

Prouvons-la par récurrence, sachant que, si $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$, $f^{n+1}(x)=f(f^n(x))$

Initialisation. $\mathcal{P}_1$ est immédiat car, pour $x\in\mathbb{R}$,

$$f^1(x)=\frac{x}{\sqrt{1+1cx^2}}=f(x)$$

Hérédité. Fixons n dans $\mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie, i.e. :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f^n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+ncx^2}}$$

Alors, si $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f^{n+1}(x) &= f(f^n(x))=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+ncx^2}}}{\sqrt{1+c\left(\frac{x}{\sqrt{1+ncx^2}}\right)^2}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+ncx^2}}}{\sqrt{1+\frac{cx^2}{1+ncx^2}}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+ncx^2}}}{\frac{\sqrt{1+ncx^2+cx^2}}{\sqrt{1+cx^2}}} \\ &= \frac{\frac{x}{\cancel{\sqrt{1+cx^2}}}}{\frac{\sqrt{1+(n+1)cx^2}}{\cancel{\sqrt{1+cx^2}}}} \end{aligned}$$

ce qui donne

$$f^{n+1}(x)=\frac{x}{\sqrt{1+(n+1)cx^2}}$$

ce qui est exactement $\mathcal{P}_{n+1}$.

1.2 Le raisonnement par récurrence (2)

Exercice 7 (1) par Neil Sherman[*]

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par :

$$u_0=2,\quad u_1=5\qquad et\qquad \forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+2}=5u_{n+1}-6u_n.$$

Montrer que

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=2^n+3^n$$

Pour $n\in\mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}_n$ la propriété : $u_n=2^n+3^n$. Prouvons par récurrence que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.
Initialisation. $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vérifiées puisque $u_0=2^0+3^0=2$ et $u_1=2^1+3^1=5$.

Hérédité. Fixons n dans $\mathbb{N}$ tel que les propriétés $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ soient vraies. On a alors

$$u_n=2^n+3^n \text{ et } u_{n+1}=2(2^n)+3(3^n)$$

Rappelons que

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n,$$

ce qui donne

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n = 10(2^n) + 15(3^n) - 6(2^n) - 6(3^n) = 4(2^n) + 9(3^n) = 2^{n+2} + 3^{n+2},$$

ce qui est exactement $\mathcal{P}_{n+2}$.

EXERCICE 8 (②) par Neil Sherman[∗]

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 2 \quad et \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \frac{(u_n)^2}{u_{n-1}}$$

« Deviner » une formule donnant u_n en fonction de n, puis la démontrer par récurrence.

On note que

Terme	Valeur
u_0	1
u_1	2
u_2	4
u_3	8
u_4	16
u_5	32

et on remarque que ce sont les premiers termes de la suite $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit, pour n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ la propriété : « $u_n = 2^n$ ».

Initialisation. On a $u_0 = 2^0 = 1$ et $u_1 = 2^1 = 2$ donc $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vérifiées.

Hérédité. Fixons n dans $\mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ soient vraies. Alors

$$u_n = 2^n \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 2^{n+1},$$

donc

$$u_{n+2} = \frac{(u_{n+1})^2}{u_n} = \frac{(2^{n+1})^2}{2^n} = 2^{2n+2-n} = 2^{n+2}$$

ce qui est exactement $\mathcal{P}_{n+2}$

EXERCICE 9 (③) par Antonin Demairé [∗]

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par :

$$u_0 = 0; \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} + u_n = n\,.$$

Exprimer u_n en fonction de n.

Pout conjecturer un résultat, on calcule les premiers termes, en remarquant que $u_{n+1} = n - u_n$

Terme	Valeur
u_0	0
u_1	0
u_2	1
u_3	1
u_4	2
u_5	2
u_6	3
u_7	3

On peut alors conjecturer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$
Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}_n$ la propriété $u_n = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.
Initialisation : $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Fixons n dans $\mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie

$$u_n = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor .$$

On va donc faire une disjonction de cas selon la parité de n.

Si n est pair, $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$. Alors :

$$u_{n+1} = n - u_n = n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = 2k - k = k = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$$

Si n est impar, $n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$. Alors :

$$u_{n+1} = n - u_n = n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = 2k + 1 - k = k + 1 = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$$

ce qui achève la récurrence

EXERCICE 10 (③) par Antonin Demairé [*]

La suite $(F_n)_{n \geq 0}$ est celle de l'exemple 1. Pour n dans $\mathbb{N}$, on pose :

$$\Delta_n = F_n F_{n+2} - {F_{n+1}}^2 .$$

a) Calculer Δ_n pour quelques valeurs de n. Deviner une formule donnant Δ_n et démontrer cette formule par récurrence.

b) Calculer directement Δ_n à partir de la formule obtenue dans l'exemple 1. Pour faciliter les calculs, mieux vaut ne pas remplacer tout de suite α et β par leurs expressions.

---

a) On calcule Δ_n sur les 5 premiers termes (rappelons que $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite de Fibonacci)

Δ_n	Valeur
u_0	$F_0F_2 - F_1^2 = -1$
u_1	$0\ F_1F_3 - F_2^2 = 1$
u_2	$F_2F_4 - F_3^2 = -1$
u_3	$F_3F_5 - F_4^2 = 1$
u_4	$F_4F_6 - F_5^2 = -1$
u_5	$F_5F_7 - F_6^2 = 1$

On conjecture donc que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta_n = (-1)^{n+1}$.

Initialisation : voir tableau

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\Delta_n = (-1)^{n+1}$. Alors,

$$\begin{aligned} F_{n+1}F_{n+3} - F_{n+2}^2 &= F_{n+1}(F_{n+2} + F_{n+1}) - F_{n+2}(F_{n+1} + F_n) \\ &= F_{n+1}F_{n+2} + F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n - F_{n+2}F_{n+1} \\ &= F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n \\ &= -\Delta_n \\ &= (-1)^{n+2}, \end{aligned}$$

ce qui est le résultat voulu.

b) Posons $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. On sait que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n).$$

Notons par ailleurs que $\alpha + \beta = 1$ et que $\alpha\beta = -1$ (calcul direct, ou plutôt somme et produit des racines de l'équation du second degré $x^2 - x - 1 = 0$). Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$F_n F_{n+2} = \frac{1}{5}(\alpha^{2n+2} + \beta^{2n+2} - \alpha^n \beta^{n+2} - \alpha^{n+2}\beta^n)$$

$${F_{n+1}}^2 = \frac{1}{5}(\alpha^{2n+2} + \beta^{2n+2} - 2\alpha^{n+1}\beta^{n+1})$$

Il s'ensuit que

$$\Delta_n = -\frac{1}{5}\alpha^n\beta^n(\alpha-\beta)^2 = -\frac{1}{5}(\alpha\beta)^n((\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta) = -\frac{1}{5}(-1)^n.5 = -(-1)^n = (-1)^{n+1}$$

Un calcul avec les expressions de α et β est bien sûr possible, mais plus laborieux.

Exercice 11 (④) par Antonin Demairé [*]

Soient a et b deux nombres réels. On suppose que l'équation $x^2 = ax + b$ admet deux racines réelles distinctes λ et μ. On se propose de déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des suites réelles $(u_n)_{n\geq 0}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

a) Montrer que, pour α et β dans $\mathbb{R}$, la suite $(\alpha\lambda^n + \beta\mu^n)_{n\geq 0}$ appartient à $\mathcal{E}$.

b) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ un élément de $\mathcal{E}$. Vérifier qu'il existe deux nombres réels α et β tels que

$$\alpha + \beta = u_0 \qquad \text{et} \qquad \alpha\lambda + \beta\mu = u_1\,.$$

c) Avec les notations de b), montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \alpha\lambda^n + \beta\mu^n$$

d) Retrouver le résultat de l'exercice 7.

a) On fixe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et on pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $W_n = \alpha\lambda^n + \beta\mu^n$. Rappelons que $\lambda^2 = a\lambda + b$ et $\mu^2 = a\mu + b$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} aW_{n+1} + bW_n &= a(\alpha\lambda^{n+1} + \beta\mu^{n+1}) + b(\alpha\lambda^n + \beta\mu^n) \\ &= \alpha\lambda^n(a\lambda + b) + \beta\mu^n(a\mu + b) \\ &= \alpha\lambda^{n+2} + \beta\mu^{n+2} \\ &= W_{n+2} \end{aligned}$$

On a bien $(W_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{E}$.

b) On a

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta = u_0 \\ \\ \alpha\lambda + \beta\mu = u_1 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{u_0\mu - u_1}{\mu - \lambda} \\ \\ \beta = \frac{u_1 - u_0\lambda}{\mu - \lambda} \end{array} \right.$$

Ceci prouve l'existence (et l'unicité) de (α, β). On remarquera que $\lambda \neq \mu$

c) On raisonne par récurrence sur n pour établir la formule $\mathcal{P}_n$:

$$u_n = \alpha\lambda^n + \beta\mu^n.$$

Initialisation : Par choix de (α, β), $\mathcal{P}_n$ est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ soit vraies. Alors

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= au_{n+1} + bu_n \\ &= a(\alpha\lambda^{n+1} + \beta\mu^{n+1}) + b(\alpha\lambda^n + \beta\mu^n) \\ &= \alpha\lambda^n(a\lambda + b) + \beta\mu^n(a\mu + b) \\ &= \alpha\lambda^{n+2} + \beta\mu^{n+2} \end{aligned}$$

C'est le résultat voulu

d) La suite récurrente : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$, a pour équation caractéristique $x^2 = 5x - 6$. Comme $\lambda = 2$ et $\mu = 3$ sont solutions, les formules donnant α et β montrent que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n + 3^n.$$

C'est le résultat voulu.

Remarque : Ce résultat sera redémontré en sup.

EXERCICE 12 (④) par Antonin Demairé[*]

Soient a et b deux nombres réels. On suppose que l'équation $x^2 = ax + b$ admet une unique racine réelle λ. On se propose de déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des suites réelles $(u_n)_{n\geq 0}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\,.$$

a) Montrer que, pour α et β dans $\mathbb{R}$, la suite $(\alpha\lambda^n + n\beta\lambda^n)_{n\geq 0}$ appartient à $\mathcal{E}$.

b) En reprenant la méthode de l'exercice précédent, montrer que, si la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est un élément de $\mathcal{E}$, il existe deux nombres réels α et β tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \alpha\lambda^n + \beta n\lambda^n\,.$$

a) On fixe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $W_n = \alpha\lambda^n + n\beta\lambda^n$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Rappelons que

$$\lambda^2 = a\lambda + b, \qquad \text{et} \qquad 2\lambda = a,$$

donc

$$\begin{aligned} aW_{n+1} + bW_n &= a(\alpha\lambda^{n+1} + \beta(n+1)\lambda^{n+1}) + b(\alpha\lambda^n + \beta n\lambda^n) \\ &= \alpha\lambda^n(a\lambda + b) + \beta\lambda^n a\lambda + n\beta\lambda^n(a\lambda + b) \\ &= \alpha\lambda^{n+2} + \beta(n+2)\lambda^{n+2} \end{aligned}$$

b) Pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha = u_0 \\ \\ \alpha\lambda + \beta\lambda = u_1 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \alpha = u_0 \\ \\ \beta = \frac{u_1 - u_0\lambda}{\lambda} \end{array}\right. .$$

Il existe donc un unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ solution du système. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}_n$:

$$u_n = \alpha\lambda^n + \beta n\lambda^n$$

Initialisation : Par choix de (α, β), $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vraies.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ soient vraies. Alors

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= au_{n+1} + bu_n \\ &= a(\alpha\lambda^{n+1} + \beta(n+1)\lambda^{n+1}) + b(\alpha\lambda^n + \beta n\lambda^n) \\ &= \alpha\lambda^n(a\lambda + b) + \beta\lambda^n a\lambda + n\beta\lambda^n(a\lambda + b) \\ &= \alpha\lambda^{n+2} + \beta(n+2)\lambda^{n+2} \end{aligned}$$

C'est le résultat voulu.

Remarque : Ce résultat sera redémontré en sup.

Exercice 13 (④) par Léo Baciocchi [*]

Soit A une partie de $\mathbb{N}^*$ contenant 1 et telle que :

$$i)\ \forall n \in A,\quad 2n \in A \qquad \text{et} \qquad ii)\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\quad n+1 \in A \Rightarrow n \in A\,.$$

a) Montrer que
$$\forall m \in \mathbb{N}, \qquad 2^m \in A\,.$$

b) Montrer que $A = \mathbb{N}^*$

a) On montre ce résultat par récurrence.
Initialisation : Pour $m = 0$, $2^0 = 1 \in A$ par définition de A.
Hérédité : Soit $m \in \mathbb{N}$. Supposons que $2^m \in A$, et montrons qu'alors $2^{m+1} \in A$. Or

$$2^m \in A \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{d'après } i)} 2^m \cdot 2 \in A \Longrightarrow 2^{m+1} \in A.$$

Conclusion : On a donc bien : $\forall m \in \mathbb{N}, 2^m \in A$.

b) D'après *ii)*, $\forall i \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}$, $2^i > k \Rightarrow 2^i - k \in A$. En effet, et sans formaliser, *ii)* entraîne, par récurrence descendante, que si $n \in \mathbb{N}^*$ appartient à A, il en est de même de tous les éléments de $\mathbb{N}^*$ inférieurs ou égaux à n.
Il s'ensuit que
$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \qquad \{1, 2, \ldots, 2^i\} \subset A,$$
ce qui entraîne bien que $A = \mathbb{N}^*$.

Exercice 14 (④) par Antoine Charki[*]

On se propose de montrer que tout rationnel de $]0,1[$ s'écrit comme somme d'inverses d'entiers naturels deux à deux distincts. Ce type d'écriture, utilisé par les égyptiens dans l'Antiquité, n'a pas un très grand intérêt, mais la preuve du résultat est un bon exemple de raisonnement par récurrence.

a) Soit x un rationnel de $]0,1[$. On écrit donc
$$x = \frac{m}{n}, \qquad (m,n) \in {\mathbb{N}^*}^2, \qquad m < n\,.$$
On effectue la division euclidienne de n par m :
$$n = qm + r, \qquad q \in \mathbb{N}^*, \qquad r \in [\![0, m-1]\!].$$
On suppose que x n'est pas l'inverse d'un entier, i.e. que m ne divise pas n ou encore que $r \neq 0$. Montrer que $x - \dfrac{1}{q+1}$ peut s'écrire sous la forme :
$$\frac{m'}{n'}, \qquad n' \in \mathbb{N}^*, \qquad m' \in [\![1, m-1]\!]\,.$$

b) En utilisant une hypothèse de récurrence judicieuse, démontrer la propriété voulue.

c) Constater que la démonstration précédente fournit en fait un algorithme de décomposition. Appliquer cet algorithme à $x = \dfrac{5}{17}$.

a) Avec $m' = m - r$ et $n' = (q+1)\cdot(qm+r) = (q+1)\cdot n$, on retrouve bien :

$$\frac{m'}{n'} = \frac{m - n + qm}{(q+1)\cdot n} = \frac{x}{(q+1)} - \frac{1}{(q+1)} + \frac{qx}{(q+1)} = x - \frac{1}{q+1}\,.$$

b) Pour m dans $\mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}_m$ la propriété « tout nombre rationnel de $]0,1[$ de la forme $\dfrac{a}{b}$ avec $(a,b) \in \mathbb{N}^{*2}$ et $a \leq m$ s'écrit comme somme d'inverses d'entiers naturels deux à deux distincts ».
La propriété $\mathcal{P}_1$ est évidente.
Soit $m \geq 2$ un entier tel que $\mathcal{P}_{m-1}$ soit vraie. Montrons $\mathcal{P}_m$. Il suffit de montrer que tout nombre rationnel de $]0,1[$ de la forme $\frac{m}{n}$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$, et donc $m < n$) s'écrit comme somme d'inverses d'entiers naturels deux à deux distincts. Soient donc $n > m$ un entier, q et r le reste de la division euclidienne de n par m. Définissons m' et n' comme en a). Alors

$$\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'} + \frac{1}{q+1} \quad \text{et} \quad \frac{m'}{n'} < \frac{1}{q+1},$$

la seconde assertion provenant de $n' - (q+1)m' = (q+1)(n-m') \geq (q+1)(n-m) > 0$. Puisque $m' \leq m-1$ et que $\mathcal{P}_{m-1}$ est vraie, on peut écrire

$$\frac{m'}{n'} = \sum_{k=1}^{\ell} \frac{1}{x_k},$$

où $\ell \in \mathbb{N}^*$ et où les x_k sont des entiers distincts, nécessairement strictement supérieurs à $q+1$. Posant $x_{\ell+1} = q+1$, $x_1, \ldots, x_{\ell+1}$ sont des éléments distincts de $\mathbb{N}^*$ et

$$\frac{m}{n} = \sum_{k=1}^{\ell+1} \frac{1}{x_k},$$

ce qui achève la démonstration.

c) Le quotient de la division euclidienne de 17 par 5 est 3. L'algorithme obtenu en b) conduit à écrire d'abord

$$\frac{5}{17} = \frac{1}{4} + \frac{3}{68}.$$

Le quotient de la division euclidienne de 68 par 3 est 22. On écrit donc

$$\frac{3}{68} = \frac{1}{23} + \frac{1}{23.68} = \frac{1}{23} + \frac{1}{1564}.$$

Finalement,

$$\frac{5}{17} = \frac{1}{4} + \frac{1}{23} + \frac{1}{1564}.$$

Exercice 15 (⑤) par Tristan Hottier et Zinedine Hamimed

La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = u_{\lfloor n/2 \rfloor} + u_{\lfloor n/3 \rfloor} + u_{\lfloor n/6 \rfloor}$$

a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \geq n+1\,.$$

b) Trouver $C > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n \leq Cn$$

a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_n$ la propriété

$$u_n \geq n+1$$

Démontrons $\mathcal{P}_n$ par récurrence forte.
Initialisation :
On a $u_0 = 1$ et $1 \geq 1$, donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
Hérédité
Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}_k$ est vraie pour tout k tel que $0 \leq k \leq n$. Montrons que que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. Observons que

$$\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \leq n.$$

En effet, si n est pair, $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$ et

$$\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2k+1}{2} \right\rfloor = k \leq 2k,$$

tandis que, si n est impair, $n = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$ et

$$\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2k+2}{2} \right\rfloor = k+1 \leq 2k+1.$$

Ces inégalités permettent d'appliquer l'hypothèse de récurrence :

$$u_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \geq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 1$$

$$u_{\lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor} \geq \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor + 1$$

$$u_{\lfloor \frac{n+1}{6} \rfloor} \geq \left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor + 1$$

Alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} + u_{\lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor} + u_{\lfloor \frac{n+1}{6} \rfloor} \\ &\geq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor + 3 \\ &> \frac{n+1}{2} - 1 + \frac{n+1}{3} - 1 + \frac{n+1}{6} - 1 + 3 \\ &> \frac{6\,(n+1)}{6}. \end{aligned}$$

Ainsi, $u_{n+1} > n+1$. Or, u_{n+1} est un entier car défini comme somme d'entiers, ce qui nous donne finalement $u_{n+1} \geq n+2$, ce qui est exactement $\mathcal{P}_{n+1}$.

b) Les premiers termes de la suite sont $u_0 = 1, u_1 = 3, u_2 = 5, u_3 = 7, u_4 = 9, u_5 = 9, u_6 = 15$.
Il faut prendre garde à ce que la propriété est cette fois vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ (et d'ailleurs, aucun C ne peut convenir pour $n = 0$). Pour appliquer l'hypothèse de récurrence, il faut donc que n soit tel que $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$, $\left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor$ et $\left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor$ soient supérieurs ou égaux à 1, i.e. que n soit supérieur ou égal à 5. Nous allons donc prendre

$$C = \max\left\{ \frac{u_k}{k} \ ; \ 1 \leq k \leq 5 \right\} = 3.$$

Soit donc $\mathcal{P}_n$ la propriété $u_n \leq 3n$. Ce qui précède montre que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Soit $n \geq 5$ tel que $\mathcal{P}_k$ soit vraie pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Alors,

$$u_{n+1} \leq 3 \left(\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor \right) \leq 3 \left(\frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{3} + \frac{n+1}{6} \right) = 3\,(n+1).$$

La propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, ce qui achève le raisonnement par récurrence.

Exercice 16 (⑤) par Octave Koenig [$*$]

Soit

$$\mathcal{S} = \{2^k 3^\ell ; (k, \ell) \in \mathbb{N}^2\}.$$

Montrer que tout élément de $\mathbb{N}^*$ peut s'écrire $s_i + \cdots + s_m$ où $m \in \mathbb{N}^*$, où les s_i sont dans $\mathcal{S}$ et où, pour tout couple (i, j) d'éléments distincts de $\{1, \ldots, m\}$, s_i ne divise pas s_j.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}_k$ la propriété : k peut s'écrire $s_1 + \cdots + s_m$, où $m \in \mathbb{N}^*$ et les s_i sont dans $\mathcal{S}$ et où, pour tout couple (i, j) d'éléments distincts de $\{1, \ldots, m\}$, s_i ne divise pas s_j. On procède par récurrence forte.

Initialisation. La propriété $\mathcal{P}_1$ est immédiate car $1 = 2^0(3^0) = 1$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}_k$ soit vraie pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Si $n+1$ est pair, $\dfrac{n+1}{2}$ est entier et inférieur ou égal à n. Il s'écrit donc $s_1 + \cdots + s_m$, ou $m \in \mathbb{N}^*$ et les s_i sont dans $\mathcal{S}$ et où, pour tout couple (i, j) d'éléments distincts de $\{1, \cdots, m\}$, s_i ne divise pas s_j. Mais alors $n + 1 = 2s_1 + \cdots + 2s_m$. Les nombres $2s_i, 1 \leq i \leq m$, sont dans S, deux à deux distincts, et il n'existe pas de couples (i, j) d'éléments distincts de $\{1, \ldots, m\}$ tel que $2s_i$ divise $2s_j$ (car, pour un tel couple, s_i diviserait s_j).

Si $n+1$ est impair, soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $3^k \leq n + 1 < 3^{k+1}$. L'entier naturel $(n+1) - 3^k$ est pair. S'il est nul, $n + 1 = 3^k$ est sous la forme voulue. Sinon, on note que $n + 1 - 3^k$ est pair, et on applique l'hypothèse de récurrence à $\dfrac{n+1-3^k}{2}$, qui est bien dans $\mathbb{N}^*$ et majoré par n. On obtient

$$n + 1 = 2s_1 + \cdots + 2s_m + 3^k,$$

où $s_1, \ldots, s_m$ sont dans S et où, pour tout couple (i, j) d'éléments distincts de $\{1, \cdots, m\}$, s_i ne divise pas s_j. Les nombres $s'_1 := 2s_1, \cdots, s'_m := 2s_m$ et $s'_{m+1} := 3^k$ sont dans S et, pour tout couple (i, j) d'éléments distincts de $\{1, \ldots, m+1\}$, s'_i ne divise pas s'_j (en utilisant la propriété pour $s_1, \cdots, s_m$, et aussi parce que $s'_1, \ldots, s'_m$ sont pairs et strictement inférieurs à $3^k = s'_{m+1}$).

1.3 Le raisonnement par l'absurde

Exercice 17 (②) par Neil Sherman[*]

Soient a, b, c, d des nombres rationnels tels que

$$a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}\,.$$

Montrer que $a = c$ et $b = d$.

Si

$$a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2},$$

alors

$$a - c = \sqrt{2}(d - b).$$

Si $d \neq b$, alors en divisant par $d - b$ des deux côtés on obtient que

$$\sqrt{2} = \frac{a-c}{d-b}$$

est rationnel, ce qui est absurde. Donc $d = b$, puis $a = c$.

Exercice 18 (②) Par Neil Sherman[*]

Montrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel. Généraliser.

Une démonstration semblable à celle effectuée pour $\sqrt{2}$ dans le polycopié est possible, utilisant une disjonction de cas (divisibilité par 3). Cependant, on se propose de généraliser en montrant que, si $n \in \mathbb{N}^*$ n'est pas le carré d'un entier, $\sqrt{n}$ est irrationnel.

On raisonne par contraposition. Soient n dans $\mathbb{N}^*$ tel que $\sqrt{n}$ soit rationnel, $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$, et que la fraction $\frac{a}{b}$ soit irréductible.

Il s'ensuit que $nb^2 = a^2$ et donc $a^2|nb^2$. Or, comme $\frac{a}{b}$ fraction irréductible alors $\mathrm{PGCD}(a,b) = 1$ et donc $\mathrm{PGCD}(a^2, b^2) = 1$ (par exemple grâce à la décomposition en facteurs premiers : a et b n'ont pas de diviseur premier commun, donc a^2 et b^2 non plus).

D'après le lemme de Gauss on a donc $a^2|n$. Or $n|a^2$; comme n et a^2 sont dans $\mathbb{N}^*$, $n = a^2$.

Alors $b = 1$ et donc $\sqrt{n} = a \in \mathbb{N}$ et $n = a^2$ est un carré parfait.

Remarque. On pourra regarderla remarque 7 du paragraphe **12.6** du polycopié.

Exercice 19 (②) par Neil Sherman[*]

Montrer que $\dfrac{\ln(3)}{\ln(2)}$ est irrationnel.

Le nombre $\dfrac{\ln(3)}{\ln(2)}$ est positif. S'il était rationnel, on aurait $\dfrac{\ln(3)}{\ln(2)} = \dfrac{p}{q}, \quad (p,q) \in \mathbb{N}^{*2}$, alors

$$\ln(3)q = \ln(2)p.$$

Et donc

$$\exp(\ln(3)q) = \exp(\ln(2)p) \Longleftrightarrow 3^q = 2^p.$$

Ce qui est absurde car le premier membre est pair et le second impair.

Exercice 20 (②) par Neil Sherman[*]

a) Montrer que la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est irrationnelle.
b) Montrer que le produit d'un nombre rationnel non nul et d'un nombre irrationnel est irrationnel.
c) Trouver deux nombres irrationnels dont la somme soit rationnelle, deux nombres irrationnels dont la somme soit irrationnelle. Même question avec le produit.

a) Soit a un nombre rationnel : $a = \frac{p}{q}, \quad (p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et b un nombre irrationnel. Supposons $a+b$ rationnel : $a + b = \frac{p'}{q'}, \quad (p', q') \in \mathbb{R}^{*2}$. Alors
$$b = \frac{p'}{q'} - \frac{p}{q} = \frac{pq' - qp'}{q'q}.$$
Ce qui est absurde car b est un nombre irrationnel.

b) En utilisant les notations précédentes et en supposant ab rationnel, on a
$$b\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}.$$
Et donc
$$b = \frac{p'q}{q'p}.$$
Ce qui est absurde car b est un nombre irrationnel.

c) On peut proposer pour les sommes : $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$, et $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ irrationnel (exercice suivant). Pour les produits, $\sqrt{2}\sqrt{2} = 2$, et $\sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{6}$ marchent également.

Exercice 21 (②) par Neil Sherman[*]

Montrer que $\sqrt{6}$ est irrationnel, puis en déduire que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel.

Comme 6 n'est pas un carré parfait, $\sqrt{6}$ est irrationnel (exercice 18). Or
$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6}.$$
Si $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ était rationnel, il en serait de même de $\dfrac{(\sqrt{(2)} + \sqrt{3})^2 - 5}{2} = \sqrt{6}$, ce qui n'est pas. D'où le résultat.

1.4 Le raisonnement par analyse-synthèse

EXERCICE 22 (③) par Antonin Demairé [*]

Trouver les fonctions f de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables et telles que

$$\forall (x,y) \in {\mathbb{R}^{+*}}^2, \qquad f(xy) = f(x) + f(y)\,.$$

Analyse. Soit f une solution. En prenant $x = y = 1$, on a $f(1) = 2f(1)$, i.e. $f(1) = 0$

Fixons y et dérivons la relation de l'énoncé par rapport à x. Il vient $yf'(xy) = f'(x)$, ceci pour tout (x,y) de ${\mathbb{R}^{+*}}^2$. Prenons maintenant $x = 1$. On a, pour tout $y \in \mathbb{R}^{+*}$, $f'(y) = \frac{f'(1)}{y}$, donc, puisque $f(1) = 0$,

$$\forall y \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad f(y) = f'(1)\ \ln(y).$$

Ainsi, f est de la forme $y \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto a\ \ln(y)$ pour un certain réel a.

Synthèse. Si $a \in \mathbb{R}$, la fonction $y \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto a\ \ln(y)$ est dérivable et vérifie la relation de l'énoncé.

EXERCICE 23 (③) par Antonin Demairé [*]

On se propose de déterminer les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x+y) + f(x-y) = 2\left(f(x) + f(y)\right)\,.$$

Dans a) et b), f est une fonction solution.

a) Calculer $f(0)$. Montrer que f est paire.

b) Montrer que f'' est constante.

c) Conclure.

a) En prenant $x = y = 0$, on a $2f(0) = 4f(0)$, i.e. $f(0) = 0$
Maintenant, prenons $x = 0$. On a, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$f(0+y) + f(0-y) = 2(f(0) + f(y))$$

$$f(y) + f(-y) = 2f(y)$$

$$f(-y) = f(y)$$

La fonction f est paire.

b) Fixons y et dérivons deux fois la relation par rapport à x. Il vient

$$f''(x+y) + f''(x-y) = 2f''(x)$$

Comme f est paire, f' est impaire et f'' est paire. En prenant $x = 0$ dans la relation précédente, on a, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f''(y) = f''(0)$.

c) Par b), f est de la forme $x \in \mathbb{R} \mapsto ax^2 + bx + c$ où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Par a), on a $c = 0$ (car $f(0) = 0$), puis $b = 0$ (car f est paire). Il s'ensuit que f est de la forme $x \mapsto ax^2$ pour un certain nombre réel a.
Réciproquement, si $a \in \mathbb{R}$ et si

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = ax^2,$$

f est deux fois dérivable et, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} f(x+y) + f(x-y) &= a((x+y)^2 + (x-y)^2) = a(x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2xy + y^2) = 2a(x^2+y^2) \\ &= 2\ f(x) + f(y)) \end{aligned}$$

Exercice 24 (④) par Antonin Demairé [*]

Dans cet exercice, f est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x+y) = f(x) + f(y)\,.$$

a) Calculer $f(0)$ et montrer que f est impaire.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, calculer $f(nx)$ en fonction de n et $f(x)$.

c) Soit $a = f(1)$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{Q}, \quad f(x) = ax\,.$$

d) Expliquer pourquoi tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels.

e) Conclure que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ax.$$

a) On prend d'abord $x = y = 0$. On alors $f(0) = 2f(0)$, i.e. $f(0) = 0$

Puis on prend $y = -x$. Il vient $0 = f(0) = f(x) + f(-x)$, i.e. $f(-x) = -f(x)$.

b) On remarque que $f(nx) = f((n-1)x + x) = f((n-1)x) + f(x) = \cdots = nf(x)$, ce que l'on peut démontrer formellement en rédigeant une récurrence sur n.

c) Soit $a = f(1)$ *et* $x \in \mathbb{Q}$, $x = \dfrac{p}{q}$, $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Alors :

$$f(p) = f\left(q \times \frac{p}{q}\right) = q\,f\left(\frac{p}{q}\right) \quad \Rightarrow \quad f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}\,f(1).$$

d) Si $x \in \mathbb{R}$, on peut par exemple écrire $x = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ (troncature du développement décimal de x). Or, si $n \in \mathbb{N}$, le nombre réel $\dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ est rationnel.

e) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $(r_n)_{n\geq 0}$ une suite de rationnels telle que $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$ (une telle suite existe par la question précédente). Par continuité de f, on a $\lim\limits_{n\to\infty} f(r_n) = f(x)$. Mais, par la question c), on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(r_n) = ar_n$. Comme $(ar_n)_{n\geq 0}$ converge vers ax, il vient que $f(x) = ax$. Ainsi, f est linéaire.
On notera que c'est seulement à ce stade que l'on utilise la continuité de f.
Réciproquement, les fonctions linéaires sont bien solutions du problème posé.

2 Calculs algébriques

2.1 Généralités et rappels

Exercice 25 (①) par Neil Sherman[*]

Si a, b, c, d sont des nombres réels non nuls, simplifier les fractions

$$A = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}, \quad B = \frac{\frac{a}{b}}{c}, \quad C = \frac{a}{\frac{b}{c}}.$$

On a $A = \frac{ad}{bc}$, $\quad B = \frac{a}{bc}$, $\quad C = \frac{ac}{b}$.

Exercice 26 (①) par Neil Sherman[*]

a) Exprimer simplement $\ln(56) - \ln(7) + \ln(4)$.

b) Montrer que $\ln\left(\sqrt{216}\right) = \dfrac{3}{2}\ln(6)$.

c) Écrire le plus simplement possible $\ln(49) + \ln(21) - \ln(3\sqrt{7})$.

a)

$$\ln(56) - \ln(7) + \ln(4) = \ln(7(2^3)) - \ln(7) + \ln(2^2) = \ln(7) - \ln(7) + 3\ln(2) + 2\ln(2) = 5\ln(2).$$

b)

$$\ln\left(\sqrt{216}\right) = \ln\left(\sqrt{6^3}\right) = 3\ln\left(\sqrt{6}\right) = \frac{3}{2}\ln(6).$$

c)

$$\ln(49) + \ln(21) - \ln(3\sqrt{7}) = 2\ln(7) + \ln(3) + \ln(7) - \ln(3) - \frac{1}{2}\ln(7) = \frac{5}{2}\ln(7).$$

Exercice 27 (①) par Sailor Haddad[*]

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \dots, a_n$ des nombres réels, $b_1, \dots, b_n$ des nombres réels non nuls. On suppose que tous les nombres $\dfrac{a_i}{b_i}$, $1 \leq i \leq n$, sont égaux. Montrer que ces nombres sont également égaux à $\dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{b_1 + \cdots + b_n}$.

On note r la valeur commune des fractions. Nous avons donc pour tout i :

$$\frac{a_i}{b_i} = r \Leftrightarrow \frac{a_i}{r} = b_i$$

En sommant ces égalités pour i de 1 à n, nous avons :

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{r} = \sum_{i=1}^n b_i \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^n b_i} = r.$$

Exercice 28 (①) par Antonin Demairé [*]

Montrer que $2\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{2} + \sqrt{6}$.

On a

$$2\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{8+4\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2} = \sqrt{2} + \sqrt{6},$$

où la dernière égalité vient de $\sqrt{2} + \sqrt{6} \geq 0$.

Exercice 29 (①) par Karim Saad [*]

Soit $\mathbb{K}$ l'ensemble des nombres réels de la forme $a + b\sqrt{2}$ avec $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$. Montrer que, si x et y sont dans $\mathbb{K}$, il en est de même de $x - y$, xy et, si $x \neq 0$, de $\dfrac{1}{x}$.

Soient $x = a + b\sqrt{2}$ et $y = c + d\sqrt{2}$ avec $a, b, c, d)$ dans $\mathbb{Q}$. Alors

$$x - y = a + b\sqrt{2} - c - d\sqrt{2} = (a - c) + (b - d)\sqrt{2}, \quad (a - c, b - d) \in \mathbb{Q}^2.$$

Ainsi, $x - y$ est de la forme $A + B\sqrt{2}$ avec $(A, B) \in \mathbb{Q}^2$, donc $x - y \in \mathbb{K}$.

$$xy = \left(a + b\sqrt{2}\right)\left(c + d\sqrt{2}\right) = ac + ad\sqrt{2} + bc\sqrt{2} + 2bd = ac + 2bd + \sqrt{2}(ad + bc), \quad (ac + 2bd, ad + bc) \in \mathbb{Q}^2,$$

ce qui est aussi de la forme $A + B\sqrt{2}$ avec $(A, B) \in \mathbb{Q}^2$, donc $xy \in \mathbb{K}$.

Si $x \neq 0$, $(a, b) \neq (0, 0)$ et $a + b\sqrt{2} \neq 0$ (par exemple, exercice 17), donc :

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{(a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2})} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2}.$$

Ceci est égal, en utilisant la quantité conjuguée, à

$$\frac{a}{a^2 - 2b^2} - \frac{b}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2}, \quad \left(\frac{a}{a^2 - 2b^2}, \frac{b}{a^2 - 2b^2}\right) \in \mathbb{Q}^2.$$

Cette expression est encore de la forme $A + B\sqrt{2}$ avec $(A, B) \in \mathbb{Q}^2$, donc $\dfrac{1}{x} \in \mathbb{K}$.

EXERCICE 30 (①) par Tomás Jeria [*]

Soient x, y, z trois nombres réels, Vérifier que

$$(x + y + z)^3 - (x^3 + y^3 + z^3) = 3(x + y)(y + z)(z + x)$$

D'une part,

$$\begin{aligned}(x + y + z)^3 - (x^3 + y^3 + z^3) &= (x + y + z)(x + y + z)(x + y + z) - x^3 - y^3 - z^3 \\ &= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz) - x^3 - y^3 - z^3 \\ &= (x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz + 3xy^2 + 3yx^2 + 3xz^2 + 3zx^2 + 3yz^2 + 3zy^2) \\ &\qquad - x^3 - y^3 - z^3 \\ &= 6xyz + 3xy^2 + 3yx^2 + 3xz^2 + 3zx^2 + 3yz^2 + 3zy^2 \quad .\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}3(x + y)(y + z)(z + x) &= 3(xy + xz + y^2 + yz)(z + x) \\ &= 3(2xyz + yx^2 + xz^2 + zx^2 + zy^2 + xy^2 + yz^2) \\ &= 6xyz + 3xy^2 + 3yx^2 + 3xz^2 + 3zx^2 + 3yz^2 + 3zy^2 \quad .\end{aligned}$$

Donc : $(x + y + z)^3 - (x^3 + y^3 + z^3) = 3(x + y)(y + z)(z + x)$.

EXERCICE 31 (②) par Neil Sherman [*]

Soit n le produit de quatre éléments de $\mathbb{N}^*$ consécutifs. Montrer que $n + 1$ est le carré d'un entier.

On note $k, k + 1, k + 2, k + 3$ les entiers consécutifs dont n est produit. On a donc

$n+1 = k(k+1)(k+2)(k+3) = (k^2+k)(k^2+5k+6)+1 = k^4+6k^3+11k^2+6k+1 = k^4+6k^3+11k^2+6k+1.$

On remarque que $(k^2)^2 = k^4$ et $1^2 = 1$, ce qui conduit à chercher une factorisation de $n + 1$ de la forme :

$$(k^2 + ak + 1)^2 = n + 1$$

où a est une constante. Ce qui donne

$$n + 1 = k^4 + 2ak^3 + (2 + a^2)k^2 + 2ak + 1.$$

On voit que $a = 3$ convient. Ainsi

$$n + 1 = (k^2 + 3k + 1)^2,$$

et $n + 1$ est bien le carré d'une entier.

Exercice 32 (②) par Tomás Jeria [*]

Soient x et y deux nombres réels. En complétant un carré, donner une factorisation de x^4+4y^4.

Pour touts réels x et y, on a

$$\begin{aligned} x^4+4y^4 &= x^4+4y^4+4x^2y^2-4x^2y^2 \\ &= (x^2+2y^2)^2-4x^2y^2 \\ &= (x^2+2y^2)^2-(2xy)^2 \\ &= (x^2+2y^2+2xy)(x^2+2y^2-2xy)\,. \end{aligned}$$

Exercice 33 (③) par François Saint-Jean [*]

Soit

$$a = \sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{152}{27}}} - \sqrt[3]{-1+\sqrt{\frac{152}{27}}}\,.$$

Montrer que a^3+5a est un nombre entier.

Méthode 1 On pose $X = \sqrt{\frac{152}{27}}$. On a donc

$$a = \sqrt[3]{1+X} - \sqrt[3]{-1+X}.$$

Ainsi

$a^3 = (\sqrt[3]{1+X}-\sqrt[3]{-1+X})^3 = (1+X)-(-1+X)+(-3)(\sqrt[3]{1+X})^2\sqrt[3]{-1+X}+3\sqrt[3]{-1+X})^2\sqrt[3]{1+X}.$

En mettant sous la même racine et en factorisant par identité remarquable, on obtient :

$a^3 = 2-3(\sqrt[3]{(X^2-1)(X+1)})+3(\sqrt[3]{(X^2-1)(X-1)}) = 2+3\sqrt[3]{X^2-1}(-\sqrt[3]{1+X}+\sqrt[3]{-1+X}).$

Or, $a = \sqrt[3]{1+X} - \sqrt[3]{-1+X}$, donc

$$a^3 = 2-3\sqrt[3]{X^2-1}(\sqrt[3]{1+X}-\sqrt[3]{-1+X}) = 2-3\sqrt[3]{X^2-1}\,a.$$

Or $5a = 5(\sqrt[3]{1+X}-\sqrt[3]{-1+X})$, donc

$$a^3+5a = 2-3\sqrt[3]{X^2-1}\,a+5(\sqrt[3]{1+X}-\sqrt[3]{-1+X}) = 2-(3\sqrt[3]{X^2-1}-5)a.$$

En remplaçant X par sa valeur,

$$a^3+5a = 2-\left(3\sqrt[3]{\frac{152}{27}-1}-5\right)a = 2-\left(3\sqrt[3]{\frac{125}{27}}-5\right)a = 2-\left(3\sqrt[3]{\frac{5^3}{3^3}}-5\right)a = 2-3\left(\frac{5}{3}-5\right)a = 2.$$

Ainsi,

$$a^3+5a = 2, \quad 2\in\mathbb{N}.$$

Méthode 2 On étudie l'expression :

$$A = \Big(\sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{152}{32}}}\Big)^3 - \Big(\sqrt[3]{-1+\sqrt{\frac{152}{32}}}\Big)^3$$

D'un côté, en simplifiant :

$$A = (1+\sqrt{\frac{152}{27}}) - (-1+\sqrt{\frac{152}{27}}) = 2$$

D'un autre, en factorisant :

$$\begin{aligned}
A &= \Big(\sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{152}{32}}} - \sqrt[3]{-1+\sqrt{\frac{152}{32}}}\Big)\Big(\Big(\sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{152}{32}}}\Big)^2 + \sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{152}{32}}}\sqrt[3]{-1+\sqrt{\frac{152}{32}}} + \Big(\sqrt[3]{-1+\sqrt{\frac{152}{32}}}\Big)^2\Big) \\
&= a\Big(\Big(\sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{152}{32}}} - \Big(\sqrt[3]{-1+\sqrt{\frac{152}{32}}}\Big)^2\Big)^2 + 3\sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{152}{32}}}\sqrt[3]{-1+\sqrt{\frac{152}{32}}}\Big) \\
&= a\Big(a^2 + 3\sqrt[3]{\Big(1+\sqrt{\frac{152}{32}}\Big)\Big(-1+\sqrt{\frac{152}{32}}\Big)}\Big) \\
&= a\Big(a^2 + 3\sqrt[3]{\frac{152}{27}-1}\Big) \\
&= a\Big(a^2 + 3\sqrt[3]{\frac{125}{27}}\Big) \\
&= a\Big(a^2 + 3\frac{5}{3}\Big) \\
&= a^3 + 5a
\end{aligned}$$

On a donc bien finalement :

$$a^3 + 5a = A = 2 \in \mathbb{N}$$

EXERCICE 34 (③) par François Saint-Jean [$*$]

Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, soit

$$E = x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2\,.$$

Factoriser E en un produit de quatre facteurs.

On remarque que $(x^2 + y^2 - z^2)^2 = x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2z^2y^2$, ce qui est presque E. On a donc

$$E = x^4+y^4+z^4+2x^2y^2-2x^2z^2-2z^2y^2-4x^2y^2 = (x^2+y^2-z^2)^2-4x^2y^2 = (x^2+y^2-z^2)^2-(2xy)^2.$$

En utilisant l'indentité remarquable $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, il vient

$$E = (x^2+y^2-z^2)^2-(2xy)^2 = (x^2+y^2+2xy-z^2)(x^2+y^2-2xy-z^2) = ((x+y)^2-z^2)((x-y)^2-z^2).$$

En utilisant la même identité remarquable que précédemment, on obtient

$$E = (x + y + z)(x + y - z)(x - y - z)(x - y + z)$$

EXERCICE 35 (④) par Octave Koenig [$*$]

a) Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $(x + 3)^2 + x^2 - (x + 1)^2 - (x + 2)^2$.

b) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{Z}$, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m) \in \{-1, 1\}^m$ tel que

$$x = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i i^2\,.$$

a) Soit $P : x \in \mathbb{R} \longmapsto (x+3)^2+x^2-(x+1)^2-(x+2)^2$. En développant et simplifiant, on constate que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = 4$.

b) En notant k le quotient de la division euclidienne de x par 4, on a, grâce à a), le tableau suivant, qui répond à la question.

$x \equiv \quad [4]$	0	1	2	3
$x =$	$\sum_{i=1}^{k} P(i)$	$1^2 + \sum_{i=2}^{k+1} P(i)$	$-1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 + \sum_{i=5}^{k} P(i)$	$-1^2 + 2^2 + \sum_{i=3}^{k+2} P(i)$

2.2 le symbole $\sum$

Exercice 36 (①) par Tomás Jeria [∗]

Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Donner une expression simple de la somme $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$ des n premiers entiers impairs.

On utilise la linéarité de la somme pour simplifier l'expression :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(2k-1) &= 2\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1\\ &= \frac{2n(n+1)}{2} - n\\ &= n^2 + n - n\\ &= n^2.\end{aligned}$$

Exercice 37 (②) par Tomás Jeria [∗]

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle. On suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{n^2+n}{3}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer u_n.

- Si $n \in \mathbb{N}^*$, alors
$$\begin{aligned}\frac{n^2+n}{3} &= \sum_{k=0}^{n} u_k\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} u_k + u_n\\ &= \frac{(n-1)^2+(n-1)}{3} + u_n\end{aligned}.$$
Donc, $u_n = \dfrac{n^2+n-(n-1)^2-(n-1)}{3} = \dfrac{2n}{3}$
- Si $n = 0$, la supposition devient $u_0 = 0$, et on constate que $\dfrac{2n}{3} = 0$.

Donc, pour $n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{2n}{3}$

Exercice 38 (③) par Léo Baciocchi [∗]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On trace la table de multiplication des entiers entre 1 et n. On obtient donc un tableau carré comportant n^2 entiers naturels. Quelle est la moyenne de ces entiers ?

On représente les tables de multiplication de la façon suivante :

Tables de multiplication					Somme de la ligne
Table de 1	1	2	...	n	$\frac{n(n+1)}{2}$
Table de 2	2	4	...	$2n$	$\sum_{i=1}^{n}(2i) = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2}$
...	...	...	...	...	...
Table de n	n	$2n$	...	n^2	$\sum_{i=1}^{n}(n \cdot i) = n \cdot \frac{n(n+1)}{2}$
Somme totale S_n					$\left(\sum_{i=1}^{n} i\right) \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Il ne nous reste plus qu'à calculer la moyenne M_n :
Puisqu'il y a exactement n^2 termes, on a :

$$M_n = \frac{S_n}{n^2} = \frac{(n+1)^2}{4}$$

EXERCICE 39 (①) par Léo Baciocchi [$*$]

Soit $x \in]-1,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k$. Montrer que

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-x}.$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

Or, $x \in]-1,1[$, donc $\lim_{n\to+\infty} x^n = 0$, et par suite,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^{n+1}-1}{x-1} = \frac{-1}{x-1} = \frac{1}{1-x}$$

EXERCICE 40 (③) par Tomás Jeria [$*$]

a) En utilisant la formule de la progression géométrique et la dérivation, calculer, pour x réel et n dans $\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n} kx^k.$$

On distinguera le cas $x = 1$.

b) Si $x \in]-1,1[$, déterminer la limite de la somme précédente lorsque n tend vers $+\infty$.

a) • Si $x = 1$, alors

$$\sum_{k=0}^{n} kx^k = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- Pour $k \in \mathbb{N}$, notons f_k la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_k(x) = x^k$. Alors
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} kx^k &= x\sum_{k=0}^{n} kx^{k-1}\\ &= x\sum_{k=0}^{n} f_k'(x)\,.\end{aligned}$$
D'autre part,
$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$
Or, la dérivée est une application linéaire, c'est-à-dire que la somme des dérivées est la dérivée de la somme. Donc :
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} kx^k &= x\sum_{k=0}^{n} f_k'(x)\\ &= x\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)'(x)\\ &= x\left[\frac{(n+1)x^n(x-1)-x^{n+1}-1}{(x-1)^2}\right]\\ &= x\left[\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}\right]\\ &= \frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(x-1)^2}\,.\end{aligned}$$

EXERCICE 41 (②) par Léo Baciocchi [∗]

On pose, pour n dans $\mathbb{N}^*$: $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$. Simplifier $u_{n+1} - u_n$ et en déduire la monotonie de $(u_n)_{n\geq 1}$.

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=n+1}^{2(n+1)} \frac{1}{k} - \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}\\ &= \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \left(\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1}\right)\\ &= \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n}\end{aligned}$$
Or, $\dfrac{1}{2n+2} + \dfrac{1}{2n+1} \leqslant 2\cdot\dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{n}$, et par suite, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, la suite est donc décroissante.

EXERCICE 42 (②) par Léo Baciocchi [∗]

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer en fonction de n la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n^2} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor$.

Soit $a \in [\![1, n-1]\!]$. Résolvons l'équation d'inconnue k : $\left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor = a$

$$\left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor = a \underbrace{\iff}_{\text{définition de la partie entière}} a^2 \leqslant k < (a+1)^2 \iff k \in [\![a^2; (a+1)^2-1]\!] \iff k \in [\![a^2; a^2+2a]\!].$$

Or, Card $\left(⟦a^2; a^2+2a⟧\right) = 2a+1$, donc :

$$\begin{aligned} S_n &= n + \sum_{k=1}^{n-1} (2k+1)\cdot k \\ &= 2\cdot \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k + n \\ &= 2\cdot \frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6} + \frac{(n-1)\cdot n}{2} + n = \frac{n\left(4n^2-3n+5\right)}{6} \end{aligned}$$

Exercice 43 (③) par Léo Baciocchi [*]

On note H_n le n-ième nombre harmonique, introduit dans l'exemple 5 ci-dessus. Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$,

$$\sum_{k=1}^{n-1} H_k = nH_n - n\,.$$

Montrons par récurrence que tout $n \geq 2$ vérifie la propriété $\mathcal{P}_n$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} H_k = nH_n - n$.

Initialisation : Pour $n = 2$, $H_2 = \frac{3}{2}$ et :

$$H_1 = 1 = 2\cdot H_2 - 2$$

Hérédité : Soit $n \geqslant 2$, supposons que $\mathcal{P}_n$ soit vraie et montrons qu'alors $\mathcal{P}_{n+1}$ est également vraie.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} H_k &= \sum_{k=1}^{n-1} H_k + H_n \\ &\underbrace{=}_{\text{par HR}} nH_n - n + H_n \\ &= H_n(n+1) - n \\ &= \left(H_{n+1} - \frac{1}{n+1}\right)\cdot(n+1) - n \\ &= H_{n+1}\cdot(n+1) - (n+1) \end{aligned}$$

Exercice 44 (④) par François Saint-Jean [*]

Trouver les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ de nombres réels strictement positifs telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} {u_k}^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right)^2.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}(u_k)^3 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} u_k\right)^2 \quad & \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} u_k^3 + u_{n+1}^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} u_k + u_{n+1}\right)^2 \\
& \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} u_k^3 + u_{n+1}^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right)^2 + 2u_{n+1}\sum_{k=1}^{n} u_k + (u_{n+1})^2 \\
& \Longrightarrow u_{n+1}^3 = 2u_{n+1}\sum_{k=1}^{n} u_k + (u_{n+1})^2 \\
& \Longrightarrow u_{n+1}^3 = u_{n+1}\left(2\sum_{k=1}^{n} u_k + u_{n+1}\right) \\
& \Longrightarrow u_{n+1}^2 = 2\sum_{k=1}^{n} u_k + u_{n+1} \quad \text{car } u_{n+1} \neq 0 \\
& \Longrightarrow \frac{u_{n+1}\left(u_{n+1}-1\right)}{2} = \sum_{k=1}^{n} u_k
\end{aligned}$$

Remarquons ici que $\dfrac{N'(N'-1)}{2} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ avec $N' = u_{n+1}$ ressemble fortement à la formule bien connue :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

En effectuant un changement d'indice, on a, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{u_n\left(u_n-1\right)}{2} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} u_k$

Or, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} u_k + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ donc :

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{l} \dfrac{u_{n+1}\left(u_{n+1}-1\right)}{2} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k \\ \dfrac{u_n\left(u_n-1\right)}{2} + u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k \end{array}\right. \quad & \Longleftrightarrow \quad u_{n+1}\left(u_{n+1}-1\right) = u_n\left(u_n-1\right) + 2u_n \\
& \Longleftrightarrow \quad u_{n+1}\left(u_{n+1}-1\right) = u_n\left(u_n+1\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{u_n\left(u_n-1\right)}{2}$.

On a donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
u_{n+1}\left(u_{n+1}-1\right) = u_n\left(u_n+1\right) \quad & \Longrightarrow \quad u_{n+1}^2 - u_{n+1} = u_n^2 + u_n \\
& \Longrightarrow \quad u_{n+1}^2 - u_n^2 = u_{n+1} + u_n \\
& \Longrightarrow \quad (u_{n+1}-u_n)(u_{n+1}+u_n) = u_n + u_{n+1} \\
& \Longrightarrow \quad u_{n-1} - u_n = 1,
\end{aligned}$$

où la dernière implication vient du fait que $u_n + u_{n+1}$ est non nul car strictement positif. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est donc arithmétique de raison 1.

Comme $u_1^3 = u_2^2$, $u_1 = 1$ ou $u_1 = 0$.

La seconde possibilité est exclue. Donc $u_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = 1 + (n-1) = n$$

On vérifie réciproquement que cette suite convient (cf. exercice 1), afin de conclure que la seule suite respectant les conditions de l'énoncé est la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = n$$

Remarque. Il est également possible de se convaincre du résultat en calculant les premiers termes, puis de le démontrer par récurrence.

2.3 Complément : sommes télescopiques

EXERCICE 45 (③) par Tomás Jeria [*]

a) Si a est dans $\mathbb{N}^*$, simplifier la somme

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right).$$

Quelle est la limite de cette expression lorsque n tend vers $+\infty$?

b) Si n est un entier ≥ 2, simplifier la somme

$$\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right).$$

Quelle est la limite de cette expression lorsque n tend vers $+\infty$?

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) \\
&= \ln(n+1) - \ln(1) \\
&= \ln(n+1)
\end{aligned}.$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = +\infty$.

b)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) &= \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) \\
&= \sum_{k=2}^{n} \left(\ln(k^2-1) - \ln(k^2)\right) \\
&= \sum_{k=2}^{n} (\ln(k+1) + \ln(k-1) - 2\ln(k)) \\
&= \sum_{k=2}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) - \sum_{k=2}^{n} (\ln(k) - \ln(k-1)) \\
&= \ln(n+1) - \ln(2) - (\ln(n) - \ln(1)) \\
&= \ln\left(\frac{n+1}{2n}\right) \\
&= \ln\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{2}\right)
\end{aligned}.$$

Donc, par continuité de ln, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = -\ln(2)$

EXERCICE 46 (④) par Antonin Demairé [*]

Déterminer trois réels a, b, c tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2\}, \qquad \frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}.$$

En déduire, pour n dans $\mathbb{N}^*$ une expression simple de

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$$

Quelle est la limite de $(U_n)_{n\geq 1}$ lorsque n tend vers $+\infty$?

La relation s'écrit

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2\}, \qquad 1 = a(x+1)(x+2) + bx(x+2) + cx(x+1),$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2\}, \qquad (a+b+c)x^2 + (3a+2b+c)x + (2a+2b+c-1) = 0.$$

Par identification (explication dans le chapitre du polycopié relatif aux polynômes), ceci équivaut à

$$a+b+c = 0, \quad 3a+2b+c = 0, \quad 2a+2b+c = 1.$$

La résolution du système montre que la seule solution est

$$(a, b, c) = (\frac{1}{2}, -1, c = \frac{1}{2}).$$

On écrit alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k} + \frac{-1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)} \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2(n+2)} - \frac{1}{2(n+1)} \longrightarrow \frac{1}{4}$$

Remarque. On généralisera le calcul de (a, b, c) en MPSI et PCSI (décomposition en éléments simpes).

EXERCICE 47 (③) par Tomás Jeria [*]

a) Trouver trois réels a, b, c tels que, si :

$$P : x \in \mathbb{R} \longmapsto ax^3 + bx^2 + cx$$

on ait

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) - P(x-1) = x^2.$$

En déduire une expression simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$

b) Adapter cette méthode pour calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$

a) Pour tout réel x, on a

$$\begin{aligned} P(x) - P(x-1) &= ax^3 + bx^2 + cx - a(x-1)^3 - b(x-1)^2 - c(x-1) \\ &= ax^3 + bx^2 + cx - a(x^3 - 3x^2 + 3x + -1) - b(x^2 - 2x + 1) - cx + c \\ &= 3ax^2 + (-3a + 2b)x + (a - b + c). \end{aligned}$$

Par identification, pour que $P(x) - P(x-1) = x^2$, il est nécessaire est suffisant que

$$\begin{cases} 3a & = 1 \\ -3a + 2b & = 0 \\ a - b + c & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a & = \frac{1}{3} \\ 2b - 1 & = 0 \\ \frac{1}{3} - b + c & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{6} \end{cases}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} (P(k) - P(k-1)) \\
&= P(n) - P(0) \\
&= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.
\end{aligned}$$

b) Soit $Q : x \in \mathbb{R} \longmapsto ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$ pour quatre réels a, b, c, d.
Pour tout réel x, on a

$$\begin{aligned}
Q(x) - Q(x-1) &= ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx - a(x-1)^4 - b(x-1)^3 - c(x-1)^2 - d(x-1) \\
&= ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx - a(x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1) \\
&- b(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) - c(x^2 - 2x + 1) - dx + d \\
&= 4ax^3 + 3(-2a + b)x^2 + (4a - 3b + 2c)x + (-a + b - c + d).
\end{aligned}$$

Par identification, pour que $Q(x) - Q(x-1) = x^3$, il est nécessaire est suffisant que

$$\begin{cases} 4a & = 1 \\ -2a + b & = 0 \\ 4a - 3b + 2c & = 0 \\ -a + b - c + d & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a & = \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} + b & = 0 \\ 1 - 3b + 2c & = 0 \\ -\frac{1}{4} + b - c + d & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = \frac{1}{2} \\ 1 - \frac{3}{2} + 2c = 0 \\ -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - c + d = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{4} \\ d = 0 \end{cases}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} (Q(k) - Q(k-1)) \\
&= Q(n) - Q(0) \\
&= \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 \\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

EXERCICE 48 (③) par Tomás Jeria [*]

Soient $(v_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle, a un réel différent de 0 et de 1, $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + v_n.$$

On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u'_n = \frac{u_n}{a^n}.$$

a) Si $n \in \mathbb{N}$, simplifier $u'_{n+1} - u'_n$

b) En déduire une expression sommatoire de u'_n, puis de u_n.

a) Pour tout entier naturel n,

$$u'_{n+1} - u'_n = \frac{u_{n+1}}{a^{n+1}} - \frac{u_n}{a_n} = \frac{(au_n + v_n) - au_n}{a^{n+1}} = \frac{v_n}{a^{n+1}}.$$

b) D'une part

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(u'_{k+1} - u'_k\right) = u'_n - u'_0 \quad \Longrightarrow \quad u'_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(u'_{k+1} - u'_k\right) + u'_0.$$

D'autre part,

$$\sum_{k=0}^{n-1} u'_{k+1} - u'_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{v_k}{a^{k+1}}.$$

Donc

$$u'_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{v_k}{a^{k+1}} + u'_0\,.$$

En remarquant que $u'_0 = \dfrac{u_0}{a^0} = u_0$,

$$u_n = a^n u'_n = a^n u'_0 + a^n \sum_{k=0}^{n-1} v_k a^{-k-1} = a^n u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} v_k a^{n-k-1}.$$

Exercice 49 (②) par Antonin Demairé [*]

Donner une forme simple de

$$\sum_{k=1}^{n} (k \times k!).$$

On pourra utiliser l'égalité :

$$k \times k! = (k+1)! - k!.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on transforme la somme proposée en somme téléscopique :

$$\sum_{k=1}^{n} (k \times k!) = \sum_{k=1}^{n} ((k+1)! - k!) = (n+1)! - 1$$

Exercice 50 (②) par Antonin Demairé [*]

Par une méthode analogue à celle de l'exercice précédent, donner une formule simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$.

On remarque que

$$\frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$$

On a alors une somme télescopique

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

EXERCICE 51 (③) par Tomás Jeria [*]

Pour j dans $\mathbb{N}^*$ et x dans $\mathbb{R}$, on pose :

$$H_j(x) = x(x+1)\dots(x+j-1)\,.$$

a) Pour j dans $\mathbb{N}^*$ et x dans $\mathbb{R}$, calculer $H_{j+1}(x) - H_{j+1}(x-1)$.

b) En déduire, pour j et n dans $\mathbb{N}^*$, la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} H_j(x)$.

c) Retrouver les sommes $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$ à l'aide de la question b).

a) Soient $k \in [\![0, j]\!]$ et $p = k-1$,

$$\begin{aligned}
H_{j+1}(x) - H_{j+1}(x-1) &= \prod_{k=0}^{j}(x+k) - \prod_{k=0}^{j}(x-1+k) \\
&= \prod_{k=0}^{j}(x+k) - \prod_{p=-1}^{j-1}(x+p) \\
&= (x+j)\prod_{k=0}^{j-1}(x+k) - (x-1)\prod_{p=0}^{j-1}(x+p) \\
&= \prod_{k=0}^{j-1}(x+k)\,((x+j)-(x-1)) \\
&= (j+1)\;H_j(x)\,.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} H_j(k) &= \frac{1}{j+1}\sum_{k=1}^{n}(H_{j+1}(k) - H_{j+1}(k-1)) \\
&= \frac{1}{j+1}(H_{j+1}(n) - H_{j+1}(0)) \\
&= \frac{1}{j+1}H_{j+1}(n)\,.
\end{aligned}$$

c) • En constatant que $H_2(k) - k = k(k+1) - k = k^2$, on trouve que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} H_2(k) - k \\
&= \frac{1}{3}H_3(n) - \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) - \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,.
\end{aligned}$$

- De même,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} H_3(k) - 3k^2 - 2k \\
&= \frac{1}{4}H_4(n) - \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} - n(n+1) \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} - n(n+1) \\
&= \frac{n(n+1)}{4}((n+2)(n+3) - 2(2n+1) - 4) \\
&= \frac{n(n+1)}{4}(n^2+n) \\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 .
\end{aligned}$$

EXERCICE 52 (④) par François Saint-Jean [*]

Soient n et r deux entiers naturels tels que $r \leq n$,

$$S_{r,n} = \sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r}.$$

a) En utilisant la relation de Pascal :

$$\binom{k+1}{r+1} = \binom{k}{r} + \binom{k}{r+1},$$

valable pour k et n dans $\mathbb{N}$ avec $r+1 \leq k$, exprimer $S_{r,n}$ comme un coefficient binomial.

b) Retrouver le résultat obtenu en employant un raisonnement combinatoire.

a) Nous savons que pour k et n dans $\mathbb{N}$, avec $r+1 \leqslant k$,

$$\binom{k}{r} = \binom{k+1}{r+1} - \binom{k}{r+1}.$$

Ainsi, avec $r \geqslant 0$,

$$\sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} = \sum_{k=r}^{n} \binom{k+1}{r+1} - \sum_{k=r-1}^{n-1} \binom{k+1}{r+1}.$$

Ce qui donne

$$\sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} = \sum_{k=r}^{n-1} \binom{k+1}{r+1} + \binom{n+1}{r+1} - \sum_{k=r}^{n-1} \binom{k+1}{r+1} - \binom{r-1+1}{r+1}.$$

Ce qui est égal à

$$\binom{n+1}{r+1} - \binom{r}{r+1}.$$

De plus, pour $r \in \mathbb{N}$, $\binom{r}{r+1} = 0$. On en conclut que

$$S_{k,n} = \sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$

b) Notons E_k la partie de $\mathcal{P}_{r+1}(\llbracket 1, n+1 \rrbracket)$ constituée des parties de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ de cardinal $r+1$ de plus grand élément égal à k. On a alors

$$\mathcal{P}_{r+1}\left(\llbracket 1, n+1 \rrbracket\right) = \bigcup_{k=r}^{n} E_{k+1},$$

et cette union est évidemment disjointe. Par conséquent :

$$\text{Card } \left(\mathcal{P}_{r+1}\left(\llbracket 1, n+1 \rrbracket\right)\right) = \sum_{k=r}^{n} \text{Card } \left(E_{k+1}\right).$$

Or, pour chaque $k \in \llbracket p, n \rrbracket$, les éléments de E_{k+1} sont les

$$\{k+1\} \cup X,$$

avec X parcourant $\mathcal{P}_r\left(\llbracket 1, k \rrbracket\right)$. De ce fait :

$$\forall k \in \llbracket p, n \rrbracket, \qquad \text{Card } \left((E_{k+1}\right) = \binom{k}{r}.$$

On retrouve ainsi la formule :

$$\binom{n+1}{r+1} = \sum_{k=r}^{n} \binom{k}{p}.$$

2.4 Le symbole $\prod$

Exercice 53 (①) par Antonin Demairé [$*$]

a) Pour n dans $\mathbb{N}^*$, simplifier le produit

$$A_n = \prod_{k=1}^{n} 4^{k^2+1}.$$

b) Pour n dans $\mathbb{N}^*$, simplifier le produit

$$B_n = \prod_{k=0}^{n} \frac{k+4}{k+3}.$$

a)

$$\prod_{k=1}^{n} 4^{k^2+1} = 4^{\sum\limits_{k=1}^{n} k^2+1} = 4^{\frac{6n+n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

b)

$$\prod_{k=0}^{n} \frac{k+4}{k+3} = \frac{n+4}{3}$$

Exercice 54 (②) par Léo Baciocchi [$*$]

Quel est le produit des n^2 entiers apparaissant dans la table de multiplication des entiers entre 1 et n ?

On représente les tables de multiplication de la façon suivante :

Tables de multiplication					Produit de la ligne
Table de 1	1	2	...	n	$n!$
Table de 2	2	4	...	$2n$	$\prod_{i=1}^{n}(2i) = 2^n \cdot n!$
...	...	...	...	...	...
Table de n	n	$2n$	...	n^2	$\prod_{i=1}^{n}(n \cdot i) = n^n \cdot n!$
Produit total ($*$)					$(n!)^{2n}$

Démonstration de $(*)$: Soit P_n le produit total. Il suffit de constater que

$$P_n = \prod_{i=1}^{n}(i^n \cdot n!) = (n!)^n \cdot \prod_{i=1}^{n} i^n = (n!)^n \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} i\right)^n = (n!)^n \cdot (n!)^n = (n!)^{2n}$$

EXERCICE 55 (③) par Tomás Jeria [$*$]

Pour $n \geq 2$, donner une expression simple de

$$C_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

et trouver la limite de la suite $(C_n)_{n\geq 2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Pour $n \geq 2$, on a

$$\begin{aligned}
\ln(C_n) &= \ln\left(\prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)\right) \\
&= \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \\
&= \ln\left(\frac{n+1}{2n}\right). && \text{(cf. Exercice 45)}
\end{aligned}$$

Donc, finalement, $C_n = \dfrac{n+1}{2n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} C_n = \dfrac{1}{2}$.

3 Inégalités, inéquations, trinôme du second degré réel

3.1 Inégalités, encadrements, inéquations du premier degré

EXERCICE 56 (①) par Tristan Hottier [$*$]

Soient a, b deux nombres réels, a', b', m, n quatre nombres réels strictement positifs tels que $\dfrac{a}{a'} > \dfrac{b}{b'}$. Montrer que

$$\frac{b}{b'} < \frac{ma+nb}{ma'+nb'} < \frac{a}{a'}.$$

Commençons par noter que, si $\dfrac{a}{a'} > \dfrac{b}{b'}$ alors $ab' > a'b \quad (i)$ (multiplication de l'inégalité par $a'b' > 0$).
On a alors d'une part :

$$\frac{a}{a'} - \frac{ma+nb}{ma'+nb'} = \frac{n\,(ab'-a'b)}{a'\,(ma'+nb')} > 0 \quad \text{d'après } (i).$$

Et d'autre part :

$$\frac{b}{b'} - \frac{ma+nb}{ma'+nb'} = \frac{n\,(a'b-ab')}{b'\,(ma'+nb')} < 0 \quad \text{d'après } (i).$$

Ainsi, $\dfrac{a}{a'} > \dfrac{ma+nb}{ma'+nb'}$ et $\dfrac{b}{b'} < \dfrac{ma+nb}{ma'+nb'}$.

EXERCICE 57 (②) par Léo Baciocchi [$*$]

Soient a, b, c des éléments de $]0,1]$.

a) Montrer que $(ab-1)(bc-1)(ca-1) \leq 0$.

b) En déduire que

$$a+b+c+\frac{1}{abc} \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+abc\,.$$

a) On a $ab, ac\,\text{et}\,bc \leqslant 1$, donc $(ab-1) \leqslant 0, (ac-1) \leqslant 0$ et $(bc-1) \leqslant 0$. Puisque le produit de 3 nombres négatifs est toujours négatif, on a bien $(ab-1)(bc-1)(ca-1) \leqslant 0$.

b) On développe :

$$\begin{aligned}(ab-1)(bc-1)(ca-1) \leqslant 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad a^2b^2c^2 - ab^2c - a^2bc - abc^2 - 1 + ab + bc + ac \leqslant 0\\ &\Longleftrightarrow \quad (abc)^2 + ab + ac + bc \leqslant a^2bc + ab^2c + abc^2 + 1.\end{aligned}$$

Comme $abc > 0$, on peut diviser par abc et obtenir :

$$a+b+c+\frac{1}{abc} \geqslant \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+abc.$$

Exercice 58 (②) Par Lancelot Achour[$*$]

Soient x et y deux éléments de $]-1,1[$. Montrer que le nombre réel $z = \dfrac{x+y}{1+xy}$ appartient à $]-1,1[$.

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des couples $(x,y) \in]-1;1[^2$ solutions de l'inéquation à démontrer. Remarquons que $\mathcal{S}$ est non vide car $(0,0)$ est solution. On raisonne par équivalence pour simplifier l'inégalité à montrer. Soit $(x,y) \in \mathcal{S}$ On a :

$$\begin{aligned}-1 < \frac{x+y}{1+xy} < 1 &\Longleftrightarrow \left|\frac{x+y}{1+xy}\right| < 1\\ &\Longleftrightarrow (x+y)^2 < (1+xy)^2\\ &\Longleftrightarrow 0 < (1+xy)^2 - (x+y)^2.\end{aligned}$$

Mais $(1+xy)^2-(x+y)^2 = 1+2xy+(xy)^2-x^2-2xy-y^2 = 1+(xy)^2-x^2-y^2 = (x-1)(y-1)$. Il faut donc montrer que :

$$0 < (x-1)(y-1),$$

ce qui est naturel, car x et y sont des éléments de $]-1;1[$. D'où $\mathcal{S} =]-1;1[$, ce qu'il fallait obtenir.

Remarque : En utilisant un raisonnement identique, on peut montrer que pour $c \in \mathbb{R}_+^*$

$$\forall (x,y) \in]-c;c[, \quad -c < \frac{x+y}{1+xy/c^2} < c,$$

qui s'interprète comme la loi de composition des vitesses en relativité restreinte.

Exercice 59 (②) par Jean Maltère [$*$]

a) Quels ensembles décrivent respectivement x^2 et x^3 lorsque x décrit l'intervalle $[-2,+\infty[$?

b) Quel ensemble décrit $\dfrac{1}{x}$ lorsque x décrit $]-4,5] \setminus \{0\}$?

a)
- La fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$, donc sur $[2,+\infty[$. Elle est positive, continue et tend vers $+\infty$ en $+\infty$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, x^2 décrit $[0,+\infty[$.
- La fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc sur $[-2,+\infty[$, continue et tend vers $+\infty$ en $+\infty$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, x^3 décrit $[f(-2),+\infty[= [-8,+\infty[$.

b) La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est définie et continue et strictement décroissante sur chacun des intervalles $]-4,0[$ et $]0,5]$ (mais elle ne l'est pas sur leur réunion !). Cette fonction est continue, tend vers $-\infty$ en 0^-, vers $+\infty$ en 0^+, vers $-\frac{1}{4}$ en -4 et vers $\frac{1}{5}$ en 5. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\dfrac{1}{x}$ décrit $\left]-\infty,-\dfrac{1}{4}\right[\cup \left[\dfrac{1}{5},+\infty\right[= \mathbb{R} \setminus \left[-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{5}\right[$.

EXERCICE 60 (②) par Jean Maltère [*]

a) Quels ensembles décrivent respectivement $x+y, xy, \dfrac{x}{y}$ lorsque x décrit $[-2,+\infty[$ et y décrit $[2,+\infty[$?

b) Même question lorsque x décrit $[-1,+\infty[$ et y décrit $]-\infty,3]$.

---

a) Si $x \geq -2$ et $y \geq 2$,

$$x+y \geq 0.$$

Réciproquement, si $z \in [0,+\infty[$, $z+2$ décrit $[2,+\infty[$: donc $z = -2+y$ avec $y \in [2,+\infty[$, ce qui prouve que $x+y$ décrit $[0,+\infty[$.
En prenant $y=2$, $xy = 2x$ décrit $]-4,+\infty[$. En prenant $x=-1$, $xy=-y$ décrit $]-\infty,-2]$, donc lorsque x décrit $[-2,+\infty[$ et y décrit $[2,+\infty[$, xy décrit $]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$.
Prenons $y=2$. Lorsque x décrit $\mathbb{R}^+$, $\dfrac{x}{y}$ décrit $[0,+\infty[$, lorsque x décrit $[-2,0[$, $\dfrac{x}{y}$ décrit $[-1,0[$.
D'autre part, pour $-2 \leq x \leq 0$ et $y \geq 2$, on a $\dfrac{1}{y} \leq \dfrac{1}{2}$ donc $\dfrac{x}{y} \geq \dfrac{x}{2} \geq -1$. En fin de compte, $\dfrac{x}{y}$ décrit $[-1,+\infty[$.

b) De manière analogue,
- $x+y$ décrit $]-\infty,+\infty[$.
- xy décrit $]-\infty,+\infty[$ (on fixe tour à tour $x=1$ et $y=1$).
- $\dfrac{x}{y}$ décrit $]-\infty,+\infty[$ (on fixe tour à tour $y=1$ et $y=-1$).

EXERCICE 61 (②) par Tomás Jeria [*]

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que

$$|x+y| \leq |x|+|y|,$$

et que cette inégalité est une égalité si et seulement si x et y ont même signe (au sens large).

Cas 1 : Les nombres réels x et y sont de même signe. Supposons-les d'abord positifs. Alors $x+y \geq 0$ et

$$|x+y| = x+y = |x|+|y|.$$

Si x et y sont négatifs, $-x, -y, -x-y = (-x+y)$ sont positifs et donc

$$|x+y| = -x-y = |x|+|y|.$$

Cas 2 : Si x et y sont de signes différents, on peut supposer que $y < 0 < x$, donc $|y| = -y, |x| = x$.
Si $|y| > |x|$, $-y > x$, $x+y < 0$ et

$$|x+y| = -(x+y) = -x-y = |y|-|x| < |y|+|x| \quad (\text{car } |x| > 0).$$

Si $|y| \leq |x|$, $-y \leq x$, $x+y \geq 0$ et

$$|x+y| = x+y = -|y|+|x| < |y|+|x| \quad (\text{car } |y| > 0).$$

- Soit $|y| \geq |x|$, dans ce cas $y < x+y < 0 \Rightarrow |x+y| < |y| < |x|+|y|$.

- Soit $|y| \leq |x|$, dans ce cas $0 < x + y < x \Rightarrow |x+y| < |x| < |x| + |y|$.

EXERCICE 62 (②) par Tomás Jeria [*]

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation
$$\sqrt{x^2} + \sqrt{(x-1)^2} = 1\,.$$

L'équation équivaut $|x| + |x-1| = 1$. On distingue 3 cas :

- Si $x \geq 1$, alors $|x| = x$ et $|x-1| = x-1$. L'équation équivaut à $(x) + (x-1) = 1$, i.e. $x = 1$, solution qui est bien ≥ 1.
- Si $x \leq 0$, alors $|x| = -x$ et $|x-1| = -(x-1)$. L'équation équivaut à $(-x) + (1-x) = 1$, i.e. $x = 0$, solution qui est bien ≤ 0.
- Si $x \in]0,1[$, alors $|x| = x$ et $|x-1| = -(x-1)$. L'équation équivaut à $x - x + 1 = 1$, i.e. $1 = 1$, qui est toujours vraie.

Donc, l'ensemble des solutions de l'équation est $]0,1[\cup \{0\} \cup \{1\} = [0,1]$.

EXERCICE 63 (②) par Tomás Jeria [*]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que
$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}$$

La somme comporte n termes, tous supérieurs ou égaux à $\frac{1}{2n}$. Elle est donc supérieure ou égale à $\frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$. Formellement :
$$u_n = \underbrace{\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}}_{\forall k \in [\![n+1;2n]\!],\, \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

EXERCICE 64 (②) par Tomás Jeria et Benoit Vitiello [*]

Soient n dans $\mathbb{N}^*$, a dans $[1; +\infty[$. Montrer que
$$\frac{a^n - 1}{a-1} \leq n a^{n-1}$$

Méthode 1 : Sommes géométriques

On reconnaît ici la somme des termes d'une progression géométrique :
$$\frac{a^n - 1}{a-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k\,.$$

Comme $a \geq 1$, on a, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, $a^k \leq a^{n-1}$. Ainsi,
$$\frac{a^n - 1}{a-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k \leq n a^{n-1}\,.$$

Méthode 2 : Théorème des accroissements finis (hors programme en terminale).

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit f_n l'application définie par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = x^n.$$

L'application f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[1, a]$. On dispose, grâce au théorème des accroissements finis, de $c \in [1, a]$ tel que

$$f(a) - f(1) = f'(c)\ (a - 1) = nc^{n-1}\ (a - 1) \leq n\ a^{n-1}\ (a - 1).$$

C'est le résultat désiré.

Exercice 65 (②) par Tomás Jeria [*]

Soient a et b deux éléments de $\mathbb{R}^+$. Montrer que

$$\left|\sqrt{a} - \sqrt{b}\right| \leq \sqrt{|a - b|}$$

Chacun des deux membres de l'inégalité est invariant si on échange a et b. On peut donc supposer sans perte de généralité que $a \geq b$, de sorte que

$$|\sqrt{a} - \sqrt{b}| = \sqrt{a} - \sqrt{b} \quad \text{et} \quad |a - b| = a - b$$

Comparer deux nombres positifs revient à comparer leurs carrés. Or

$$\sqrt{a-b}^{\,2} - \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 = 2\left(\sqrt{ab} - b\right) = 2\sqrt{b}\ \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) \geq 0,$$

car la fonction racine carrée est croissante. On en déduit le résultat.

Exercice 66 (③) par Tomás Jeria [*]

Déterminer le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} \geq 2022.$$

L'idée est de transformer l'expression $\dfrac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}$ en utilisant la quantité conjuguée pour se ramener à une somme télescopique.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} \geq 2022 \quad &\Longleftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)}{\left(\sqrt{k+1} + \sqrt{k}\right)\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)} \geq 2022 \\
&\Longleftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) \geq 2022 \\
&\Longleftrightarrow \quad \sqrt{n+1} - 1 \geq 2022 \\
&\Longleftrightarrow \quad n \geq 2023^2 - 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad n \geq 4092528
\end{aligned}$$

Exercice 67 (③) par Teiki Rigaud [*]

Déterminer les triplets $(x, y, z) \in {\mathbb{N}^*}^3$, $x \leq y \leq z$, tels que : $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1$.

Montrons tout d'abord que $x \leq 3$. Pour cela, supposons par l'absurde $x \geq 4$.

On a alors $4 \leq x \leq y \leq z$, donc $\dfrac{1}{z} \leq \dfrac{1}{y} \leq \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{4}$, donc $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} \leq \dfrac{3}{4} < 1$.

1. Supposons $x = 1$. L'équation s'écrit $\frac{1}{y} = \frac{1}{z} = 0$, c'est impossible.
2. Supposons $x = 2$. L'équation s'écrit $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$. De même que précedemment, puisque $y \leq z$, on trouve $y \leq 4$.
   (a) Si y = 2, il faudrait $\frac{1}{z} = 0$: c'est impossible.
   (b) Si y = 3 : on a alors $\frac{1}{z} = \frac{1}{6}$, donc $z = 6$.
   (c) Si y = 4 : On a alors $\frac{1}{z} = \frac{1}{4}$, donc $z = 4$.
3. Supposons $x = 3$. L'équation s'écrit $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{3}$. On montre comme précedemment que $y \leq 3$, donc $y = 3$ (puisque $y \geq x = 3$). Ainsi, $\frac{1}{z} = \frac{1}{3}$, donc $z = 3$

Finalement, l'ensemble des solutions est :

$$\{(2,3,6),(2,4,4),(3,3,3)\}$$

Exercice 68 (③) par Elliot Gampel

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Pour $0 \leq m \leq n-1$, comparer le quotient $\frac{\binom{n}{m+1}}{\binom{n}{m}}$ à 1.

b) En déduire que
$$\binom{n}{0} \leq \binom{n}{1} \leq \cdots \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

c) En considérant la somme $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$, montrer que
$$\frac{2^n}{n+1} \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \leq 2^n.$$

a) D'une part,
$$\begin{aligned}
\frac{\binom{n}{m+1}}{\binom{n}{m}} \geq 1 &\iff \binom{n}{m+1} \geq \binom{n}{m} \\
&\iff \frac{n!}{(m+1)!\,(n-m-1)!} \geq \frac{n!}{m!\,(n-m)!} \\
&\iff \frac{1}{m+1} \geq \frac{1}{n-m}
\end{aligned}$$

Or, $m+1 > 0$ et $m \leq n-1$ donc $0 \leq n-m-1 \Rightarrow 0 < 1 \leq n-m \Rightarrow n-m > 0$. Ainsi, en passant à l'inverse on obtient
$$\frac{\binom{n}{m+1}}{\binom{n}{m}} \geq 1 \iff m \leq \frac{n-1}{2}$$

Et d'autre part, un raisonnement similaire amènera la relation
$$\frac{\binom{n}{m+1}}{\binom{n}{m}} \leq 1 \iff m \geq \frac{n-1}{2}$$

b) D'après la question précédente, pour $0 \leq m \leq \frac{n-1}{2}$, $\frac{\binom{n}{m+1}}{\binom{n}{m}} \geq 1 \iff \binom{n}{m+1} \geq \binom{n}{m}$.

On peut alors déterminer que $\binom{n}{0} \leq \binom{n}{1} \leq \dots$

Si n est pair alors $n = 2k,\ k \in \mathbb{N}$ et $\dfrac{2k-1}{2}$ n'est pas entier et la chaîne s'arrête à $m = \dfrac{2k-2}{2} = k-1$.
On a alors bien $\binom{n}{0} \leq \binom{n}{1} \leq \cdots \leq \binom{n}{\frac{n}{2}}$

Si n est impair alors $n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N}$ et $\dfrac{2k+1-1}{2} = k$ est entier et la chaîne s'arrête à $m = k$.
On a bien $\binom{n}{0} \leq \binom{n}{1} \leq \cdots \leq \binom{n}{\frac{n-1}{2}} \leq \binom{n+1}{2}$ (la dernière inégalité est une égalité).

Dans les deux cas, comme $\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor \in \left\{\dfrac{n}{2}, \dfrac{n+1}{2}\right\}$, on a bien la suite d'inégalités voulue :

$$\binom{n}{0} \leq \binom{n}{1} \leq \cdots \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

c) D'après la question b), on a pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ l'inégalité $\binom{n}{k} \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.
En sommant cette dernière de 0 à n, on a

$$(1) \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \iff 2^n \leq (n+1)\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \iff \frac{2^n}{n+1} \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

Et également

$$(2) \quad 2^n = \binom{n}{0} + \cdots + \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + \cdots + \binom{n}{n} \geq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

On peut conclure avec (1) et (2)

$$\frac{2^n}{n+1} \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \leq 2^n$$

EXERCICE 69 (④) par Alexandre Paresy [*]

Soit, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{2022} |x-k|$.

a) Étudier les variations de f. On remarquera que f est affine par morceaux, donc strictement croissante (resp. strictement décroissante, resp. constante) sur tout intervalle où sa pente est strictement positive (resp. strictement négative, resp. nulle).
b) Quel est le minimum de f sur $\mathbb{R}$?

a) Si $x \geq 2022$, alors pour tout $k \in [1, 2022]$, $x - k \geq 0$, $|x-k| = x-k$ et

$$f(x) = 2022\,x - \sum_{k=1}^{2022} k.$$

De même, si $x \leq 1$,

$$f(x) = -2022\,x + \sum_{k=1}^{2022} k.$$

Soit $k_0 \in \{1, \ldots, 2021\}$. Si $x \in [k_0, k_0+1[$, $x-k$ est positif si l'entier k est inférieur ou égal à k_0, négatif si l'entier k est strictement supérieur à k_0+1. Ainsi,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^{k_0}(x-k) + \sum_{k=k_0+1}^{2022}(-x+k) \\ &= k_0 x - \sum_{k=1}^{k_0} k + \sum_{k=k_0+1}^{2022} k - x(2022-k_0) \\ &= x(2k_0 - 2022) - \sum_{k=1}^{k_0} k + \sum_{k=k_0+1}^{2022} k. \end{aligned}$$

On en déduit donc, en utilisant le résultat rappelé dans l'énoncé, que f est strictement décroissante sur $]-\infty; 1011[$, constante sur $[1011; 1012[$, et strictement croissante sur $[1012; +\infty[$.
Remarque. La fonction f est dérivable en chaque point de $\mathbb{R}$ autre que les entiers compris entre 1 et 2022, mais pas en ces entiers.

b) On sait que f atteint son minimum en 1011.
$f(1011) = \sum_{k=1}^{1011}(1011-k) + \sum_{k=1012}^{2022}(k-1011) = \sum_{k=1}^{1011} 1011 - \sum_{k=1}^{1011} k + \sum_{k=1012}^{2022} k - \sum_{k=1012}^{2022} 1011$
En faisant le changement de variable $\ell = k - 1011$,

$$f(1011) = -\sum_{k=1}^{1011} k + \sum_{\ell=1}^{1011}(\ell + 1011) = \sum_{\ell=1}^{1011} 1011 = 1011^2.$$

Le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est $1011^2 = 10022121$.

Partie entière

Exercice 70 (①) par François Saint-Jean[*]
Montrer que, si $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \in \{0, 1\}$.

Ce qui se passe est simple : si la partie décimale de x est strictement inférieure à $0,5$, $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor = 0$, sinon $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor = 1$. Mettons en forme.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On écrit $x = q + r$ avec $q = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ et $r \in [0, 1[$.

On a alors

$$(1) \qquad 2x = 2q + 2r.$$

Or $2q \in \mathbb{Z}$ et $2r \in [0, 2[$. On distingue deux cas.

Si $0 \leq 2r < 1$, (1) entraîne que $2q = \lfloor 2x \rfloor$. Ainsi,

$$\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor = 0.$$

Si $1 \leq 2r < 2$, (1) entraîne que $\lfloor 2x \rfloor = 2q + 1$. Ainsi,

$$\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor = 1.$$

Exercice 71 (②) par Gildas Evano-Vautrin [*]
Si $n \in \mathbb{N}$, donner une expression simple de $\lfloor (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^2 \rfloor$.

Soit donc $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$\lfloor (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^2 \rfloor = \lfloor 2n + 1 + 2\sqrt{n+1}\sqrt{n} \rfloor = 2n + 1 + \lfloor 2\sqrt{n+1}\sqrt{n} \rfloor$

On peut minorer $2\sqrt{n+1}\sqrt{n}$ par $2n$.

De plus, on a :

$$n^2 + n < n^2 + n + \frac{1}{4} \quad \text{i.e.} \quad n(n+1) < \left(n + \frac{1}{2}\right)^2,$$

ce qui équivaut à :

$$\sqrt{n+1}\sqrt{n} < n + \frac{1}{2} \quad \text{i.e.} \quad 2\sqrt{n+1}\sqrt{n} < 2n + 1.$$

Donc, par définition, on obtient que $\lfloor 2\sqrt{n+1}\sqrt{n} \rfloor = 2n$.

Ce qui permet de conclure que $\lfloor (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^2 \rfloor = 4n + 1$.

Exercice 72 (③) par Tristan Hottier [*]

Montrer que, si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor - \lfloor x + y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \in \{0, 1\}$$

On procède par disjonction des cas selon les valeurs de $\{x\}$ et $\{y\}$ ($\{x\}$ (resp. $\{y\}$) est la partie décimale de x (resp. y))

Premier cas : $\{x\} < \dfrac{1}{2}$ et $\{y\} < \dfrac{1}{2}$; alors $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$, $\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor$, $\lfloor 2y \rfloor = 2\lfloor y \rfloor$,

$$\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor - \lfloor x + y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 2\lfloor y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor = 0.$$

Deuxième cas : $\{x\} \geq \dfrac{1}{2}$ et $\{y\} \geq \dfrac{1}{2}$; alors $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$, $\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 1$, $\lfloor 2y \rfloor = 2\lfloor y \rfloor + 1$,

$$\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor - \lfloor x + y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 1 + 2\lfloor y \rfloor + 1 - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor - 1 - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor = 1.$$

Troisième cas : $\{x\} < \dfrac{1}{2}$, $\{y\} \geq \dfrac{1}{2}$ et $\{x\} + \{y\} < 1$ ou $\{x\} \geq \dfrac{1}{2}$, $\{y\} < \dfrac{1}{2}$ et $\{x\} + \{y\} < 1$.

Alors, de manière analogue,

$$\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor - \lfloor x + y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor = 1.$$

Quatrième cas : $\{x\} < \dfrac{1}{2}$, $\{y\} \geq \dfrac{1}{2}$ et $\{x\} + \{y\} \geq 1$ ou $\{x\} \geq \dfrac{1}{2}$, $\{y\} < \dfrac{1}{2}$ et $\{x\} + \{y\} \geq 1$

Alors, de manière analogue,

$$\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor - \lfloor x + y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor = 0.$$

Inéquations se ramenant au premier degré

Exercice 73 (①) par Jean Maltère [*]

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|x + 3| \geq 4$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$|x+3| \geq 4 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + 3 \geq 4 \\ \text{ou} \\ -(x+3) \geq 4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ \text{ou} \\ x \leq -7 \end{cases}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est

$$S = \mathbb{R} \backslash] - 7, 1[$$

.

Exercice 74 (②) par Sailor Haddad [*]

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|2x - 4| \leq |x - 1|$-

• Soit $x \in [-\infty; 1]$, alors :

$$|2x - 4| \leq |x - 1| \quad \Leftrightarrow \quad -(2x - 4) \leq -(x - 1) \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 3\ ;$$

Il n'y a pas de solutions.
• Soit $x \in [1;2]$, alors :

$$|2x-4| \leq |x-1| \quad \Leftrightarrow \quad -(2x-4) \leq x-1 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq \frac{5}{3}.$$

Donc x est solution si et seulement si $x \in \left[\frac{5}{3};2\right]$.
• Soit $x \in [2;+\infty]$, alors :

$$|2x-4| \leq |x-1| \quad \Leftrightarrow \quad 2x-4 \leq x-1 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 3.$$

Donc x est solution si et seulement si $x \in [2;3]$.
Finalement :

$$\mathcal{S} = \left[\frac{5}{3}\,;\,3\right]$$

EXERCICE 75 (①) par Jean Maltère [∗]
Quels sont les réels x tels que

$$(x^2-3)(1-\sqrt{x})(|x|-6)|4x+3| \in \mathbb{R}^{+*}\,?$$

Tout d'abord la présence de la fonction racine carrée implique $x \geq 0$.

Ensuite, pour tout x de $\mathbb{R}$, $|4x+3| \geq 0$.

Ainsi il s'agit de déterminer les réels positifs tels que $(x^2-3)(1-\sqrt{x})(|x|-6) > 0$.

x	0		1		$\sqrt{3}$		6		$+\infty$
x^2-3		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-\sqrt{x}$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$\lvert x\rvert-6$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x^2-3)(1-\sqrt{x})(\lvert x\rvert-6)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc

$$S = [0;1[\cup]\sqrt{3};6[.$$

EXERCICE 76 (②) par Sailor Haddad [∗]

Quels sont les entiers naturels n tels que $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} \leq \dfrac{1}{10}$?

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} \leq \frac{1}{10} \iff \sqrt{n+1} \leq \frac{1}{10}+\sqrt{n} \iff n+1 \leq \frac{1}{100}+\frac{1}{5}\sqrt{n}+n \iff \frac{1}{5}\sqrt{n} \geq \frac{99}{100}.$$

Cette condition équivaut à $\sqrt{n} \geq \dfrac{99}{20}$, i.e. à $n \geq 24{,}5025$.

D'où $S = \{n \in \mathbb{N}\,;\ n \geq 25\}$.

Exercice 77 (②) par François Saint-Jean

Selon la valeur de x, déterminer le signe de :

a) $f(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{2x-3}$,

b) $g(x) = \sqrt{|x-1|} - \sqrt{|2x-3|}$,

c) $h(x) = \ln(x+3) + \ln(x+2) - 2\ln(x+11)$.

a) Les deux racines carrées sont définies si et seulement si $x \in I := \left[\frac{3}{2}; \infty\right[$, Posons

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{2x-3}.$$

On a, si $x \in I$,

$$f(x) \leqslant 0 \iff \sqrt{x-1} \leqslant \sqrt{2x-3} \iff x-1 \leqslant 2x-3 \iff x \leqslant 2,$$

car la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Même raisonnement avec les inégalités strictes.
Ainsi, $f(x) > 0$ pour $\frac{3}{2} \leq x < 2$, $f(2) = 0$ et $f(x) < 0$ pour $x > 2$.

b) Les racines carrées sont définies pour tout nombre réel x. Comme la fonction racines carrées est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, le signe recherché est celui de la fonction g donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = |x-1| - |2x-3|.$$

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
signe de $x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $2x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
valeur de $\lvert x-1\rvert$		$1-x$		$x-1$		$x-1$	
valeur de $\lvert 2x-3\rvert$		$3-2x$		$3-2x$		$2x-3$	
valeur de $\lvert x-1\rvert - \lvert 2x-3\rvert$		$-2+x$		$-4+3x$		$2-x$	

En étudiant le signe dans chaque intervalle du tableau, on obtient que l'ensemble des réels x tels que $g(x) \leqslant 0$ est

$$\left]-\infty; \frac{4}{3}\right] \cup [2; +\infty[.$$

c) Les racines carrées sont définies pour $x \in I :=]-2; +\infty[$.
Posons

$$\forall x \in I, \quad h(x) = \ln(x+3) + \ln(x+2) - 2\ln(x+11).$$

On a donc, si $x \in I$,

$$h(x) = \ln((x+3)(x+2)) - \ln((x+11)^2) = \ln\left(\frac{(x+3)(x+2)}{(x+11)^2}\right).$$

Donc, par stricte croissance de exp,

$$h(x) \geq 0 \iff \frac{(x+3)(x+2)}{(x+11)^2} \geqslant 1 \iff \frac{(x+3)(x+2) - (x-11)^2}{(x+11)^2} \geqslant 0 \iff -17x - 115 \geqslant 0.$$

Or $-\dfrac{115}{17} < -2$. L'ensemble des solutions est donc l'ensemble vide.

3.2 Complément : inégalité arithmético-géométrique pour deux réels

EXERCICE 78 (③) par Tristan Hottier[*]

Soient a, b, c des éléments de $\mathbb{R}^+$.

a) En utilisant le théorème 1, montrer que

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc\,.$$

b) Montrer que

$$9abc \leq (a+b+c)(ab+bc+ca)\,.$$

Pour cette question, on pourra utiliser l'inégalité arithmético-géométrique pour trois nombres réels (**7.3**).

a) On écrit

$$a+b \geq 2\sqrt{ab} \quad b+c \geq 2\sqrt{bc} \quad c+a \geq 2\sqrt{ca}.$$

On multiplie ces trois inégalités entre nombres réels positifs, on obtient l'inégalité voulue.

b) On écrit

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \quad \frac{ab+bc+ca}{3} \geq \sqrt[3]{a^2b^2c^2}.$$

On multiplie ces deux inégalités entre nombres réels positifs, on obtient l'inégalité voulue.

EXERCICE 79 (①) par Tristan Hottier [*]

On se donne un rectangle de demi-périmètre p, Montrer que son aire est majorée par $\dfrac{p^2}{4}$. Pour quels rectangles y a-t-il égalité ?

D'après le théorème 1, le produit de deux réels positifs x et y de somme donnée S est maximal lorsque $x = y = \dfrac{S}{2}$.

Ainsi, si l'on nomme x la largeur du rectangle et y sa longueur, son aire, donnée par $x \times y$ est maximale pour

$$x = y = \frac{x+y}{2} = \frac{p}{2}.$$

On a alors

$$\mathcal{A} \leq \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4}.$$

Comme le cas d'égalité se présente quand $x = y$, c'est pour les carrés qu'il y a égalité et donc que l'aire est maximale.

EXERCICE 80 (③) par Léo Baciocchi [*]

Si x et y sont deux éléments de $\mathbb{R}^{+*}$, leur moyenne arithmétique est $m = \dfrac{x+y}{2}$, leur moyenne géométrique $g = \sqrt{xy}$, leur moyenne harmonique $h = \dfrac{2xy}{x+y}$. Montrer que

$$h \leq g \leq m\,.$$

Étudier les cas d'égalité.

On montre $m \geqslant g$.

$$m \geqslant g \iff x^2 + 2xy + y^2 \geqslant 3xy \iff x^2 + y^2 \geqslant 2xy \iff (x-y)^2 \geqslant 0.$$

Cette dernière égalité étant toujours vraie, par équivalences on a montré que la première l'était aussi. De plus, il y a égalité lorsque $(x-y)^2=0$, à savoir $x=y$.

Montrons que $g \geqslant h$.

$$\begin{aligned}
\frac{2xy}{x+y} \leqslant \sqrt{xy} &\iff 4(xy)^2 \leqslant (x+y)^2 \cdot xy \\
&\iff 4(xy)^2 \leqslant 2(xy)^2 + x^3y + xy^3 \\
&\iff x^3y + xy^3 - 2(xy)^2 \geqslant 0 \\
&\iff \left(\sqrt{x^3y} - \sqrt{xy^3}\right)^2 \geqslant 0
\end{aligned}$$

Un carré étant toujours positif, on a bien montré l'inégalité voulue. Le cas d'égalité est obtenu pour $\sqrt{x^3y} = \sqrt{xy^3}$, à savoir $x^2=y^2$, à savoir $x=y$ (car x et y sont positifs).

Variante. L'inégalité $g \leqslant m$ est établie dans le cours. En l'appliquant à $1/x$ et $1/y$, on obtient $h \leq g$.

EXERCICE 81 (③) par Matilde Cruz [*]

On se donne deux nombres réels strictement positifs a et b, et on considère les suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ définies par $a_0 = a$, $b_0 = b$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n), \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}\,.$$

a) Pour $n \geq 1$, comparer a_n et b_n. En déduire la monotonie des suites $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$.

b) Montrer que les deux suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ convergent et ont même limite.

a) On montre par une récurrence simple immédiate que $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ sont à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ (remarquer que, si n est fixé, l'appartenance de a_n et b_n à $\mathbb{R}^+$ justifie la définition de b_{n+1}).
Pour comparer a_n et b_n, on utilise l'inégalité arithmético-géométrique, qui assure que, pour $n \in \mathbb{N}, 2\sqrt{a_n b_n} \leq a_n + b_n$, d'où
$$\sqrt{a_n b_n} \leq \frac{1}{2}(a_n + b_n),$$
puis $a_{n+1} \geq b_{n+1}$. Lorsque n parcourt $\mathbb{N}$, $n+1$ parcourt $\mathbb{N}^*$, donc
$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \qquad a_m \geq b_m.$$
Si $n \in \mathbb{N}^*$,
$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}(b_n - a_n) \leq 0 \quad \text{et} \quad b_{n+1} - b_n = \sqrt{b_n}\,(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}) \geq 0,$$
car $a_n \geq b_n$. Ainsi, la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est décroissante, la suite $(b_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

b) La suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et minorée par 0, donc convergente. Notons a sa limite.
Si $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n \leq a_n \leq a_1$. La suite $(b_n)_{n\geq 1}$ est croissante et majorée par a_1, donc convergente. Notons b sa limite.
En passant à la limite la relation $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$, on a $a = \frac{1}{2}(a+b)$, i.e. $a = b$.

EXERCICE 82 (③) par Gildas Evano-Vautrin [*]

Soient a, b, c trois éléments de $[0,1]$. Montrer que l'un au moins des trois nombres réels $a' = a(1-b)$, $b' = b(1-c)$, $c' = c(1-a)$ est inférieur ou égal à $\frac{1}{4}$. On pourra considérer le produit $a'b'c'$.

Étudions la fonction $f : x \mapsto x(1-x)$ définie sur $[0,1]$. Pour $x \in [0,1]$,

$$f(x) = -x^2 + x = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

donc f est majorée par $\dfrac{1}{4}$.

Comme a', b' et c' sont dans $\mathbb{R}^+$, $a'b'c' = a(1-b)b(1-c)c(1-a) = f(a)f(b)f(c) \leq \dfrac{1}{4^3}$.

Maintenant supposons que $a', b', c' > \dfrac{1}{4}$ ce qui implique $a'b'c' > \dfrac{1}{4^3}$. Absurde. Donc au moins un des trois nombres réels $a' = a(1-b), b' = b(1-c), c' = c(1-a)$ est inférieur ou égal à $\dfrac{1}{4}$.

3.3 Le trinôme du second degré réel

Racines du trinôme et factorisation

Exercice 83 (①) par Maxime Coat [*]

Pour m dans $\mathbb{R}$, soir p_m le trinôme du second degré :

$$p_m : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2 + mx + 1\,.$$

Déterminer, selon la valeur de m, le nombre de racines réelles de p_m.

On a donc $\Delta = m^2 - 4$.

Si $\Delta < 0$, i.e. $m \in]-2; 2[$, p_m n'a aucune racine réelle.

Si $m = 2$ ou $m = -2$, $\quad \Delta = 0$, et p_m a une unique racine réelle.

Si $\Delta > 0$, i.e. $m \in]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$, p_m a deux racines réelles distinctes.

Exercice 84 (②) par Maxime Coat [*]

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations

$$\ln(x+1) + \ln(x+5) = \ln(96) \quad \text{et} \quad \ln(|x+1|) + \ln(|x+5|) = \ln(96)\,.$$

Notons que $\ln(x+1) + \ln(x+5)$ est défini si et seulement si chacun des deux termes l'est, i.e. si $x+1 > 0$ et $x+5 > 0$, i.e. $x \in]-1, +\infty[$ Si tel est le cas, la première équation équivaut à $\ln(x^2+6x+5) = \ln(96)$ c'est-à-dire à $x^2+6x+5 = 96$, i.e. $x^2+6x-91 = 0$. La formule de résolution de l'équation du decond degré montre que les solutions de cette équation sont -13 et 7. La première équation a pour seule solution $x = 7$.

Notons que $\ln(|x+1|) + \ln(|x+5|)$ est défini si et seulement si chacun des deux termes l'est, i.e. si $x \neq -1$ et $x \neq -5$. Si tel est le cas, la seconde équation équivaut à $\ln|x^2+6x+5| = \ln(96)$.

Si $x \in \mathbb{R}\backslash]-5, -1[$, $x^2+6x+5 > 0$ et l'équation équivaut à $x^2+6x+5 = 96$, dont les solutions sont -13 et 7, toutes deux dans $\mathbb{R}\backslash]-5, -1[$.

Si $x \in]-5, -1[$, $x^2+6x+5 < 0$ et l'équation équivaut à $-(x^2+6x+5) = 96$, i.e. à $x^2+6x+101 = 0$, de discriminant $\Delta = 36 - 404 < 0$, qui n'a pas de racine réelle.

En fin de compte, la seconde équation a pour solutions -13 et 7.

Exercice 85 (②) par Jean Maltère [*]

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite géométrique de raison q positive telle que

$$u_0 + u_1 = \frac{13}{2} \quad \text{et} \quad u_0 u_2 = \frac{25}{4}\,.$$

Déterminer u_0 et q.

La suite est géométrique, donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0\ q^n$.
Ainsi,

$$u_0 + u_1 = u_0(1+q) = \frac{13}{2} \quad \text{et} \quad u_0 \times u_2 = u_0^2 \times q^2 = u_1^2 = \frac{25}{4}.$$

La première relation montre que $u_0 > 0$ ce qui entraîne que tous les termes de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ sont positifs. On déduit de la deuxième que $u_1 = \frac{5}{2}$ ou $u_1 = -\frac{5}{2}$.

Finalement : $u_1 = \frac{5}{2}$, $u_0 = 4$ et $q = \frac{u_1}{u_0} = \frac{5}{8}$.

Exercice 86 (③) par Antoine Charki [∗]

Soit a dans $\mathbb{R}$. Déterminer le nombre de nombres réels x tels que :

$$x^3 - x = a^3 - a\,.$$

On veut déterminer les nombres réels x tels que $x^3 - x - a^3 - a = 0$. On remarque que a est racine, ce qui conduit à factoriser par $x - a$. Comme $x^3 - a^3 = (x-a)(x^2 + ax + a^2)$, l'équation proposée équivaut à

$$(x-a)\ (x^2 + ax + a^2 - 1) = 0.$$

L'équation proposée est satisfaite si et seulement si $x = a$ ou $x^2 + ax + a^2 - 1 = 0$. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = a^2 - 4(a^2 - 1) = -3a^2 + 4$.

– Si $4 < 3a^2$, i.e. si $a \in]-\infty, -\frac{2}{\sqrt{3}}[\cup]\frac{2}{\sqrt{3}}, +\infty[$, alors $\Delta < 0$. L'équation du second degré considérée n'a pas de solution, l'éqution intiale admet pour seule solution $x = a$.

– Si $a^2 = \frac{4}{3}$, i.e. si $a = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$, alors $\Delta = 0$, donc l'équation du second degré considérée admet une racine double, à savoir $-\frac{a}{2}$, l'équation de base admet deux solutions réelles, a et $-\frac{a}{2}$ (qui sont clairement distinctes, car $a \neq 0$).

– Si

$$a \in \left]-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right[,$$

alors $\Delta > 0$, l'équation du second degré admet deux solutions réelles distinctes, et donc l'équation de base en admet a priori trois :

$$a \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}(-a \pm \sqrt{4 - 3a^2}).$$

Il reste à examiner si l'une des deux dernières peut coïncider avec a.

C'est le cas si et seulement si $3a = \pm\sqrt{4 - 3a^2})$, ce qui, après calcul équivaut à $a = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Résumons : il y a une unique solution si $a \in \left]-\infty, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right[\cup \left]\frac{2}{\sqrt{3}}, +\infty\right[$, deux si $a \in \left\{\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$, trois si $a \in \left]-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right[\setminus \left\{\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$.

Signe du trinôme pour les valeurs réelles de la variable

EXERCICE 87 (①) par Martin Lambotte [*]

Pour m dans $\mathbb{R}$, soit p_m le trinôme du second degré :

$$p_m : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2 + mx + 1\,.$$

Déterminer, selon les valeurs des réels m et x, le signe de $p_m(x)$.

p_m étant un trinôme du second degré, étudions le signe de son discriminant Δ défini par :

$$\Delta = m^2 - 4$$

Raisonnons alors par disjonction de cas suivant les valeurs de m et donc suivant le signe de Δ.

– Si $|m| > 2$ c'est-à-dire si $m < 2$ ou $m > 2$, on a $\Delta > 0$. Ainsi, p_m admet deux racines réelles x_1 et x_2 définies par

$$x_1 = \frac{-m - \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-m + \sqrt{\Delta}}{2}.$$

Le coefficient dominant de p_m étant strictement positif, on en déduit le tableau de signes de p_m ci-dessous.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$p_m(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

– Si $|m| = 2$ c'est-à-dire si $m = 2$ ou $m = -2$, on a $\Delta = 0$. Ainsi, p_m admet une unique racine réelle x_0 définie par $x_0 = -\frac{m}{2}$. Le coefficient dominant de p_m étant strictement positif, on en déduit le tableau de signes de p_m ci-dessous.

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$p_m(x)$		$+$	0	$+$	

- Si $|m| < 2$ c'est-à-dire si $-2 < m < 2$, on a $\Delta < 0$. Ainsi, p_m n'admet aucune racine réelle. Le coefficient dominant de p_m étant strictement positif, on en déduit le tableau de signes de p_m ci-dessous.

x	$-\infty$		$+\infty$
$p_m(x)$		$+$	

EXERCICE 88 (②) par Maxime Coat [*]

Résoudre les inéquations :

$$x + 1 < \sqrt{x+4} \quad \text{et} \quad \sqrt{x^2 + 5x + 4} \leq 2x - 1\,.$$

La première inéquation est à résoudre sur $[-4, +\infty[$ (pour que $\sqrt{x+4}$ soit défini).

Si $x \in [-4, -1[, x + 1 < 0 \leqslant \sqrt{x+4}$, donc l'inéquation est satisfaite.

Si $x \in [-1, +\infty[$, les deux membres sont positifs, on a donc :

$$\begin{aligned} x + 1 < \sqrt{x+4} &\iff x^2 + 2x + 1 < x + 4 \\ &\iff x^2 + x - 3 < 0 \end{aligned}$$

On résout $x^2+x-3=0$. Les solutions sont $\left\{\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{13}}{2} < 1 \\ x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{13}}{2} \simeq 1,3 \end{array}\right.$

Ainsi, si $x \in \mathbb{R}$,

$$x^2+x-3<0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in]x_1, x_2[.$$

Il s'ensuit que l'ensemble des solutions de la première inéquation est $\left[-4, \dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}\right[$

Passons à la deuxième inéquation. Notons tout d'abord que $x^2+5x+4=(x+1)(x+4)$. Par conséquent, $\sqrt{x^2+5x+4}$ est défini si et seulement si $x \in]-\infty,-4] \cup [-1,+\infty[$.

On a $2x-1<0 \iff x < \dfrac{1}{2}$, donc l'inéquation n'est pas vérifiée pour $x \in]-\infty,-4] \cup [-1,-1/2[$

Si $x \geqslant \dfrac{1}{2}$, les deux termes sont positifs et l'inéquation équivaut à :

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+5x+4} \leqslant 2x-1 &\iff x^2+5x+4 \leqslant 4x^2-4x+1 \\ &\iff -3x^2+9x+3 \leqslant 0 \\ &\iff -x^2+3x+1 \leqslant 0 \end{aligned}$$

Les solutions de $-x^2+3x+1=0$ sont

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{3+\sqrt{13}}{2} \geqslant \frac{1}{2} \\ x_2 &= \frac{-\sqrt{13}+3}{2} < \frac{1}{2} \quad \text{non valable} \end{aligned}$$

Le coefficient dominant $-x^2+3x+1$ étant négatif, on a

$$-x^2+3x+1 \leq 0 \iff x \in \left[\frac{3+\sqrt{13}}{2}, +\infty\right[.$$

Il s'ensuit que l'ensemble des solutions de la deuxième inéquation est $\left[\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}, +\infty\right[$.

EXERCICE 89 (②) par Martin Lambotte [*]

Résoudre les inéquations

$$\left|x^2-5x+6\right| \leq x^2-4x+3 \quad \text{et} \quad x^2-5x+6 \leq \left|x^2-4x+3\right|.$$

Commençons par la première inéquation. Notons d'abord que $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$. Par conséquent, $(x-2)(x-3)$ est positif si et seulement si x appartient à $]-\infty,2] \cup [3,+\infty[$. Raisonnons alors par disjonction de cas suivant les valeurs de x.

– Si $x \in]-\infty,2] \cup [3,+\infty[$,
$\left|x^2-5x+6\right| \leq x^2-4x+3 \iff x^2-5x+6 \leq x^2-4x+3 \iff -x+3 \leq 0 \iff x \geq 3.$

– Si $x \in]2,3[$,

$$\begin{aligned} \left|x^2-5x+6\right| \leq x^2-4x+3 &\iff -(x^2-5x+6) \leq x^2-4x+3 \iff -2x^2+9x-9 \leq 0 \\ &\iff -2(x-3)(x-\frac{3}{2}) \leq 0 \iff x \in \left]-\infty, \frac{3}{2}\right] \cup [3,+\infty[\end{aligned}$$

Or, $\left(\left]-\infty, \dfrac{3}{2}\right] \cup [3,+\infty[\right) \cap]2,3[= \varnothing$. Ainsi, $\left|x^2-5x+6\right| \leq x^2-4x+3 \iff x \geq 3$

Poursuivons avec la seconde inéquation. Notons que $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$. Par conséquent, $(x-1)(x-3)$ est positif si et seulement si x appartient à l'intervalle $]-\infty,1]\cup[3,+\infty[$. Raisonnons alors par disjonction de cas suivant les valeurs de x.

– Si $x\in]-\infty,1]\cup[3,+\infty[$,

$$x^2-5x+6\leq\left|x^2-4x+3\right| \iff x^2-5x+6\leq x^2-4x+3 \iff -x+3\leq 0 \iff x\geq 3.$$

– Si $x\in]1,3[$,

$$\begin{aligned}x^2-5x+6\leq\left|x^2-4x+3\right| &\iff x^2-5x+6\leq-(x^2-4x+3) \iff 2x^2-9x+9\leq 0\\ &\iff 2(x-3)\left(x-\frac{3}{2}\right)\leq 0 \iff x\in\left[\frac{3}{2},3\right]\end{aligned}$$

Or, $\left[\frac{3}{2},3\right]\cap\,]1,3[\,=\left[\frac{3}{2},3\right[$. Ainsi donc, $x^2-5x+6\leq\left|x^2-4x+3\right| \iff x\geq\frac{3}{2}$.

Exercice 90 (③) par Martin Lambotte [*]

Déterminer les nombres réels m tels que

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad (m+1)x^2-2(m-1)x+3m+6\leq 0\,.$$

Pour étudier le signe de ce trinôme du second degré, étudions le signe de son discriminant :

$$\Delta=(-2(m-1))^2-4(m+1)(3m+6)=4(m-1)^2-4(3m^2+9m+6)=4(-2m^2-11m-5).$$

Ainsi, Δ est du signe de $-2m^2-11m-5$. On cherche m tel que Δ est négatif ou nul puisque Δ positif impliquerait l'existence de deux racines réelles au trinôme du second degré et donc l'existence d'un changement de signe. Étudions donc le signe de Δ.

$$\begin{aligned}\Delta\leq 0 &\iff -2m^2-11m-5\leq 0 \iff -2\left(m^2+\frac{11}{2}m+\frac{5}{2}\right)\leq 0 \iff -2\left(m+\frac{1}{2}\right)(m+5)\leq 0\\ &\iff x\in\,]-\infty,-5]\,\cup\,\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[.\end{aligned}$$

Or, le coefficient dominant $(m+1)$ du trinôme du second degré est strictement négatif si et seulement si $m<-1$. Pour $m=-1$, la fonction affine change de signe.

Par conséquent, l'ensemble solution est :

$$\left(]-\infty,-5]\,\cup\,\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[\right)\cap\,]-\infty,-1[\,=\,]-\infty,-5].$$

Somme et produit des racines

Exercice 91 (①) par Maxime Coat [*]

Soient x_1 et x_2 les deux racines (éventuellement confondues) du trinôme

$$p:x\longmapsto ax^2+bx+c\,.$$

Calculer ${x_1}^2+{x_2}^2$ et $(x_1-x_2)^2$ en fonction de a,b,c

---

On peut expliciter les racines, mais il est préférable d'utiliser les relations

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\qquad x_1x_2=\frac{c}{a},$$

puis d'écrire

$$
\begin{aligned}
{x_1}^2 + {x_2}^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2},\\
(x_1 - x_2)^2 &= {x_1}^2 + {x_2}^2 - 2x_1x_2 = \frac{b^2 - 4ac}{a^2}.
\end{aligned}
$$

Exercice 92 (④) par Gildas Evano-Vautrin [*]

Soient Γ le cercle de centre O et de rayon R du plan, A un point du plan. On mène par A une droite Δ coupant Γ en deux points M_1 et M_2.

a) Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de norme 1. Montrer que la relation

$$\|\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{u}\|^2 = R^2$$

définit une équation du second degré en t dont on déterminera les coefficients.

b) En déduire que le produit scalaire $\overrightarrow{AM_1} \cdot \overrightarrow{AM_2}$ est indépendant de Δ.

a) Petit rappel : $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2$. D'où

$$
\begin{aligned}
\|\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{u}\|^2 = R^2 &\Leftrightarrow \|\overrightarrow{OA}\|^2 - R^2 + 2\,\overrightarrow{OA} \cdot (t\overrightarrow{u}) + \|t\overrightarrow{u}\|^2 = R^2\\
&\Leftrightarrow \|\overrightarrow{OA}\|^2 + 2\left(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{u}\right) t + t^2 = 0.
\end{aligned}
$$

C'est exactement une équation du second degré qui s'écrit $at^2 + bt + c = 0$ avec

$$a = 1, \quad b = 2\left(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{u}\right), \quad c = \|\overrightarrow{OA}\|^2 - R^2.$$

La relation $\left\|\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{u}\right\|^2 = R^2$ signifie que l'image de O par la translation de vecteur $\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{u}$ appartient au cercle Γ. Puisque c'est une équation du second degré en t, on peut déterminer t_1 et t_2 tels que $\overrightarrow{OA} + t_1\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OA} + t_2\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM_2}$ respectivement (en interprétant $\overrightarrow{u}$ comme un vecteur directeur de Δ).

b) On a

$$\overrightarrow{AM_1} \cdot \overrightarrow{AM_2} = (t_1\overrightarrow{u}) \cdot (t_2\overrightarrow{u}) = t_1t_2.$$

C'est le produit des deux racines de l'équation définie à la question a). Donc

$$t_1t_2 = \frac{c}{a} = \|\overrightarrow{OA}\|^2 - R^2$$

est indépendant de Δ.

Exercice 93 (③) par Gildas Evano-Vautrin [*]

Soient u et v deux nombres réels. À quelles conditions l'équation $x^4 + ux^2 + v = 0$ admet-elle quatre racines réelles distinctes ?

On pose $X = x^2$. Dès lors l'équation devient $X^2 + uX + v = 0$.

On trouvera donc 4 racines réelles distinctes si il existe deux solutions distinctes strictement positives pour X (en effet si $X < 0$ alors x n'est pas réel).

Or d'après le cours, $X^2 + uX + v$ admet deux racines strictement positives si $v > 0$ et $u < 0$. Pour terminer, on s'assure qu'elles sont distinctes en vérifiant que $\Delta = u^2 - 4v \neq 0$.

3.4 Complément : inégalité de Cauchy-Schwarz pour les sommes

Exercice 94 (②) par Gildas Evano-Vautrin [*]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer, en utilisant le théorème 2, que si $x_1, \ldots, x_n$ sont des nombres réels tels que $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$, alors $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leq \sqrt{n}$. Caractériser le cas d'égalité.

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} 1 \cdot x_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} 1^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{n} \cdot \sqrt{1} = \sqrt{n} \quad \text{par hypothèse.}$$

Le cas d'égalité se produit si et seulement s'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\},\ x_i = \mu$ d'après le théorème 2. Ceci implique :

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad x_i^2 = \mu^2.$$

La condition sur la somme des x_i^2 s'écrit

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1 = n\mu^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \mu = \pm\sqrt{\frac{1}{n}}.$$

Ainsi, il y a égalité si $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad x_i = -\sqrt{\frac{1}{n}}$ ou $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad x_i = \sqrt{\frac{1}{n}}$.

4 Trigonométrie

4.1 Les formules d'addition et de duplication

Exercice 95 (①) par Tomás Jeria [*]

Vérifier l'égalité :

$$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}.$$

En déduire les valeurs du cosinus et du sinus de $\frac{\pi}{12}$

On a bien $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi - 3\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$, donc

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

Exercice 96 (①) par Tomás Jeria [*]

Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ en utilisant la formule de duplication pour le cosinus. En déduire $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

On a $\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1$.

Comme $\frac{\pi}{8} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \geq 0$, donc

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}.$$

Comme $\frac{\pi}{8} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \geq 0$, donc

$$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{1 - (\cos\left(\frac{\pi}{8}\right))^2} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

Exercice 97 (②) par Tomás Jeria [*]

Déterminer sans calcul le maximum et le minimum sur $\mathbb{R}$ de :

$$x \mapsto \sin(x)\cos(x)$$

Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x)\cos(x)$. On constate que, pour tout réel x,

$$f(x) = \frac{\sin(2x)}{2},$$

donc f a pour maximum $\frac{1}{2}$ et pour minimum $-\frac{1}{2}$.

Exercice 98 (②) par Jean Maltère [*]

Déterminer le maximum et le minimum sur $\mathbb{R}$ de :

$$x \mapsto \cos(x) - \cos(x)^2\,.$$

Lorsque x parcourt $\mathbb{R}$, $\cos(x)$ parcourt $[-1, 1]$. Il suffit donc de déterminer le maximum et le minimum de $y \mapsto y - y^2$ sur $[-1, 1]$. Une étude rapide de fonction montre que le maximum est 0, atteint en $y = 1$ et le minimum -2, atteint en $y = -1$.

Exercice 99 (③) par Jean Maltère [*]

Soit Γ un cercle de rayon $R > 0$. On considère des points $A_0, \ldots, A_6$ de Γ, rangés dans cet ordre pour le sens trigonométrique, tels que, pour tout $i \in [\![0, 5]\!]$, $A_iA_{i+1} = R$. Montrer que $A_6 = A_0$.

Soit O le centre du cercle. Les triangles $A_iA_{i+1}O$ sont équilatéraux ($A_iO = A_{i+1}O = A_iA_{i+1} = R$). Ainsi, il y a 6 triangles équilatéraux de côté R inscrits dans de cercle Γ qui partagent le sommet O de sorte que les angles $\widehat{A_iOA_{i+1}}^\circ$ valent $\frac{\pi}{3}$. Or,

$$\widehat{A_0OA_6} = \sum_{i=0}^{6} \widehat{A_iOA_{i+1}} = 6 \times \frac{\pi}{3} = 2\pi.$$

Par conséquent, on a bien $A_0 = A_6$.

Exercice 100 (②) par Tomás Jeria [*]

Pour x dans $\mathbb{R}$, exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$

On a

$$\begin{aligned}\cos(3x) = \cos(2x+x) &= \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x)\\ &= (2\cos^2(x)-1)\cos(x) - (2\sin(x)\cos(x))\sin(x)\\ &= 2\cos^3(x) - \cos(x) - 2(1-\cos^2(x))\cos(x)\\ &= 4\cos^3(x) - 3\cos(x)\end{aligned}$$

EXERCICE 101 (③) par Jean Maltère [*]

Pour x dans $\mathbb{R}$, montrer que

$$2\cos(2x) + 4\cos(x) + 3 \geq 0$$

et déterminer le cas d'égalité.

Pour $x \in \mathbb{R}$

$$2\cos(2x) + 4\cos(x) + 3 = 4\cos^2(x) + 4\cos(x) + 1 = (2\cos(x)+1)^2 \geqslant 0.$$

On a égalité pour

$$(2\cos(x)+1)^2 = 0 \iff 2\cos(x)+1 = 0 \iff \cos(x) = -\frac{1}{2} \iff x = \pm\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$$

c'est à dire pour

$$x \in \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

EXERCICE 102 (③) par Gildas Evano-Vautrin [*]

Soit α l'unique élément de $[0,\pi]$ tel que $\cos(\alpha) = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

a) Calculer $\cos(2\alpha)$, puis $\cos(4\alpha)$.
b) En déduire que 4α est congru à α ou à $-\alpha$ modulo 2π.
c) Conclure que $\alpha = \dfrac{2\pi}{5}$.

a) Par la formule de duplication nous avons :

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1 \quad \Rightarrow \quad \cos(2\alpha) = \frac{2(\sqrt{5}-1)^2}{16} - 1 = -\frac{\sqrt{5}+5}{4}.$$

De la même manière on obtient :

$$\cos(4\alpha) = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \cos(\alpha)$$

b) Donc soit $4\alpha = \alpha\ [2\pi]$ ou $4\alpha = -\alpha\ [2\pi]$, i.e :

$$\alpha = \frac{2k\pi}{3} \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{2k\pi}{5} \qquad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}$$

c) Remarquons que $\cos(\alpha) > 0$, ainsi $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Or, si $k \in \mathbb{Z}$, $\dfrac{2k\pi}{3}$ n'est pas dans l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ (car $\dfrac{2\pi}{3} > \dfrac{\pi}{2}$). Par le même raisonnement, on a $\alpha = \dfrac{2\pi}{5}$.

Remarque. On établit ainsi l'égalité $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$, dont on trouvera une démonstration plus naturelle dans l'exercice 398 (**10.10**).

Exercice 103 (①) par Matilde Cruz [*]

Déterminer les réels x de $[0, 2\pi]$ tels que :

$$\cos(x) \geq \sin(x)\,.$$

On examine ce qui se passe dans chaque quadrant du cercle trigonométrique.

Quadrant Nord-Est :

– Si $x = \dfrac{\pi}{4}$, alors $\cos(x) = \sin(x)$.

– Si $x \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, alors $\cos(x) \in \left[0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right[$ et $\sin(x) \in \left]\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$.

Quadrant Nord-Ouest :

$$\cos(x) < 0 \qquad \text{et} \qquad \sin(x) > 0.$$

Quadrant Sud-Ouest : – Si $x = \dfrac{5\pi}{4}$ alors $\cos(x) = \sin(x)$.

– Si $x \in \left[\pi, \dfrac{5\pi}{4}\right[$, alors $\cos(x) \in \left[-1, \dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right[$, et $\sin(x) \in \left[0, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right[$.

– Si $x \in \left]\dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ alors $\cos(x) \in \left]-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right]$ et $\sin(x) \in \left[-1, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right[$.

Quadrant Sud-Est :

$$\cos(x) > 0 \quad \text{et} \quad \sin(x) < 0.$$

Donc, $\cos(x) \geq \sin(x)$ si et seulement si $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right] \,\cup\, \left[\dfrac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$

Exercice 104 (④) par Matilde Cruz [*]

Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos(\sin(x)) > \sin(\cos(x))\,.$$

Chacun des deux membres de l'inégalité est inchangé si on change x en $x + 2\pi$ ou en $-x$. Il suffit donc d'établir l'inégalité pour $x \in [0, \pi]$.

D'autre part, si $x \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\cos(x) \in [-1, 0[\subset] - \pi, 0[$, donc $\sin(\cos(x)) < 0$, tandis que $\sin(x) \in [0, 1[\subset \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et donc $\cos(\sin(x)) \geq 0$: l'inégalité est satisfaite.

Par ailleurs,

$$\sin(\cos(x)) = \cos(\pi - \cos(x))$$

L'inégalité à démontrer s'écrit donc

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \qquad \cos(\sin(x)) > \cos(\pi - \cos(x)).$$

Maintenant, si $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sin(x) \in [0, 1]$ et $\cos(x) \in [0, 1]$, donc $\sin(x)$ et $\pi - \cos(x)$ sont dans $[0, \pi]$, intervalle sur lequel la fonction cos est strictement décroissante. Il suffit en fin de compte de montrer que

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \qquad \sin(x) < \pi - \cos(x).$$

Mais, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin(x) + \cos(x) = \sqrt{2}\,\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2} < \pi,$$

ce qui termine la démonstration.

EXERCICE 105 (②) par Léo Baciocchi [$*$]

Pour n dans $\mathbb{N}^*$, soit :

$$u_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}.$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right).$$

On montre le résultat par récurrence :

Initialisation. Pour $n=1$, on a bien : $u_1=\sqrt{2}$, et $2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que la propriété soit vraie au rang n et montrons qu'alors la propriété est également vraie au rang $n+1$

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}\cdot\frac{1}{2}}\right) \\ &= 2\sqrt{\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)+1}{2}} && \text{(formule de duplication et caractère positif de } u_n) \\ &= \sqrt{2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)+2} = \sqrt{\underbrace{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{(n+1)\text{ itérations}}} && \text{(hypothèse de récurrence)} \end{aligned}$$

Conclusion. La propriété est initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \geqslant 1$.

EXERCICE 106 (③) par Tristan Hottier [$*$]

Soit x un nombre réel non multiple entier de π. En utilisant la formule de duplication de sin, simplifier, pour n dans $\mathbb{N}^*$, le produit :

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$$

On commence par rappeler la formule de duplication de sin et en tirer une expression de $\cos(x)$.

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}, \quad \sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x), \quad \cos(x) = \frac{\sin(2x)}{2\sin(x)}$$

On peut alors réécrire $P_n(x)$:

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \prod_{k=1}^{n}\frac{\sin\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2^k}\right)} = \frac{1}{2^n}\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2^k}\right)} = \frac{1}{2^n}\times\frac{\sin(x)}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}.$$

EXERCICE 107 (④) par Tristan Hottier [$*$]

a) Soit $y \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$. Exprimer $\dfrac{\sin(3y)}{\sin(y)}$ en fonction de $\cos(2y)$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier ; pour $n \in \mathbb{N}^*$, le produit :

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n}\frac{1+2\cos\left(\frac{2x}{3^k}\right)}{3}.$$

a) Commençons par développer $\sin(3y)$ pour $y \in \mathbb{R} \backslash \pi\mathbb{Z}$. On a

$$\begin{aligned}\sin(3y) &= \sin(2y)\cos(y) + \sin(y)\cos(2y)\\ &= (\sin(y)\cos(y) + \sin(y)\cos(y))\cos(y) + \sin(y)\cos(2y)\\ &= \sin(y)\left(2\cos(y)^2 + \cos(2y)\right)\end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{\sin(3y)}{\sin(y)} = 2\cos(y)^2 + \cos(2y) = \cos(2y) + 1 + \cos(2y) = 1 + 2\cos(2y).$$

b) On remarque qu'en posant $y = \frac{x}{3^k}$, on obtient, pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, l'égalité

$$1 + 2\cos\left(\frac{2x}{3^k}\right) = \frac{\sin\left(\frac{x}{3^{k-1}}\right)}{\sin\left(\frac{x}{3^k}\right)}.$$

Alors :

$$P_n(x) = \frac{1}{3^n}\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin\left(\frac{x}{3^{k-1}}\right)}{\sin\left(\frac{x}{3^k}\right)},$$

ce qui donne par télescopage :

$$P_n(x) = \frac{\sin(x)}{3^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right)}.$$

Exercice 108 (③) par Gildas Evano-Vautrin [*]
Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(nx)| \leq n|\sin(x)|.$$

On commence par fixer un réel x.
Pour $n \in \mathbb{N}$, soit la propriété P_n : $|\sin(nx)| \leq n|\sin(x)|$.
Initialisation. Le membre de gauche vaut $|\sin(0 \cdot x)| = |\sin(0)| = 0$.
Le membre de droite vaut $0 \cdot |\sin(x)| = 0$, donc P_0 est vérifié.
Hérédité. On suppose P_n vrai pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors on remarque que :

$$|\sin((n+1)x)| = |\sin(nx + x)| = |\sin(nx)\cos(x) + \cos(nx)\sin(x)|.$$

Donc par l'inégalité triangulaire (cf. exercice 61) on obtient :

$$\begin{aligned}|\sin((n+1)x)| &\leq |\sin(nx)\cos(x)| + |\cos(nx)\sin(x)|\\ &\leq |\sin(nx)| \cdot |\cos(x)| + |\cos(nx)| \cdot |\sin(x)|\\ &\leq n|\sin(x)| \cdot |\cos(x)| + |\cos(nx)| \cdot |\sin(x)|\\ &\leq (n|\cos(x)| + |\cos(nx)|) \cdot |\sin(x)|\\ &\leq (n+1)|\sin(x)|\end{aligned}$$

Par le principe de récurrence, l'inégalité est vérifiée.

4.2 Congruences modulo un nombre réel

Exercice 109 (①) par Karim Saad [*]
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $\cos(x) = \frac{1}{2}$ et $\sin(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Si $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(x) = \frac{1}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad x \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \ \text{ ou } \ x \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi].$$

Si $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad 2x \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi] \ \text{ ou } \ 2x \equiv \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$$

Donc

$$\sin(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad x \equiv \frac{\pi}{8}\ [\pi] \text{ ou } x \equiv \frac{3\pi}{8}\ [\pi].$$

(Ne pas oublier de diviser par 2 le module de la congruence.)

EXERCICE 110 (①) par Alexandre Paresy [$*$]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|\sin(nx)| = 1$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$|\sin(nx)| = 1 \ \Leftrightarrow\ \sin(nx) = \pm 1 \ \Leftrightarrow\ nx \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \ \Leftrightarrow\ x \equiv \frac{\pi}{2n}\ \left[\frac{\pi}{n}\right].$$

L'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{(2k+1)\,\pi}{2n},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

EXERCICE 111 (①) par Léo Baciocchi [$*$]
Résoudre l'inéquation $|\sin(x)| \leq \frac{1}{2}$ dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, puis dans $[-\pi, \pi]$.

On se sert du cercle trigonométrique (qu'il faut absolument connaître).
– Sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$|\sin(x)| \leqslant \frac{1}{2} \iff \sin(x) \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \iff x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right].$$

– Sur $[-\pi, \pi]$,

$$|\sin(x)| \leqslant \frac{1}{2} \iff \sin(x) \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \iff x \in \left[-\pi, -\frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right].$$

EXERCICE 112 (②) par Léo Baciocchi [$*$]
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos(x) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$.

On utilise la propriété : $\cos(a) = \cos(b) \iff a \equiv b\ [2\pi]$ ou $a \equiv -b\ [2\pi]$. On a donc

$$\begin{aligned} \cos(x) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) &\iff 3x + \frac{\pi}{3} \equiv x\ [2\pi] \ \text{ ou } \ 3x + \frac{\pi}{3} \equiv -x\ [2\pi] \\ &\iff 2x \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi] \ \text{ ou } \ 4x \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi] \\ &\iff x = -\frac{\pi}{6}\ [\pi] \ \text{ ou } \ x = -\frac{\pi}{12}\ \left[\frac{\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{12} + k\,\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Exercice 113 (③) par François Saint-Jean
Soit α un nombre irrationnel. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \cos(x) + \cos(\alpha x)\,.$$

a) Montrer que le seul nombre réel x tel que $f(x) = 2$ est $x = 0$.

b) La fonction f est-elle périodique ?

a) On a $f(0) = 2$. D'autre part, si $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x)$ et $\cos(\alpha x)$ sont majorés par 1. On a donc $f(x) \leq 2$ et

$$f(x) = 2 \iff \cos(x) = \cos(\alpha x) = 1.$$

Ces égalités impliquent qu'il existe k et ℓ dans $\mathbb{Z}$ tels que

$$x = 2k\pi \quad \text{et} \quad \alpha x = 2\ell\pi.$$

Si $x \neq 0$, on obtient

$$\alpha = \frac{\ell}{k} \in \mathbb{Q},$$

ce qui est absurde.

b) On procède par l'absurde en supposant que f est périodique. Il existe donc T réel non nul tel que $f(x+T) = f(x)$ pour tout x réel. De cette manière, on trouve que $T = 0 + T$ est aussi solution de $f(x) = 2$ autre que $x = 0$, ce qui est impossible au vu de a).

Exercice 114 (③) par Noam Fauverte [∗]
Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, T et T' deux nombres réels strictement positifs. On suppose que f est T-périodique, que g est T'-périodique, et que $\dfrac{T'}{T}$ est rationnel. Montrer que $f + g$ est périodique.

Puisque f est T-périodique, on a, si $a \in \mathbb{R}$, $f(a) = f(a+T)$.
Puisque g est T'-périodique, on a, si $a \in \mathbb{R}$, $g(a) = g(a+T)$.
Commme $\dfrac{T'}{T} \in \mathbb{Q}$, il existe $(q,p) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{T'}{T} = \dfrac{q}{p}$, i.e. $T'p = Tq$.
Si $a \in \mathbb{R}$, on a $f(a) = f(a+Tq)$ et $g(a) = g(a+T'p) = g(a+Tq)$; il s'ensuit que

$$f(a) + g(a) = f(a+Tq) + g(a+Tq).$$

La fonction $f+g$ est donc bien périodique de période (pas forcément minimale) $pT' = qT$.

Exercice 115 (④) par Matilde Cruz [∗]

(a) Déterminer les nombres réels x que $\cos(3x) = \sin(2x)$.

(b) En déduire la valeur de $\sin\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$.

a) Si $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(3x) = \sin(2x) \iff \cos(3x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right).$$

Cette équation équivaut à

$$3x \equiv \frac{\pi}{2} - 2x \; [2\pi] \quad \text{ou} \quad 3x \equiv 2x - \frac{\pi}{2} \; [2\pi],$$

c'est-à-dire à

$$x \equiv \frac{\pi}{10} \left[\frac{2\pi}{5}\right] \quad \text{ou} \quad x \equiv -\frac{\pi}{2} \; [2\pi]$$

En fin de compte, l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{10} + k\,\frac{2\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

b) Tout d'abord, $\dfrac{\pi}{10}$ appartient bien à l'ensemble $\mathcal{S}$. Reste à déterminer les valeurs de $\sin x$ prises pour $x \in \mathcal{S}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
\cos(3x) = \sin(2x) \quad & \Leftrightarrow \cos(2x + x) = \sin(2x) \\
& \Leftrightarrow \cos(x)\cos(2x) - \sin(x)\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \\
& \Leftrightarrow \cos(x)\left(2\cos^2(x) - 1\right) - 2\sin^2(x)\cos(x) = 2\sin(x)\cos(x) \\
& \Leftrightarrow \cos(x)\left(2\cos^2(x) - 1\right) - 2\left(1 - \cos^2(x)\right)\cos(x) = 2\sin(x)\cos(x) \\
& \Leftrightarrow 4\cos^3(x) - 3\cos(x) = 2\sin(x)\cos(x) \\
& \Leftrightarrow 4\cos^2(x) - 3 = 2\sin(x) \quad \text{ou} \quad \cos(x) = 0 \\
& \Leftrightarrow 4[1 - \sin^2(x)] - 3 = 2\sin(x) \quad \text{ou} \quad \sin(x) = \pm 1 \\
& \Leftrightarrow 1 - 4\sin^2(x) - 2\sin(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \sin(x) = \pm 1
\end{aligned}$$

Posant $X = \sin(x)$, l'équation équivaut à $4X^2 + 2X - 1 = 0$ ou $X = \pm 1$.
L'équation du second degré $4X^2 + 2X - 1 = 0$ admet deux racines réelles :

$$X_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad X_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}.$$

Ces deux nombres appartiennent à $[-1, 1]$. En conclusion, les valeurs possibles de X sont $\pm 1, X_1, X_2$.
D'autre part, $\sin\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$ appartient à $]0, 1[$, donc

$$\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}.$$

4.3 Complément : transformation $a\cos x + b\sin x$

Exercice 116 (①) par Léo Baciocchi [∗]
Quelle est l'amplitude de

$$x \longmapsto 3\cos(x) + 4\sin(x) \ ?$$

Soit, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 3\cos(x) + 4\cos(x)$. Le cours montre qu'il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 5\cos(x - \varphi)$. L'amplitude de f est 5.

Exercice 117 (③) par Matilde Cruz [∗]

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

b) Résoudre l'inéquation d'inconnue $x \in [-\pi, \pi]$: $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) \leq 1$.

a) On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2}\ \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

L'équation équivaut donc à

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

c'est-à-dire à

$$x - \frac{\pi}{4} \equiv \pm\frac{\pi}{6} \ [2\pi].$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

b) Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(x) - \sqrt{3}\ \sin(x) = 2\ \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$$

L'inéquation proposée s'écrit

$$2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\leq 1 \quad \text{i.e.} \quad \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\leq \frac{1}{2}.$$

En considérant le cercle trigonométrique, on voit que l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S}=\left[-\pi;-\frac{2\pi}{3}\right]\cup[0;\pi]$$

EXERCICE 118 (③) par Jean Maltère [*]
Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. On pose

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad f(x)=a\cos(x)+b\sin(x)\,.$$

Montrer que, si $x_0\in\mathbb{R}$, la fonction f s'annule exactement une fois sur $[x_0,x_0+\pi[$.

On a

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad f(x)=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi)\qquad \text{où}\quad \varphi=\arg(a+ib).$$

La fonction f s'annule donc pour $\cos(x-\varphi)=0$, à savoir $x-\varphi\equiv\dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$. L'ensemble

$$\mathcal{S}=\left\{\varphi+\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

des points d'annulation de f rencontre tout intervalle de la forme $[x_0,x_0+\pi[$. Les points de $\mathcal{S}$ étant à distance supérieure ou égale à π, l'ensemble $\mathcal{S}$ rencontre exactement une fois chaque intervalle de la forme $[x_0,x_0+\pi[$.

4.4 Complément : la fonction tangente

EXERCICE 119 (①) par Léo Baciocchi [*]
Sous des hypothèses convenables, exprimer $\tan(x+y)$ en fonction de $\tan(x)$ et de $\tan(y)$.

Soient $x,y\in\mathbb{R}$ tels que $\cos(x+y)\neq 0$. On a

$$\begin{aligned}\tan(x+y)=\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}=\frac{\sin(x)\cos(y)+\sin(y)\cos(x)}{\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)}&=\frac{\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}+\dfrac{\sin(y)}{\cos(y)}}{1-\dfrac{\sin(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y)}}\\ &=\frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}\end{aligned}$$

Il faut bien sûr que $\tan(x)$, $\tan(y)$ et $\tan(x+y)$ soient définis, c'est à dire x,y et $x+y$ non congrus à $\dfrac{\pi}{2}$ modulo π.

EXERCICE 120 (③) par Daniel Caby [*]
Soient x dans $\mathbb{R}$ non congru à π modulo 2π, $t=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$. Vérifier que

$$\cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \sin(x)=\frac{2t}{1+t^2}$$

On remarque que, pour $y\in\mathbb{R}$,

$$\frac{1}{\cos^2(y)}=1+\tan^2(y).$$

Donc, en appliquant cette égalité à $y=x/2$,

$$\frac{1-t^2}{1+t^2}=(1-t^2)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)=\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)=\cos(x),$$

et
$$\frac{2t}{1+t^2} = 2t\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sin(x).$$

Exercice 121 (③) par Elliot Gampel
À l'aide de l'exercice précédent, montrer que les points du cercle trigonométrique dont les deux coordonnées sont rationnelles sont (-1,0) et les $\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$ avec $t \in \mathbb{Q}$.

On raisonne par double inclusion. Notons A l'ensemble des points du cercle trigonométrique dont les deux coordonnées sont rationnelles et B l'ensemble :
$$B = \left\{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \ ; \ t \in \mathbb{Q}\right\} \cup \{(-1,0)\}.$$

Montrons tout d'abord que $A \subset B$.

Soit M un élément de A. M s'écrit $(\cos(\phi), \sin(\phi))$ avec $\phi \in [0, 2\pi]$.

Si $\phi \equiv \pi[2\pi]$ alors M est de coordonnées $(-1,0)$ qui sont bien rationnelles. On a bien $M \in B$.

Si $\phi \not\equiv \pi[2\pi]$ alors $\tan(\frac{\phi}{2})$ est définie (car $\frac{\phi}{2} \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$). En utilisant l'exercice précédent, on peut donc écrire :
$$M = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \text{ avec } t = \tan\frac{\phi}{2}.$$

Il reste à voir que t est rationnel. À cet effet, on utilise la stabilité de l'ensemble des rationnels par somme, différence, produit et (s'il est défini) quotient.
.

Les nombres réels $r := \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $r' := \frac{2t}{1+t^2}$ sont rationnels. Si $r = -1$, $t = \pm 0$ est rationnel. Sinon,
$$t^2 = \frac{1-r}{r+1}$$
est rationnel comme quotient de deux rationnels. Et
$$t = \frac{r'(1+t^2)}{2}$$
est également rationnel.

Montrons maintenant que $B \subset A$.

Le point $(-1,0)$ appartient bien au cercle trigonométrique et est de coordonnées rationnelles. Considérons maintenant les $\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$. La fonction $\phi \longrightarrow \tan(\frac{\phi}{2})$ étant une bijection de $]-\pi,\pi[$ sur $\mathbb{R}$, on sait que tout élément de $\mathbb{R}$, et par conséquent tout élément de $\mathbb{Q}$ admet un antécédent par cette fonction. Par conséquent :
$$\forall t \in \mathbb{Q}, \exists \phi \in]-\pi,\pi[, \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) = (\cos(\phi), \sin(\phi)).$$

Donc les $\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$ appartiennent bien au cercle trigonométrique, ce que l'on peut d'ailleurs vérifier par un calcul direct. De plus, $\mathbb{Q}$ étant stable par addition, soustraction, multiplication et division, on a bien :
$$\forall t \in \mathbb{Q}, \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \in \mathbb{Q}^2.$$

Donc $B \subset A$. Donc $A = B$, ce qui conclut l'exercice.

5 Calcul des limites

5.1 Premiers exemples

EXERCICE 122 (①) par Léo Baciocchi [*]

Trouver la limite en $+\infty$ des fonctions :

— $a : x \mapsto e^{-\sqrt{x}}$, — $b : x \mapsto \dfrac{x+7}{4x+3}$, — $c : x \mapsto \dfrac{x^2+5}{x^3-1}$,

— $d : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$, — $e : x \mapsto \cos\left(x^2\right) e^{-x}$, — $f : x \mapsto \dfrac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}$,

— $g : x \mapsto (2+\sin(x))x$.

Les limites devant toutes être calculées en $+\infty$, on écrira par exemple $3x \to +\infty$ au lieu de $3x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

— a. Comme $-\sqrt{x} \longrightarrow -\infty$, alors $a(x) = e^{-\sqrt{x}} \longrightarrow 0$ par composition des limites.

— b. On met en facteur les termes prépondérants :

$$b(x) = \frac{x+7}{4x+3} = \frac{1+7/x}{4+3/x} \longrightarrow \frac{1}{4}.$$

— c. À nouveau, on met en facteur les termes prépondérants :

$$c(x) = \frac{x^2+5}{x^3-1} = \frac{1+5/x^2}{x-1/x^2} \longrightarrow 0.$$

— d. On a l'encadrement $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$, donc en divisant par $x > 0$,

$$\underbrace{-\frac{1}{x}}_{\to 0} \leqslant \frac{\sin(x)}{x} \leqslant \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}.$$

Finalement, d'après le théorème des gendarmes, on a :

$$d(x) = \frac{\sin(x)}{x} \longrightarrow 0.$$

— e. On a

$$\underbrace{-e^{-x}}_{\to 0} \leqslant \cos(x^2)e^{-x} \leqslant \underbrace{e^{-x}}_{\to 0},$$

donc $e(x) = \cos(x^2)\, e^{-x} \longrightarrow 0$.

— f. On pose $X = \ln(x)$. On a alors $\dfrac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)} = \dfrac{\ln(X)}{X}$. Or, $X \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc par composition des limites :

$$\frac{\ln(X)}{X} \longrightarrow 0 \implies \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)} \longrightarrow 0.$$

— g. Comme $2+\sin(x) \geqslant 1$, on a, pour $x \in \mathbb{R}^+$, $g(x) \geq x$ donc $g(x) \longrightarrow +\infty$.

EXERCICE 123 (①) par Elliot Gampel[*]

Trouver la limite en 0 des fonctions :

$$a : x \mapsto \frac{\cos(e^x)}{2+\ln(x)},\quad b : x \mapsto \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}},\quad c : x \mapsto x\ln(x),\quad d : x \mapsto \sqrt{x}\ln(x).$$

— La fonction cos est bornée par 1 et $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0} a(x) = 0$.

— On a $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$, avec $\sqrt{x} > 0$ pour $x > 0$. Donc, par opérations sur les limites $\lim\limits_{x\to 0} b(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = -\infty$.

— Posons $X = \dfrac{1}{x}$ par conséquent $\lim\limits_{x\to 0} X = +\infty$, on a donc

$$\lim_{x\to 0} c(x) = \lim_{X\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{X}\right)}{X} = \lim_{X\to+\infty} = \lim_{X\to+\infty} \frac{-\ln(X)}{X}.$$

Or, par croissance comparée, $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\ln(X)}{X} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0} c(x) = 0$.

— Posons $x = \dfrac{1}{X^2}$ et $\lim\limits_{x\to 0} X = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$. On a alors,

$$\lim_{x\to 0} d(x) = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{X} \ln\left(\frac{1}{X^2}\right) = \lim_{X\to+\infty} \frac{-2\ln(X)}{X} = 0.$$

Donc $\lim\limits_{x\to 0} d(x) = 0$.

Exercice 124 (②) par François Saint-Jean[*]

Trouver la limite en $+\infty$ des fonctions :

$$a : x \mapsto \frac{\lfloor x \rfloor}{x}, \quad b : x \mapsto x - \sqrt{x^2 - x - 1}.$$

a. On a l'encadrement : $x \leqslant \lfloor x \rfloor \leqslant x + 1$, donc

$$1 \leqslant \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \leqslant \underbrace{\frac{x+1}{x}}_{\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1}.$$

Par encadrement, on a donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x} = 1.$$

b. On utilise la quantité conjuguée pour lever l'indétermination.

$$\begin{aligned}
x - \sqrt{x^2 - x - 1} &= \frac{\left(x - \sqrt{x^2 - x - 1}\right)\left(x + \sqrt{x^2 - x - 1}\right)}{x + \sqrt{x^2 - x - 1}} \\
&= \frac{1 + x}{x + x\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}} \\
&= \frac{1 + x}{x + x\left(\sqrt{(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}\right)} \quad \text{car on prend } x > 0 \\
&= \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}} + \frac{1}{x\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}\right)}.
\end{aligned}$$

Le premier quotient tendant vers $\dfrac{1}{2}$ et le second vers 0 quand $x \to +\infty$, par somme, on a :

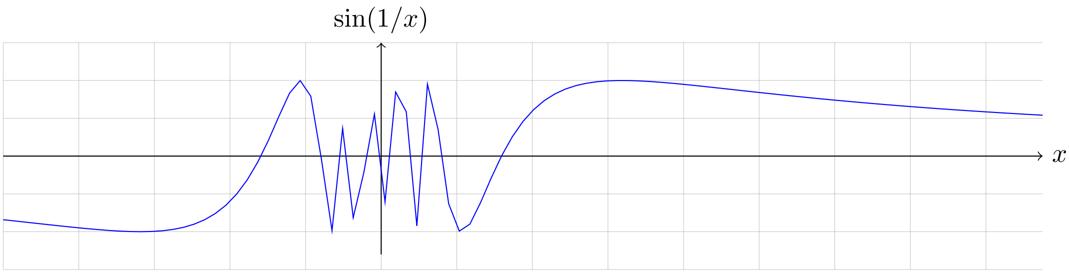
$$\lim_{x\to+\infty} x - \sqrt{x^2 - x - 1} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 125 (②) par François Saint-Jean et Thomas Taalbi[*]

Pour $x \in \mathbb{R}^*$, soit :

$$f(x) = \sin(1/x).$$

a) Tracer sommairement le graphe de f. Quelle est la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?
b) La fonction f a-t-elle une limite en 0 ?
c) Quelle est la limite de $g(x) := xf(x)$ lorsque x tend vers 0 ?
d) Montrer que, pour tout $\alpha > 0$, le graphe de f contient une infinité de point de la première bissectrisse d'abscisse appartenant à $[0, \alpha]$. Même question avec la seconde bissectrice.

a) 

Lorsque x tend vers $+\infty$, $\frac{1}{x}$ tend vers 0 et, par continuité de sin, $f(x)$ tend vers $\sin(0) = 0$.

b) On a, pour $n \in \mathbb{Z}$,

$$f\left(\frac{1}{n\pi + \pi/2}\right) = \sin(n\pi + \pi/2) = \cos(n\pi) = (-1)^n$$

donc f n'a pas de limite en 0.

c) Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$-1 \leqslant \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant 1 \quad \text{donc} \quad |g(x)| \leq |x|.$$

Par comparaison,

$$g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.$$

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Le point du graphe de f d'abscisse $\dfrac{1}{n\pi/\pi/2}$ appartient à la première bissectrice si n est pair, à la seconde si n est impair.

Exercice 126 (②) par François Saint-Jean[*]

Trouver la limite (finie ou infinie) des suites définies par les formules ci-après :

$$a_n = \frac{2n+5}{6n+7}, \qquad b_n = \frac{n^2 - 5n + 6}{n\sqrt{n}}, \qquad c_n = \frac{5 + 3\sin^2(n)}{\sqrt{n+2}+3},$$

$$d_n = \sqrt{n + \cos(n)} - \sqrt{n}, \qquad e_n = -2n^2 + (-1)^n, \qquad f_n = \sqrt{n} - \sin(2n)^2 - 7,$$

$$g_n = \frac{1 + 5\sin^3(n)}{3n - 7\sqrt{n} + \cos(n)}.$$

Les limites devant toutes être calculées en $+\infty$, on écrira par exemple $3n \to +\infty$ au lieu de $3n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

— *a.* On met en facteur les termes prépondérants :

$$a_n = \frac{2n+5}{6n+7} = \frac{2+5/n}{6+7/n} \longrightarrow \frac{1}{3}.$$

— *b.* À nouveau, on met en facteur les termes prépondérants :

$$b_n = \frac{n^2 - 5n + 6}{n\sqrt{n}} = \frac{n^2(1 - 5/n + 6/n)}{n\sqrt{n}} = \sqrt{n}\left(1 - \frac{5}{n} + \frac{6}{n}\right) \longrightarrow +\infty.$$

— *c*. On a l'encadrement $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$ donc $0 \leqslant \sin^2(n) \leqslant 1$ (car $0 \leqslant -\sin(n) \leqslant \sin^2(n) \leqslant \sin(n) \leqslant 1$) et $0 \leqslant 5+3\sin^2(n) \leqslant 8$ ainsi,

$$\underbrace{0}_{\to 0} \leqslant \frac{5+3\sin^2(n)}{\sqrt{n+2}+3} \leqslant \underbrace{\frac{8}{\sqrt{n+2}+3}}_{\to 0}.$$

Finalement, d'après le théorème des gendarmes, on a :

$$c_n = \frac{5+3\sin^2(n)}{\sqrt{n+2}+3} \longrightarrow 0.$$

— *d*. Pour tout $n \geqslant 1$, on a l'encadrement $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$ ainsi $n-1 \leqslant n+\cos(n) \leq n+1$, par croissance de la fonction racine carrée :

$$\begin{aligned} \sqrt{n-1} &\leqslant \sqrt{n+\cos(n)} \leqslant \sqrt{n+1} \\ \text{alors } \sqrt{n-1}-\sqrt{n} &\leqslant \sqrt{n+\cos(n)}-\sqrt{n} \leqslant \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \end{aligned}$$

On peut ainsi étudier les limites de $\sqrt{n-1}-\sqrt{n}$ et $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.
Tout d'abord, on lève la forme indeterminée de $\sqrt{n-1}-\sqrt{n}$ en multipliant la quantité conjuguée ce qui nous donne :

$$\sqrt{n-1}-\sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n-1}-\sqrt{n})(\sqrt{n-1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}} = \frac{-1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}.$$

On en déduit que $\sqrt{n-1}-\sqrt{n} \longrightarrow 0$.
On étudie la limite de $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ par le même procédé, on a :

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

Donc, $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} \longrightarrow 0$.
On a alors, $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} \longrightarrow 0$ et $\sqrt{n-1}-\sqrt{n} \longrightarrow 0$. D'après le théorème des gendarmes, on en conclut que :

$$d_n = \sqrt{n+\cos(n)}-\sqrt{n} \longrightarrow 0.$$

— *e*. On a l'encadrement $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ donc

$$-2n^2+(-1)^n \leqslant \underbrace{1-2n^2}_{\to -\infty}.$$

Finalement, d'après le théorème de comparaison, on a :

$$e_n = -2n^2+(-1)^n \longrightarrow -\infty.$$

— *f*. On a l'encadrement

$$\begin{aligned} -1 &\leqslant -\sin^2(2n) \leqslant 0 \\ \text{donc } \sqrt{n}-1 &\leqslant \sqrt{n}-\sin^2(n) \\ \text{ainsi } \sqrt{n}-8 &\leqslant \sqrt{n}-\sin^2(n)-7 \end{aligned}$$

Or, $\sqrt{n}-8 \longrightarrow +\infty$. D'après le théorème de comparaison , on a donc :

$$f_n = \sqrt{n}-\sin^2(n)-7 \longrightarrow +\infty.$$

— *g*. On met en facteur le terme prépondérant du dénominateur :

$$\frac{1+5\sin^3(n)}{3n-7\sqrt{n}+\cos(n)} = \frac{1+5\sin^3(n)}{n(3-7/\sqrt{n}+\cos(n)/n)} = \frac{1+5\sin^3(n)}{n} \times \frac{1}{3-7/\sqrt{n}+\cos(n)/n}.$$

La suite $(1+5\sin^3(n))$ est bornée, donc $\dfrac{1+5\sin^3(n)}{n} \longrightarrow 0$. De plus, $\dfrac{1}{3-7/\sqrt{n}+\cos(n)/n} \longrightarrow \dfrac{1}{3}$, donc :

$$g_n = \frac{1+5\sin^3(n)}{3n-7\sqrt{n}+\cos(n)} \longrightarrow 0.$$

5.2 Utilisation des taux d'accroissement

Exercice 127 (②) par François Saint-Jean et Thomas Taalbi[*]

En utilisant éventuellement des taux d'accroissement, trouver les limites suivantes :

— $\dfrac{\cos x - 1}{x}$, $\dfrac{\sin(5x)}{x}$, $\dfrac{\ln(1+2x)}{\sin(4x)}$ lorsque x tend vers 0,

— $\dfrac{\ln x}{x-1}$ lorsque x tend vers 1,

— $x \ln\left(1 + \dfrac{2}{x}\right)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

— Étudions la limite en 0 :
On a
$$\frac{\cos(x) - 1}{x} = \frac{\cos(x) - \cos(0)}{x - 0}$$
Donc d'après le taux d'accroissement :
$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - \cos(0)}{x - 0} = -\sin(0) = 0.$$

— On procède par changement de variable : On remarque que
$$\frac{\sin(5x)}{x} = \frac{\sin(5x)}{\frac{5x}{5}}$$
En posant $X = 5x$, on a alors $\lim\limits_{x \to 0} 5x = \lim\limits_{x \to 0} X = 0$.
Donc
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(5x)}{x} = \lim_{X \to 0} 5 \times \frac{\sin(X)}{X}$$
Or d'après la formule du taux d'accroissement on a :
$$\lim_{X \to 0} \frac{\sin(X)}{X} = \lim_{X \to 0} \frac{\sin(X) - \sin(0)}{X - 0} = \cos(0) = 1$$
Ainsi on obtient le résultat voulu,
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(5x)}{x} = \lim_{X \to 0} 5 \times \frac{\sin(X)}{X} = 5$$

— Étudions la limite de $\dfrac{\ln(1+2x)}{\sin(4x)}$ en 0.
On a,
$$\begin{aligned} \frac{\ln(1+2x)}{\sin(4x)} &= \frac{1}{2} \times \frac{\ln(1+2x)}{2x} \times \frac{4x}{\sin(4x)} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\ln(1+2x) - \ln(1)}{2x - 0} \times \frac{4x - 0}{\sin(4x) - \sin(0)} \qquad \text{(taux d'accroissement)} \end{aligned}$$
De plus
$$\frac{\ln(1+2x) - ln(1)}{2x - 0} \xrightarrow[x \to 0]{} 1 \quad \text{et} \quad \frac{4x - 0}{\sin(4x) - \sin(0)} \xrightarrow[x \to 0]{} 1,$$
donc
$$\frac{\ln(1+2x)}{\sin(4x)} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{2}.$$

— Étudions la limite de $\dfrac{\ln(x)}{x-1}$ en 1. On a,
$$\frac{\ln(x) - \ln(1)}{x - 1} = \frac{\ln(x)}{x - 1},$$
donc à l'aide du taux d'accroissement on a, $\dfrac{\ln(x) - \ln(1)}{x - 1} \xrightarrow[x \to 1]{} 1$. Ainsi,
$$\frac{\ln(x)}{x - 1} \xrightarrow[x \to 1]{} 1.$$

— On remarque que
$$x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \ln\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)$$
Or on sait que
$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$$
On évalue donc notre limite pour $a=2$, on a donc
$$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\left(1+\frac{2}{x}\right)^x\right) = \ln(e^2) = 2.$$

EXERCICE 128 (③) par Lancelot Achour[*]

Soit $x\in\mathbb{R}$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, soit
$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right).$$

a) En utilisant l'exercice 106 de **4.1**, déterminer la limite de la suite $(P_n(x))_{n\geq 0}$.

b) Pour n dans $\mathbb{N}^*$, soit :
$$u_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}\ (n \text{ radicaux}).$$
Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on pose :
$$v_n = \prod_{k=1}^{n} u_k.$$
En utilisant la question précédente et l'exercice 105 de **4.1**, montrer que
$$\frac{v_n}{2^n}\to\frac{2}{\pi}.$$
*Cette formule a été découverte par Viète (1593). On trouvera en **8.6** une autre expression de π comme «produit infini», due à Wallis.*

1. Si $x=0$, alors $P_n(0)=1$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, donc $(P_n(0))_{n\geq 1}$ tend vers 1.
Supposons $x\in\mathbb{R}^*$. D'après l'exercice 106 de **4.1**, on a que :
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad P_n(x) = \frac{1}{2^n}\frac{\sin(x)}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}.$$
Observons que :
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x}{2^n} = 0,$$
et puisque $\sin(u)/u$ tend vers 1 quand u tend vers 0, on déduit que
$$\frac{1}{x}\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{x},$$
d'où :
$$P_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\sin(x)}{x}.$$

2. D'après l'exercice 105 de **4.1**,
$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right),$$
ainsi :
$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad v_n = \prod_{k=1}^{n}2\cos\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right) = 2^n\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{1}{2^k}\frac{\pi}{2}\right) = 2^nP_n\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{v_n}{2^n} = P_n\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

avec la question précédente :

$$P_n\left(\frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{\pi}$$

Exercice 129 (③) par Neil Sherman et Elliot Gampel[*]

a) Déterminer la limite de $f(x) = \dfrac{1-\cos(x)}{x}$ en 0.

b) En utilisant la formule de duplication pour cos, déterminer la limite de $g(x) = \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$ en 0.

a) On remarque que, pour $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(x) = -\left(\frac{\cos(x)-\cos(0)}{x-0}\right) \xrightarrow[x\to 0]{} -\cos'(0).$$

Or, sachant que la dérivée de cos est $-\sin$,

$$-\cos'(0) = \sin(0) = 0.$$

Donc

$$f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

b) D'après la formule de duplication du cosinus, on a $\cos(x) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$. On obtient ainsi les égalités suivantes :

$$g(x) = \frac{1-2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+1}{x^2} = 2\frac{\left(1-\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{x^2} = \frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}.$$

Ce qui donne finalement

$$g(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2.$$

Posons $X = \dfrac{x}{2}$. Quand $x \to 0$, $X \to 0$. Or, selon les exemples utilisant le taux d'accroissement mentionné en **5.2**,

$$\frac{\sin(X)}{X} \xrightarrow[X\to 0]{} 1 \quad \text{donc} \quad \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} \xrightarrow[x\to 0]{} 1.$$

Par suite,

$$g(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}.$$

5.3 Mise en facteur du terme prépondérant

Exercice 130 (③) par Gildas Evano-Vautrin [*]

Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{\binom{n}{k}}{n^k}.$$

On pourra commencer par les cas $k = 0, 1, 2$. Dans le cas général, observer que $n \mapsto \dbinom{n}{k}$ est une application polynomiale de degré k, dont on précisera le coefficient dominant.

On fixe k. Soit $f : n \in [\![k, +\infty[\![\mapsto \binom{n}{k}$. Donc, pour $n \in [\![k, +\infty[\![$,

$$f(n) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1}{k!} \cdot \underbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1)}_{\text{k facteurs}},$$

ce qui est exactement un polynôme sous sa forme factorisée. C'est bien une application polynomiale, de degré k et de coefficient dominant est $\frac{1}{k!}$.

Le dénominateur de (u_n) est aussi un polynôme de degré k et de coefficient dominant 1.

Puisque (u_n) est un quotient de polynômes de même degré, on obtient :

$$u_n \longrightarrow \frac{1}{k!}.$$

EXERCICE 131 (③) par Tristan Hottier [*]

Trouver la limite en $+\infty$ de

$$f(x) = \frac{50x + x\ln(x)}{x\ln(x) + 3} \qquad g(x) = \frac{e^{-x} + \sqrt{x} + e^x + \cos x}{x^{20} + 2x^{2021}}$$
$$h(x) = \frac{e^x - 1}{x^6 + 2e^x + e^{\frac{x}{2}}} \qquad i(x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}$$
$$j(x) = \exp\left(-3\sqrt{x} + x - \ln(\left(x^2+1\right) + \cos(x)\right) \qquad k(x) = \sqrt{x}\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)$$

Limite de $f(x)$.

On a

$$f(x) = \frac{x(50 + \ln(x))}{x\ln(x) + 3} = \frac{x(50 + \ln(x))}{x\ln(x)} \times \frac{1}{1 + \frac{3}{x\ln(x)}} = \left(\frac{50}{\ln(x)} + 1\right)\left(\frac{1}{1 + \frac{3}{x\ln(x)}}\right).$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x)) = 1.$$

Limite de $g(x)$.

On a

$$g(x) = \frac{e^{-x} + \sqrt{x} + e^x + \cos(x)}{x^{20} + 2x^{2021}} = \frac{e^x}{2x^{2021}} \times \frac{\frac{1}{e^{2x}} + \frac{\sqrt{x}}{e^x} + 1 + \frac{\cos(x)}{e^x}}{\frac{1}{2x^{2001}} + 1}.$$

Par croissance comparée, $\frac{e^x}{2x^{2021}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ donc

$$\lim_{x\to+\infty} (g(x)) = +\infty.$$

Limite de $h(x)$. On a

$$h(x) = \frac{e^x}{e^x} \times \frac{1 - e^{-x}}{x^6 e^{-x} + 2 + e^{-\frac{x}{2}}} = \frac{1 - e^{-x}}{x^6 e^{-x} + 2 + e^{-\frac{x}{2}}}.$$

Par croissance comparée,

$$\lim_{x\to+\infty} (h(x)) = \frac{1}{2}.$$

Limite de $i(x)$ *:* On a

$$i(x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln(x)} = \frac{\ln\left(x\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)}{\ln(x)} = \frac{\ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} = 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}.$$

Ainsi,
$$\lim_{x\to+\infty}(i(x))=1$$

Limite de $j(x)$:

$$\begin{aligned} j(x) &= \exp\left(-3\sqrt{x}+x-\ln(\left(x^2+1\right)+\cos(x)\right)\\ &= \exp\left(x\left(\frac{-3}{\sqrt{x}}+1-\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}+\frac{\cos(x)}{x}\right)\right)\end{aligned}$$

Comme $\left(\frac{-3}{\sqrt{x}}+1-\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}+\frac{\cos(x)}{x}\right)\xrightarrow[x\to+\infty]{}1$, on a finalement

$$\lim_{x\to+\infty}(j(x))=+\infty$$

Limite de $k(x)$.

On a
$$k(x)=\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}=\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\quad\xrightarrow[x\to+\infty]{}\quad\frac{1}{2}.$$

5.4 Utilisation de la forme exponentielle

EXERCICE 132 (③) par Daniel Caby[*]

Déterminer les limites des suites définies par les formules

$$a_n=\frac{n^n}{2^{n^2}},\quad b_n=\frac{(\ln(n))^{n^2}}{\sqrt{n}^n},\quad c_n=\frac{a^{b^n}}{b^{a^n}}\qquad \text{où } (a,b)\in\mathbb{N}^{*2} \text{ et } 1<a<b.$$

- On a
$$a_n=\frac{n^n}{2^{n^2}}=\exp\left(n\ln(n)-n^2\ln(2)\right)=\exp\left[n^2\left(\frac{\ln(n)}{n}-\ln(2)\right)\right]$$
Comme $\frac{\ln(n)}{n}-\ln(2)\longrightarrow-\ln 2$, on a $n^2\left(\frac{\ln(n)}{n}-\ln(2)\right)\longrightarrow-\infty$ et enfin $a_n\to 0$.
- On a
$$\begin{aligned} b_n=\frac{(\ln(n))^{n^2}}{\sqrt{n}^n}&=\exp\left(n^2\ln(\ln(n))-n\ln(\sqrt{n})\right)\\ &=\exp\left(n^2\ln(\ln(n))-\frac{1}{2}n\ln(n)\right)=\exp\left[n^2\left(\ln(\ln(n))-\frac{\ln(n)}{2n}\right)\right]\end{aligned}$$
Comme $\ln(\ln(n))-\frac{\ln(n)}{2n}\to+\infty$, on a $n^2\left(\ln(\ln(n))-\frac{\ln(n)}{2n}\right)\to+\infty$ et enfin $b_n\to+\infty$.
- On a
$$c_n=\frac{a^{b^n}}{b^{a^n}}=\exp\left(b^n\ln(a)-a^n\ln(b)\right)=\exp\left[b^n\left(\ln(a)-\left(\frac{a}{b}\right)^n\ln(b)\right)\right].$$
On a $\left(\frac{a}{b}\right)^n\ln(b)\to 0$. De plus, $\ln(a)>0$ et $b^n\to+\infty$, donc $c_n\to+\infty$.

5.5 Complément : croissance comparée des suites $(a^n)_{n\geq 0}$ et $(n!)_{n\geq 0}$

5.6 Quelques études de suites

Exercice 133 (②) par Tristan Hottier [*]

La suite réelle $(u_n)_{n\geq 0}$ est définie par ses deux premiers termes u_0 et u_1 et la relation de récurrence
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{1}{2}\left(u_n + u_{n+1}\right).$$
On pose
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{n+1} - u_n.$$

a) Montrer que $(v_n)_{n\geq 0}$ est géométrique. Exprimer v_n en fonction de v_0 et n.

b) Exprimer u_n en fonction de u_0, u_1 et n. En déduire que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers une limite que l'on explicitera.

c) Reprendre cet exercice à l'aide de l'exercice 11 de **1.3**.

a) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculons v_{n+1}.
$$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + u_{n+1}\right) - u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n - u_{n+1}\right) = -\frac{1}{2}\left(u_{n+1} - u_n\right) = -\frac{1}{2}v_n.$$
Ainsi, $(v_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique de raison $q = -\dfrac{1}{2}$ et de premier terme v_0. On a donc
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = v_0\left(-\frac{1}{2}\right)^n = (u_1 - u_0)\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

b) On remarque que $u_n = v_{n-1} + u_{n-1} = v_{n-1} + v_{n-2} + u_{n-2} = \cdots = v_{n-1} + \cdots + v_0 + u_0$. Alors, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a la relation suivante :
$$u_n = (u_1 - u_0)\sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^k + u_0 = u_n = 2\left(u_1 - u_0\right)\frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{3} + u_0.$$
Comme $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \to 0$, on a
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{3}u_1 + \frac{1}{3}u_0.$$

c) On suit la méthode de l'exercice 11 de **1.3**. L'équation
$$x^2 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$
admet deux solutions réelles : $\lambda = -\dfrac{1}{2}$ et $\mu = 1$.
Il existe donc des réels α et β tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = \alpha\lambda^n + \beta\mu^n.$$
On exprime α et β en fonction de u_0 et u_1 en résolvant le système suivant
$$\begin{cases} \alpha + \beta = u_0 \\ -\frac{1}{2}\alpha + \beta = u_1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \beta = u_0 - \alpha \\ -\frac{3}{2}\alpha + u_0 = u_1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \beta = \frac{1}{3}u_0 + \frac{2}{3}u_1 \\ \alpha = -\frac{2}{3}\left(u_1 - u_0\right) \end{cases}$$
Et finalement,
$$u_n = -\frac{2}{3}\left(u_1 - u_0\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \beta \xrightarrow[n\to+\infty]{} \beta = \frac{2}{3}u_1 + \frac{1}{3}u_0.$$

Exercice 134 (②) par Tristan Hottier [*]

La suite réelle $(u_n)_{n\geq 0}$ est définie par ses deux premiers termes u_0 et u_1, tous deux strictement positifs, et la relation de récurrence
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \sqrt{u_n u_{n+1}}$$

On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \ln(u_n)$$

Justifier la définition de $(v_n)_{n\geq 0}$. En utilisant $(u_n)_{n\geq 0}$ et en utilisant l'exercice précédent, montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers une limite que l'on explicitera.

On vérifie par récurrence que $(u_n)_{n\geq 0}$ est bien définie et à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$, ce qui justifie l'existence de $(v_n)_{n\geq 0}$.

On commence par exprimer v_{n+2} en fonction de v_n et v_{n+1}. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+2} = \ln(u_{n+2}) = \frac{1}{2}\left(\ln(u_n) + \ln(u_{n+1})\right) = \frac{1}{2}v_n + \frac{1}{2}v_{n+1}.$$

D'après l'exercice précédent, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = 2(v_1 - v_0)\frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{3} + v_0.$$

Et donc

$$\lim_{n\to+\infty}(v_n) = \frac{2}{3}v_1 + \frac{1}{3}v_0.$$

Or, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = e^{v_n}$ ce qui entraîne

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n) = \exp\left(\frac{2}{3}v_1\right) \times \exp\left(\frac{1}{3}v_0\right).$$

Exercice 135 (②) par Tristan Hottier [*]

La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est définie par $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \sqrt{n+1} + \sin(u_n)$$

a) Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

b) Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

a) On commence par déterminer la variation de $(u_n)_{n\geq 0}$. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{n+1} + \sin(u_n).$$

Or, $-1 \leq \sin(u_n) \leq 1$, donc

$$-1 + \sqrt{n+1} \leq u_{n+1} - u_n \leq 1 + \sqrt{n+1}.$$

Comme $n \geq 0$, $\sqrt{n+1} \geq 1$ et $0 \leq u_{n+1} - u_n \leq 1 + \sqrt{n+1}$.

Ainsi, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante et, puisque $u_0 \in \mathbb{R}^+$, $(u_n)_{n\geq 0}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

b) On a, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} \geq \sqrt{n+1} + \sin(u_n) \geq \sqrt{n+1} - 1,$$

ce qui entraîne, d'après le théorème de minoration, que

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n) = +\infty.$$

Exercice 136 (③) par Tristan Hottier [*]

La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \cos(nu_n) + 2.$$

Minorer u_n en fonction de n et u_0 afin de montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} \geq u_n - 1 + 2 \geq u_n + 1$. On en déduit en raisonnant par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \geq u_0 + n.$$

D'après le théorème de minoration, on a donc

$$\lim_{n \to +\infty} (u_n) = +\infty.$$

EXERCICE 137 (③) par Tristan Hottier [*]

Déterminer, en utilisant un encadrement, la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{k^2}{n} \right\rfloor$$

On commence par encadrer $(u_n)_{n\geq 1}$ grâce à la relation

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x - 1 \leq \lfloor x \rfloor \leq x.$$

En prenant $x = \dfrac{k^2}{n}$ on obtient l'encadrement suivant pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k^2}{n} - 1 \right) \leq u_n \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n},$$

donc

$$\frac{1}{n^3} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n^3} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Or,

$$\frac{1}{n^3} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après le théorème des gendarmes, on a donc

$$\lim_{n \to +\infty} (u_n) = \frac{1}{3}.$$

EXERCICE 138 (③) par Tristan Hottier [*]

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note N_n le nombre de chiffres de l'écriture décimale de n : N_n vaut 1 si $1 \leq n \leq 9$, 2 si $10 \leq n \leq 99$... Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{N_n}{\ln(n)}$$

On exprimera N_n à l'aide des fonctions partie entière et logarithme décimal.

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$10^{N_n - 1} \leq n < 10^{N_n} \quad \Leftrightarrow \quad (N_n - 1) \leq \log(n) < N_n$$

donc $N_n - 1 = \lfloor \log(n) \rfloor$ c'est-à-dire $N_n = \lfloor \log(n) \rfloor + 1$. On a donc

$$\begin{aligned} \frac{\log(n)}{\ln(n)} \leq u_n \leq \frac{\log(n)+1}{\ln(n)} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\ln(n)}{\ln(10)\,\ln(n)} \leq u_n \leq \frac{1}{\ln(n)} \times \left(\frac{\ln(n)}{\ln(10)} + 1 \right) \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\ln(10)} \leq u_n \leq \frac{1}{\ln(10)} + \frac{1}{\ln(n)}. \end{aligned}$$

Par encadrement

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\ln(10)}.$$

Exercice 139 (③) par Neil Sherman [*]

Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{k}}.$$

Essayons de majorer et minorer $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{k}}$ pour obtenir sa limite. On remarque que, pour k dans $[\![1,n]\!]$, $\frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{n+\sqrt{k}} \geqslant \frac{1}{n+\sqrt{n}}$ donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{k}} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{n}} \geqslant \frac{n}{n+\sqrt{n}} \geqslant \frac{1}{1+1/\sqrt{n}}$$

et

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{k}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \leqslant 1.$$

Donc, par encadrement

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{k}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Exercice 140 (④) par Tristan Hottier [*]

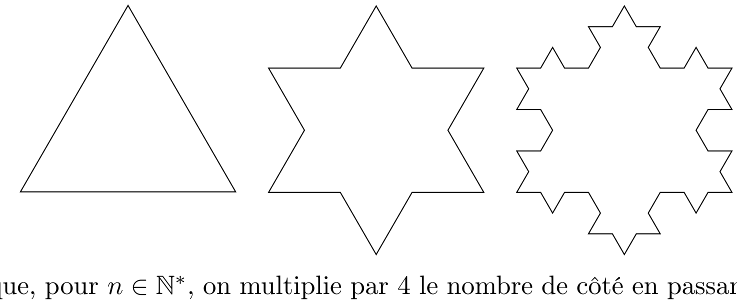
On construit une suite $(F_n)_{n\geq 1}$ de polygones de la manière suivante. On prend pour F_1 un triangle équilatéral dont les côtés ont pour longueur 1. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on passe de F_n à F_{n+1} en partageant chaque segment du pourtour de F_n en trois segments égaux, puis en substituant au segment central une réunion de deux segments égaux formant avec le segment supprimé un triangle équilatéral dirigé vers l'extérieur. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ soient c_n, ℓ_n, p_n et a_n le nombre de côtés, la longueur d'un côté, le périmètre et l'aire de F_n.

a) Dessiner sommairement F_1, F_2, F_3.
b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer c_n, ℓ_n et p_n en fonction de n. Déterminer la limite de $(p_n)_{n\geq 1}$.
c) Calculer a_1. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{3\sqrt{3}}{16}\left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

Montrer que $(a_n)_{n\geq 1}$ converge vers une limite finie que l'on calculera.

a) On trace F_1, F_2 et F_3 en suivant les indications de l'énoncé, ce qui donne (sans respecter la condition initiale sur la longueur des côtés de F_1) :



b) On remarque que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on multiplie par 4 le nombre de côté en passant de F_n à F_{n+1}. La suite $(c_n)_{n\geq 1}$ est géométrique de raison 4, d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad c_n = 3 \times 4^{n-1}.$$

On remarque ensuite que la longueur des côtés est quant à elle divisée par 3 en passant de F_n à F_{n+1}. La suite $(\ell_n)_{n\geq 1}$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$, d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \ell_n = \frac{1}{3^{n-1}}.$$

Enfin, le périmètre de F_n est le produit du nombre de côtés de F_n par la longueur des côtés de F_n. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = c_n \times \ell_n = \frac{4^{n-1}}{3^{n-2}} = \frac{9}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^n.$$

On a immédiatement

$$\lim_{n\to+\infty}(p_n) = +\infty.$$

c) On commence par calculer a_1. On retrouve donc la hauteur du triangle formé par F_1 grâce à la formule de la tangente dans le triangle rectangle :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}, \ \tan(\alpha) = \frac{\text{Longueur du côté opposé à } \alpha}{\text{Longueur du côté adjacent à } \alpha}.$$

Dans un triangle équilatéral, $\alpha = \frac{\pi}{3}$, ce qui permet de retrouver la hauteur h du triangle formé par F_1 : $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ainsi,

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

On cherche maintenant à établir une expression de a_{n+1} en fonction de a_n.

En passant de F_n à F_{n+1}, on prend l'aire de F_n et on lui rajoute c_n fois l'aire de triangles équilatéraux de côté ℓ_{n+1}.

Or, l'aire d'un triangle équilatéral de côté ℓ_{n+1} est donnée par $A = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \ell_{n+1}^2$. On a ainsi :

$$\begin{aligned} a_{n+1} = a_n + c_n\left(\frac{\sqrt{3}}{4} \times \ell_{n+1}^2\right) &= a_n + \frac{\sqrt{3}\, c_n\, \ell_{n+1}^2}{4} = a_n + \frac{\sqrt{3} \times 3 \times 4^{n-1} \times \frac{1}{3^{2n}}}{4} \\ &= a_n + 3\sqrt{3} \times \frac{4^{n-1}}{4 \times 9^n} = a_n + \frac{3\sqrt{3}}{16}\left(\frac{4}{9}\right)^n. \end{aligned}$$

On retombe bien sur la formule donnée :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{3\sqrt{3}}{16}\left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

Déterminons maintenant la limite finie de $(a_n)_{n\geq 1}$ si elle existe.

Pour cela, on remarque que :

$$\begin{aligned} a_n = a_{n-1} + \frac{3\sqrt{3}}{16}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} &= a_{n-2} + \frac{3\sqrt{3}}{16}\left(\left(\frac{4}{9}\right)^{n-2} + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right) \\ = \cdots = a_1 + \frac{3\sqrt{3}}{16}\left(\left(\frac{4}{9}\right)^1 + \cdots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, on a l'expression suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = a_1 + \frac{3\sqrt{3}}{16}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{4}{9}\right)^k.$$

Et finalement :

$$a_n = a_1 + \frac{3\sqrt{3}}{16} \times \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}{\frac{5}{9}} - \frac{3\sqrt{3}}{16} = a_1 + \frac{3\sqrt{3}}{16}\left(\frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}{\frac{5}{9}} - 1\right).$$

Or, $\dfrac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}{\frac{5}{9}} - 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{9}{5} - 1$ donc, $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{3\sqrt{3}}{16} \times \dfrac{4}{5} = \dfrac{2\sqrt{3}}{5}$.

Ainsi, $(a_n)_{n\geq 1}$ converge vers $\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$, qui est le produit de l'aire du triangle initial par $\dfrac{8}{5}$.

Exercice 141 (④) par Elliot Gampel[*]

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \cos(n\alpha)$, $v_n = \sin(n\alpha)$. Dans les questions a) et b), on suppose que $\alpha \notin \pi\mathbb{Z}$.

a) On suppose que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer v_n en fonction de u_{n+1} et u_n. En déduire que $(v_n)_{n\geq 0}$ converge.

b) On note ℓ et ℓ' les limites respectives de $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$. En considérant les suites $(u_{n+1})_{n\geq 0}$ et $(v_{n+1})_{n\geq 0}$, donner deux relations entre ℓ et ℓ'.

c) Conclure que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge si et seulement si $\alpha \in 2\pi\mathbb{Z}$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons u_{n+1} :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \cos\left((n+1)\,\alpha\right) \\ &= \cos\left(n\alpha + \alpha\right) \\ &= \cos\left(n\alpha\right)\cos\left(\alpha\right) - \sin\left(n\alpha\right)\sin\left(\alpha\right) \\ &= u_n \cos\left(\alpha\right) - v_n \sin\left(\alpha\right) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{-u_{n+1}}{\sin\left(\alpha\right)} + \frac{u_n \cos\left(\alpha\right)}{\sin\left(\alpha\right)}$$

On a supposé que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ. On en déduit que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ converge vers

$$\ell \operatorname{cotan}(\alpha) - \frac{\ell}{\sin(\alpha)}.$$

b) Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n \cos\left(\alpha\right) - v_n \sin\left(\alpha\right) \quad \text{et} \quad v_{n+1} = v_n \cos\left(\alpha\right) + u_n \sin\left(\alpha\right).$$

En notant ℓ la limite de $(u_n)_{n\geq 0}$ et ℓ' celle de $(v_n)_{n\geq 0}$, on obtient alors

$$\ell = \ell \cos\left(\alpha\right) - \ell' \sin\left(\alpha\right) \quad \text{et} \quad \ell' = \ell' \cos\left(\alpha\right) + \ell \sin\left(\alpha\right).$$

c) Ainsi,,

$$\ell' = \frac{\ell(\cos(\alpha) - 1)}{\sin(\alpha)} = \frac{\ell \sin(\alpha)}{1 - \cos(\alpha)},$$

où les dénominateurs ne s'annulent pas.
Donc, soit $\ell = 0$, soit

$$(1 - \cos(\alpha))^2 = -\sin^2(\alpha).$$

Au vu des signes, les deux membres sont nuls, ce qui contredit le fait que $\alpha \notin \pi\mathbb{Z}$.
Ainsi, $\ell = 0$. Mais alors $\ell' = 0$. Or

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n^2 + v_n^2 = 1.$$

Par passage à la limite

$$0^2 + 0^2 = 1 \quad \text{i.e.} \quad 0 = 1,$$

ce qui est absurde.

Donc, si $\alpha \notin \pi\mathbb{Z}$, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ ne converge pas. Posons $\alpha = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Si k est pair, $(u_n)_{n\geq 0}$ est constante égale à 1, donc convergente. Si k est impair, $(u_n)_{n\geq 0} = ((-1)^n)_{n\geq 0}$ diverge.

Ainsi, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge si et seulement si $\alpha \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Remarque Une démonstration analogue montre que $(v_n)_{n\geq 0}$ converge si et seulement si $\alpha \in \pi\mathbb{Z}$.

EXERCICE 142 (④) par Tristan Hottier et Martin Lambotte [∗]

a) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe exactement un entier naturel k tel que l'écriture décimale de 2^k comporte m chiffres et commence par 1.

b) Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, N_n le nombre de $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ tels que l'écriture décimale de 2^k commence par 1. Déterminer la limite de la suite $\left(\frac{N_n}{n}\right)_{n\geq 1}$.

---

a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On cherche $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$10^{k-1} \leq 2^m < 2.10^{k-1} \quad \text{i.e.} \quad (k-1)\ln(10) \leq m\ln(2) < (k-1)\ln(10) + \ln(2).$$

Or, tout intervalle $[a, a+1[$ où $a \in \mathbb{R}$ contient un unique entier. On en déduit l'existence et l'unicité de m.

b) Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, k_n le nombre de chiffres de 2^n. Alors

$$10^{k_n-1} \leq 2^n < 10^{k_n} \quad \text{i.e.} \quad \frac{\ln(2)}{\ln(10)}n < k_n \leq \frac{\ln(2)}{\ln(10)}n + 1.$$

D'après la question précédente, $N_n = k_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi

$$\frac{\ln(2)}{\ln(10)} \leq \frac{N_n}{n} \leq \frac{\ln(2)}{\ln(10)} + \frac{1}{n}.$$

Grâce au théorème des gendarmes, la suite $\left(\frac{N_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge vers $\frac{\ln(2)}{\ln(10)}$.

EXERCICE 143 (⑤) par Octave Koenig [∗]

Déterminer la limite de $(u_n)_{n\geq 0}$ où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} k!\,.$$

On pose $(S_n)_{n\geq 1}$ telle que $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!}{n!}$. On peut donc écrire $u_n = 1 + S_n$. On constate que, pour tout n, $S_n \geq 0$ et que, pour tout $n \geq 2$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{k!}{n!}\right) + \frac{1}{n} \leq \sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{(n-2)!}{n!}\right) + \frac{1}{n} \leq \frac{(n-1)!}{n!} + \frac{1}{n} \leq \frac{2}{n}.$$

Donc, par le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = 0$, d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

EXERCICE 144 (⑤) Par Zinedine Hamimed [∗]

Si $n \in \mathbb{N}^*$, soit N_n le nombre d'entiers de la forme $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ avec $k \in \{1, \ldots, n\}$. Montrer que $\left(\frac{N_n}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$ converge vers une limite à préciser.

Avant de commencer cet exercice, il convient de faire quelques remarques sur l'exercice et les intuitions de sa résolution. Tout d'abord, l'exercice 144 est un des exercices les plus difficiles du polycopié, même parmi les niveaux 5. Comprendre le raisonnement qui suit implique d'avoir cherché l'exercice un minimum. Ensuite, dans ce genre de problèmes une idée qui est toujours bonne est de regarder les petits cas.

Ici on pouvait assez rapidement conjecturer que tout les entiers $\leq \lfloor\sqrt{n}\rfloor$ sont atteints et aussi que si un entier $\geq \lfloor\sqrt{n}\rfloor + 1$ est atteint alors il l'est unique une fois. Il ne reste plus qu'a démontrer proprement ces conjectures.
Soit $n = qk + r$ la division euclidienne de n par k où $q \geq 1$ et $0 \leq r < k$.

Par définition
$$0 \leq n - qk < k \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{n}{q+1} < k \leq \frac{n}{q}.$$

Dès lors, on peut dégager une condition suffisante :
$$\text{si } \frac{n}{q} - \frac{n}{q+1} \geq 1 \ (*) \text{ alors il existe bien } k \in [\![1, n]\!] \text{ tel que } \left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor = q.$$

Remarque. C'est seulement une condition suffisante par exemple pour $n = 10$ et $q = 5$ on a $\frac{10}{5} - \frac{10}{6} < 1$ mais on a $10 = 5 \cdot 2 + 0$ donc $k = 2$ fonctionne.
Après quelques manipulation de $(*)$ on aboutit à l'inégalité $(**)$:
$$-q^2 - q + n \geq 0.$$

On étudie $f : x \mapsto -x^2 - x + n$. On trouve que l'intervalle solution de $(**)$ est :
$$\left[\frac{1-\sqrt{1+4n}}{2}, \frac{1+\sqrt{1+4n}}{2}.\right]$$

Donc si
$$q \in \left\{1, \dots, \left\lfloor\frac{1+\sqrt{1+4n}}{2}\right\rfloor\right\},$$
alors il existe un entier k tel que $q = \left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor$

On notera aussi que $\lfloor\sqrt{n}\rfloor \leq \left\lfloor\frac{1+\sqrt{1+4n}}{2}\right\rfloor$.

Conclusion partielle :
$$\text{Si } \ q \in [\![1, \lfloor\sqrt{n}\rfloor]\!], \quad \exists k \in [\![1, n]\!] \quad \text{tel que} \quad q = \left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor. \qquad (1)$$

$\star_1$ On montre que, si $k \in [\![1, \lfloor\sqrt{n}\rfloor - 1]\!]$ alors
$$\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor \geq 1 + \lfloor\sqrt{n}\rfloor.$$

En effet,
$$\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor \geq \left\lfloor\frac{n}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor - 1}\right\rfloor \geq \left\lfloor\frac{n}{\sqrt{n}-1}\right\rfloor.$$

Or, $\frac{n}{\sqrt{n}-1} \geq \sqrt{n} + 1$ (identité remarquable).

D'où, par croissance de la fonction partie entière, $\left\lfloor\frac{n}{\sqrt{n}-1}\right\rfloor \geq \lfloor\sqrt{n}\rfloor + 1$ et on en tire le résultat.

$\star_2$ Si $k \in [\![1 + \lfloor\sqrt{n}\rfloor, n]\!]$ alors $\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor \leq \lfloor\sqrt{n}\rfloor$ et
$$\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor \leq \left\lfloor\frac{n}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor + 1}\right\rfloor \leq \frac{n}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor + 1} < \frac{n}{\sqrt{n}} < \sqrt{n},$$

donc en particulier :
$$\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor \leq \lfloor\sqrt{n}\rfloor.$$

Montrons que si $k \in [\![1, n]\!] \backslash \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ alors les réciproques de $\star_1$ et $\star_2$ sont vraies.

Démontrons la réciproque de $\star_1$. Supposons par l'absurde que

$$\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \geq \lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1 \quad \text{où} \quad k \in [\![1 + \lfloor \sqrt{n} \rfloor, n]\!].$$

Alors, en vertu de $\star_2$, on aurait aussi $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor$, ce qui fournit une contradiction qui permet d'établir la réciproque de $\star_1$. On peut raisonner de la même manière pour la réciproque de $\star_2$.

Maintenant, on montre que l'application

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} [\![1, \lfloor \sqrt{n} \rfloor - 1]\!] & \to & [\![\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1, n]\!] \\ k & \mapsto & \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \end{array}$$

dont l'existence est prouvée par $\star_1$, est injective, c'est-à-dire que tout élément de $[\![\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1, n]\!]$ a au plus un antécédent par f.[1]

Soient $k, k' \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor - 1$ tels que $k < k'$ et que

$$\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{k'} \right\rfloor = q.$$

Alors il existe $r \in [\![0, k-1]\!]$ et $r' \in [\![0, k'-1]\!]$, tels que $n = qk + r = qk' + r'$. Donc :

$$q(k - k') = r' - r < k' \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor - 1.$$

Or $q \geq \lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1$ donc $k = k'$. L'application f est bien injective.

Donc si $k \in [\![1, n]\!] \backslash \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ alors en utilisant la réciproque de $\star_1$, il vient qu'à chaque $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ dans $[\![\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1, n]\!]$ correspond au moins un k dans $[\![1, \lfloor \sqrt{n} \rfloor - 1]\!]$, soit un antécédent par f. Grâce à l'injectivité de f, on sait que cet antécédent est unique, et donc, selon $\star_1$, à chaque k dans $[\![1, \lfloor \sqrt{n} \rfloor - 1]\!]$ correspond un $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ dans $[\![\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1, n]\!]$ différent. Il vient donc :

$$\text{on a exactement } \ \lfloor \sqrt{n} \rfloor - 1 \ \text{ entiers } q \geq \lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1 \text{ atteints.}$$

Donc si $k \in [\![1, n]\!]$ on a au plus

$$\lfloor \sqrt{n} \rfloor \ \text{ entiers } q \geq \lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1 \text{ atteints.}$$

Dans le cas où $\left\lfloor \frac{n}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \right\rfloor \in \Im(f)$, et au moins $\lfloor \sqrt{n} \rfloor - 1$ si $\left\lfloor \frac{n}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \right\rfloor \notin \Im(f)$.

De plus, d'après l'argument (1) tous les entiers $q \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ sont atteints.

On peut finir le problème par un encadrement de N_n.

Donc,

$$\lfloor \sqrt{n} \rfloor + \lfloor \sqrt{n} \rfloor - 1 = 2\lfloor \sqrt{n} \rfloor - 1 \leq N_n \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor + \lfloor \sqrt{n} \rfloor = 2\lfloor \sqrt{n} \rfloor.$$

D'où le résultat :

$$\frac{N_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 2.$$

6 Dérivation

6.1 Calcul des dérivées

Exercice 145 (①) par Jean Maltère [∗]

Pour chacune des fonctions ci-après, déterminer l'ensemble de définition et calculer la dérivée.

1. La notion d'injectivité sera vue en sup.

$$
\begin{array}{lll}
a : x \mapsto \ x^3\cos(5x+1) & b : x \mapsto \ e^{\cos x} & c : x \mapsto \ x\ln(x) \\
d : x \mapsto \ \ln(e^x+1) & e : x \mapsto \ e^{x^3+2x^2+3x+4} & f : x \mapsto \ e^{\sqrt{x^2+x+1}} \\
g : x \mapsto \ \ln(e^x+\sin(x)) & h : x \mapsto \ \dfrac{x}{x^2+1} & i : x \mapsto \ \dfrac{\cos(2x)}{x^2-2} \\
j : x \mapsto \ \ln(\cos(2x)) & k : x \mapsto \ \dfrac{x}{\sin(x)} & l : x \mapsto \ \ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right) \\
m : x \mapsto \ln\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\right) & n : x \mapsto \ \ln(\ln(x)) & o : x \mapsto \ \ln(\ln(\ln(x))) \\
p : x \mapsto \ \dfrac{\cos(x^2)}{\ln\left(\sqrt{1+e^x}\right)} & &
\end{array}
$$

Pour la fonction g, on n'explicitera pas l'ensemble de définition.

a : La fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ a'(x) = x^2(3\cos(5x+1) - 5x\sin(5x+1)).$$

b : La fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ b'(x) = -\sin(x)\, e^{\cos(x)}.$$

c : La fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ c'(x) = \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1.$$

d : La fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ d'(x) = \frac{e^x}{e^x+1}.$$

e : La fonction est définie sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e'(x) = \left(3x^2+4x+3\right) e^{x^3+2x^2+3x+4}.$$

f : La fonction est définie sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} e^{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

g : Soit I l'ensemble de dérivabilité de g,

$$\forall x \in I,\ g'(x) = \frac{e^x+\cos(x)}{e^x+\sin(x)}.$$

h : La fonction est définie sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = \frac{x^2+1-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}.$$

i : La fonction est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$,

$$i'(x) = \frac{2\sin(2x)(x^2-2) - 2x\cos(2x)}{(x^2-2)^2} = \frac{-2\left(\sin(2x)(x^2-2) + x\cos(2x)\right)}{(x^2-2)^2}.$$

j : La fonction est définie sur $D = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ \frac{\pi}{4}+k\pi\right[$ et

$$\forall x \in D, \quad j'(x) = \frac{-2\sin(2x)}{\cos(2x)}.$$

k : La fonction est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ et

$$\forall x \in D, \quad k'(x) = \frac{\sin(x) - x\cos(x)}{\sin^2(x)}.$$

l : La fonction est définie sur $]1, +\infty[$ et, pour tout $x \in]1; +\infty[$,

$$l'(x) = \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right) \times \frac{1}{x - \sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2-1} - x}{\sqrt{x^2-1}} \times \frac{1}{-(\sqrt{x^2-1} - x)} = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

m : La fonction est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$$m'(x) = \left[\frac{x - 1 - (x+1)}{(x-1)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}\right] \times \frac{1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} = -\frac{2}{(x-1)^2} \times \frac{1}{2\frac{x+1}{x-1}} = -\frac{1}{x^2-1}$$

n : La fonction est définie sur $]1; +\infty[$ et sur cet intervalle, $n'(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$.

o : La fonction o est définie sur $]e, +\infty[$ et

$$\forall x \in]e, +\infty[, \quad o'(x) = \frac{1}{x\,\ln(x)\,\ln(\ln(x))}.$$

p : La fonction est définie sur $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad p'(x) &= \frac{-2x\sin(x^2)\ln(\sqrt{1+e^x} - \cos(x^2) \cdot \frac{e^x}{2(1+e^x)}}{\ln(\sqrt{1+e^x})^2} \\ &= -\frac{2x\sin(x^2)}{\ln(\sqrt{1+e^x})} - \frac{e^x\cos(x^2)}{2(e^x+1)\ln(\sqrt{1+e^x})^2} \end{aligned}$$

EXERCICE 146 (②) par Alexandre Paresy [*]

Soient f et g deux fonctions deux fois dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose $h = g \circ f$. Si $x \in \mathbb{R}$, donner une expression de $h''(x)$

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a, en utilisant le théorème donnant la dérivée d'une fonction composée,

$$\begin{aligned} h(x) &= g(f(x)), \qquad h'(x) = f'(x) \times g'(f(x)) \\ h''(x) &= f''(x) \times g'(f(x)) + f'(x) \times f'(x) \times g''(f(x)) = f''(x) \times g'(f(x)) + (f'(x))^2 \times g''(f(x)) \end{aligned}$$

EXERCICE 147 (①) par Thomas Taalbi [*]

Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Procédons par récurrence. Pour n dans $\mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}_n$ la propriété de l'énoncé.

Initialisation. $\mathcal{P}_0$ est immédiat. En effet, si $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos^{(0)}(x) = \cos\left(x + 0\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x).$$

Donc $\mathcal{P}_0$ est vérifiée.

Hérédité. On fixe n dans $\mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. On remarque que la dérivée de $\cos^{(n)}(x)$ est $\cos^{(n+1)}(x)$. On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

En dérivant par rapport à x, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos^{(n+1)}(x) = -\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

En utilisant les formules d'addition, on obtient :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \qquad -\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) &= -\sin(x)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos(x)\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\\ &= \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\\ &= \cos\left(x + \frac{\pi}{2} + \frac{n\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)\\ &= \cos^{(n+1)}(x).\end{aligned}$$

Ce qui est exactement $\mathcal{P}_{n+1}$.

EXERCICE 148 (②) par Tristan Hottier [*]

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, f une fonction n fois dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = f(ax + b).$$

Pour $0 \leq k \leq n$ et $x \in \mathbb{R}$, donner une expression de $g^{(k)}(x)$.

Pour commencer, on note que $\forall k \in \{0, \dots, n\}$, g est k fois dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On note également que g est de la forme $u \circ v$ donc de dérivée $v' \times (u' \circ v)$.

Ainsi, pour tous k de $\{0, \dots, n\}$ et $x \in \mathbb{R}$, on a successivement

$$\begin{aligned}g(x) &= f(ax + b)\\ g^{(1)}(x) &= af^{(1)}(ax + b)\\ g^{(2)}(x) &= a^2 f^{(2)}(ax + b)\\ &\dots\\ g^{(k)}(x) &= a^k f^{(k)}(ax + b)\end{aligned}$$

On en conclut que si $0 \leq k \leq n$ alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g^{(k)}(x) = a^k f^{(k)}(ax + b)$$

Remarque. Il s'agit en fait d'une récurrence, non formalisée vu son caractère facile.

EXERCICE 149 (②) par Mathieu Chebib [*]

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f(x) = \frac{1}{x}.$$

Donner une expression simple de $f^{(n)}(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^*$.

Si $f(x) = \dfrac{1}{x}$, les dérivées successives de f sont :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{x^3}, \quad f^{(3)}(x) = -\frac{6}{x^4}, \quad f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5}$$

et ainsi de suite... On peut conjecturer alors que, pour tout entier naturel n,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \frac{1}{x^{n+1}}. \qquad (\mathcal{P}_n)$$

Démontrons la propriété $\mathcal{P}_n$ par récurrence.

Initialisation. Si $x \in \mathbb{R}^*$, $f^{(0)}(x) = f(x) = \dfrac{1}{x} = (-1)^0 \times 0! \dfrac{1}{x^{0+1}}$, et $\mathcal{P}_0$ est vérifiée.

Hérédité. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un entier naturel $n \geq 0$. On a alors, pour $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \frac{1}{x^{n+1}}.$$

En dérivant les deux membres de l'égalité on obtient, pour $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f^{(n+1)}(x) = -(-1)^n n! \frac{(n+1)x^n}{(x^{n+1})^2}.$$

Soit

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}(n+1)! \frac{x^n}{x^{2n+2}}.$$

Ce qui donne finalement

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}(n+1)! \frac{1}{x^{n+2}},$$

c'est exactement $\mathcal{P}_{n+1}$.

EXERCICE 150 (③) par Maorine Pereira [$*$]

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = e^{-x^2}.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n à coefficients réels tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f^{(n)}(x) = P_n(x) e^{-x^2}.$$

Expliciter P_0, P_1, P_2.

Démontrons la propriété par récurrence.

Initialisation : On a, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = 1 \times e^{-x^2},\ f'(x) = -2xe^{-x^2}, f''(x) = -2e^{-x^2} - 2x \times (-2x)e^{-x^2} = (4x^2 - 2)e^{-x^2}.$$

D'où le résultat pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$ en définissant les polynômes P_0, P_1 et P_2 par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P_0(x) = 1,\ P_1(x) = -2x,\ P_2(x) = 4x^2 - 2.$$

Hérédité : Supposons la propriété vraie au rang $n \in \mathbb{N}$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = P_n(x)\, e^{-x^2}$.
Dérivons $f^{(n)}$. Il vient, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f^{(n+1)}(x) = P_n'(x)\, e^{-x^2} + P_n(x)\ (-2x)e^{-x^2} = (P_n'(x) - 2xP_n(x))e^{-x^2}.$$

On note :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P_{n+1}(x) = P_n'(x) - 2xP_n(x).$$

P_{n+1} est bien un polynôme à coefficients réels, ce qui achève la récurrence.

EXERCICE 151 (①) par Maorine Pereira [*]

Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a) On suppose f paire. Que dire de f' ?

b) Même question si f est impaire.

c) Même question si f est périodique de période T, où $T \in \mathbb{R}^{+*}$.

a) On suppose f paire, montrons que f' est impaire.
On a tout d'abord :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(-x) = f(x)$$

Dérivons cette relation. On a, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$-f'(-x) = f'(x) \quad \Leftrightarrow \quad f'(-x) = -f'(x)$$

D'où f' impaire.

b) On suppose f impaire, montrons que f' est paire.
On a cette fois :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(-x) = -f(x)$$

Dérivons cette relation. On a, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$-f'(-x) = -f'(x) \quad \Leftrightarrow \quad f'(-x) = f'(x)$$

D'où f' paire.

c) Soit $T \in \mathbb{R}^{+*}$. On suppose que f est T-périodique, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x+T) = f(x)$$

En dérivant, il vient, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x+T) = f'(x)$$

Donc f' est également T-périodique.

EXERCICE 152 (③) par Jean Maltère [*]

a) Déterminer deux réels a et b tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}, \qquad \frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}.$$

b) Pour n dans $\mathbb{N}^*$, calculer en utilisant a) la dérivée n-ième de

$$f : x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \mapsto \frac{1}{x(x+1)}.$$

a) On constate que

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} = \frac{a(x+1)+bx}{x(x+1)}.$$

Donc, par identification, on a l'équation
$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$, $ax+a+bx = 1$ qui a comme solution $(a,b) = (1,-1)$ (en effet, $x+1-x=1$).

b) On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}, \quad f(x) = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

Donc,

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}, \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}.$$

En raisonnant par récurrence sur n (ou en utilisant l'exercice 149), on vérifie que

$$\forall (x,n) \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \times \mathbb{N}^*, \quad f^{(n)}(x) = (-1)^n \left(\frac{n!}{x^{n+1}} - \frac{n!}{(x+1)^{n+1}} \right).$$

Exercice 153 (③) par Jean Maltère [*]

Si f est une fonction dérivable sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, on appelle dérivée logarithmique de f la fonction $\dfrac{f'}{f}$.

a) Soient u et v deux fonctions dérivables sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^*$. Exprimer la dérivée logarithmique de uv en fonction de celles de u et v.

b) Généraliser la question précédente à un produit de n facteurs.

c) Soient n dans $\mathbb{N}^*$, $a_1 < \cdots < a_n$ des nombres réels et P la fonction polynôme définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - a_i).$$

Calculer la dérivée logarithmique de P sur chacun des intervalles où cette fonction est définie. La dérivée logarithmique d'un produit est donc plus lisible que la dérivée : les produits parasites ont disparu.

a) La dérivée logarithmique de uv est la fonction :

$$\frac{(uv)'}{uv} = \frac{u'v + uv'}{uv} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}.$$

b) Soient a_i, pour $i \in [\![1, n]\!]$ où $n \in \mathbb{N}^*$, des fonctions dérivables sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^*$. Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ «la dérivée logarithmique de $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_i$ est égale à la somme des dérivées logarithmiques des a_i».

Initialisation : $\dfrac{{a_1}'}{a_1}$ vérifie immédiatement $\mathcal{P}_1$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie. On a donc

$$\frac{\left(\prod\limits_{i=1}^{n} a_i\right)'}{\prod\limits_{i=1}^{n}(a_i)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(a_i)'}{a_i}.$$

Alors, la dérivée logarithmique de $\displaystyle\prod_{i=1}^{n+1} a_i$ peut être exprimée par :

$$\frac{\left[\prod\limits_{i=1}^{n}(a_i) \times a_{n+1}\right]'}{\prod\limits_{i=1}^{n+1} a_i} = \frac{\left(\prod\limits_{i=1}^{n} a_i\right)' \times \cancel{a_{n+1}}}{\prod\limits_{i=1}^{n}(a_i) \times \cancel{a_{n+1}}} + \frac{{a_{n+1}}' \times \prod\limits_{i=1}^{n} a_i}{\prod\limits_{i=1}^{n+1} a_1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{(a_i)'}{a_i} + \frac{{a_{n+1}}'}{a_{n+1}} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{(a_i)'}{a_i},$$

ce qui est exactement $\mathcal{P}_{n+1}$.

c) Grâce à la question précédente, la dérivée logarithmique de P est donc la fonction $\dfrac{P'}{P}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}, \qquad \frac{P'}{P}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(x - a_i)}.$$

Exercice 154 (②) par Maorine Pereira [*]

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable au point 0. Déterminer la limite de $\dfrac{f(x^2) - f(0)}{x}$ lorsque x tend vers 0.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable au point 0. Étudions $\dfrac{f(x^2)-f(0)}{x^2-0}$. On pose $y=x^2$. On a, par définition de la dérivée en un point,

$$\lim_{y\to 0}\frac{f(y)-f(0)}{y-0}=f'(0),\qquad f'(0)\in\mathbb{R}.$$

Par composition de limites, comme x^2 tend vers 0 en 0,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)-f(0)}{x^2}=f'(0).$$

Enfin, par produit de limites,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}x\times\frac{f(x^2)-f(0)}{x^2}=0.$$

EXERCICE 155 (④) par Loïse Launay [*]

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(0)=0$ et

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\qquad f(x)=x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

a) Calculer $f'(x)$ si $x\in\mathbb{R}^*$.

b) En revenant à la définition, montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.

c) Montrer que la fonction f' n'est pas continue en 0.

a) La fonction f est définie et dérivable sur l'ensemble des réels non nuls en tant que composée et produit de fonctions dérivables.

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\qquad f'(x)=2x\cos\left(\frac{1}{x}\right)+\sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

b) Une fonction est dérivable en un point si et seulement si le taux d'accroissement de la fonction en ce point a une limite réelle. Or,

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\qquad \left|\frac{f(x)}{x}\right|=|x|\,\left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right|\le|x|.$$

La fonction majorante tend vers 0, donc la fonction f est dérivable en 0 de dérivée nulle.
La fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

c) Une fonction est continue en 0 si elle admet une limite finie en 0. Tel n'est pas le cas pour f'. En effet, si $n\in\mathbb{N}$, on a

$$f'\left(\frac{1}{n\pi+\pi/2}\right)=(-1)^n.$$

Or, la suite $\left(\frac{1}{n\pi+\pi/2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 alors que la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

6.2 Tangente à un graphe

EXERCICE 156 (①) par Loïse Launay [*]

Soient a un nombre réel non nul, x_1 et x_2 deux nombres réels tels que $x_1<x_2$, f la fonction :

$$x\in\mathbb{R}\mapsto ax^2.$$

Montrer que la tangente au graphe de f au point d'abscisse $\dfrac{x_1+x_2}{2}$ est parallèle à la droite joignant les points du graphe de f d'abscisses x_1 et x_2

Deux droites du plan sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur. Exprimons donc le coefficient directeur de la tangente au graphe de f au point d'abscisse $\frac{x_1+x_2}{2}$ et celui de la droite joignant les points du graphe de f d'abscisses x_1 et x_2. Le coefficient directeur de la tangente au graphe de f au point d'abscisse $\frac{x_1+x_2}{2}$ est égal au nombre dérivé de la fonction en ce point. Or la fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = 2ax.$$

On en déduit donc le coefficient directeur de la tangente au graphe de f au point d'abscisse $\frac{x_1+x_2}{2}$:

$$f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = 2a\,\frac{x_1+x_2}{2} = a(x_1+x_2).$$

Le coefficient directeur, noté m, de la droite joignant les points du graphe de f d'abscisses x_1 et x_2 est égal à :

$$m = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{a{x_2}^2 - a{x_1}^2}{x_2-x_1} = \frac{a({x_2}^2-{x_1}^2)}{x_2-x_1} = a(x_1+x_2) = f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

On a établi l'égalité de pentes désirées :

$$m = f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

EXERCICE 157 (②) par Matilde Cruz [*]

a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer l'équation de la droite D_n, tangente au graphe de la fonction ln au point n.

b) Soit x_n l'abscisse du point d'intersection de D_n et l'axe Ox. Déterminer x_n. Quelle est la limite de $(x_n)_{n\geq 1}$?

a) L'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse n est $y = f'(n)(x-n)+f(n)$. Ici, $f = \ln$. La droite D_n a donc pour équation

$$y = \frac{x}{n} - 1 + \ln(n).$$

b) Pour obtenir l'intersection de la tangente D_n et de l'axe Ox, il suffit de résoudre l'équation :

$$\frac{x}{n} - 1 + \ln(n) = 0$$

qui a pour seule solution

$$x_n = n(1-\ln(n)).$$

On a $x_n \to -\infty$.

EXERCICE 158 (③) par Loïse Launay [*]

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables en 0. On suppose que les graphes des trois fonctions f, g , $\frac{fg}{2}$ ont même tangente au point d'abscisse 0. Quelles sont les équations possibles pour cette tangente ?

Écrivons les équations des tangentes aux trois courbes.
La fonction f est dérivable en 0. Une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0 est $y = f'(0)(x-0)+f(0)$.
Soit :

$$y = f'(0)\,x + f(0).$$

La fonction g est dérivable en 0. Une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse 0 est
$$y = g'(0)\,x + g(0).$$

La fonction $\frac{fg}{2}$ est dérivable en 0 en tant que produit de fonctions dérivables. Une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction $\frac{fg}{2}$ au point d'abscisse 0 est
$$y = \frac{f'(0)\,g(0) + f(0)\,g'(0)}{2}x + \frac{f(0)\,g(0)}{2}.$$

On suppose que le graphe des trois fonctions f, g et $\frac{fg}{2}$ ont même tangente au point d'abscisse 0. Par identification des coefficients constants dans les équations réduites, on obtient le système (S) suivant
$$\begin{cases} f'(0) = g'(0) = \dfrac{f'(0)g(0) + f(0)g'(0)}{2} \\ f(0) = g(0) = \dfrac{f(0)g(0)}{2} \end{cases}.$$

Pour résoudre ce système, on fait une disjonction de cas.

– Si $f(0) = g(0) = 0$, alors (S) donne $f'(0) = g'(0) = 0$. Réciproquement, si $f(0) = g(0)$ et $f'(0) = g'(0) = 0$, la droite d'équation $y = 0$ est la tangente commune aux trois graphes considérés au point d'abscisse $x = 0$.

– Si $f(0) = g(0) \neq 0$, alors (S) donne $f(0) = g(0) = 2$, puis $f'(0) = g'(0) = 0$. Réciproquement, si $f(0) = g(0) = 2$ et $f'(0) = g'(0) = 0$, la droite d'équation $y = 2$ est la tangente commune aux trois graphes considérés au point d'abscisse $x = 0$.

Exercice 159 (④) par Alexandre Paresy [*]

Soient a un réel non nul, f la fonction :
$$x \in \mathbb{R} \mapsto ax^2.$$

Si p et q sont des nombres réels, on note $\Delta_{p,q}$ la droite d'équation $y = px + q$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur p et q pour que $\Delta_{p,q}$ soit tangente au graphe de f.

On a $f'(x) = 2ax$. Pour tout nombre réel α, la tangente à f au point d'abscisse α a pour équation :
$$y = f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha).$$

On peut simplifier :
$$y = 2a\alpha x - 2a\alpha^2 + a\alpha^2 \quad \Leftrightarrow \quad y = 2a\alpha x - a\alpha^2.$$

Ainsi, (p, q) convient si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $(p, q) = (2a\alpha, -a\alpha^2)$, ce qui implique que $p^2 = -4aq$.

Réciproquement, si $p^2 = -4q$, on pose $\alpha = \frac{p}{2a}$ et alors $q = -a\alpha^2$. La condition nécessaire et suffisante recherchée est donc $p^2 = -4q$.

Exercice 160 (②) par Alexandre Paresy [*]

a) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, x_0 un élément de I tel que $f'(x_0) \neq 0$. Calculer l'abscisse du point x_1 en lequel la tangente au graphe de f au point d'abscisse x_0 coupe l'axe (Ox).

b) On suppose que a est un nombre réel positif, que f est la fonction définie par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^2 - a.$$

Avec les notations précédentes, vérifier que
$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right).$$

a) On écrit l'équation de la tangente à f en x_0 :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Par hypothèse, x_1 est l'abscisse du point d'intersection entre cette tangente et la droite d'équation $y = 0$. Si on note y_1 l'ordonnée de ce point, on a alors :

$$y_1 = f'(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_0) = 0 \iff f'(x_0)(x_1 - x_0) = -f(x_0).$$

Puisque $f'(x_0) \neq 0$, ceci est équivalent à

$$x_1 - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \iff x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

b) On a $f'(x) = 2x$, ce qui nous donne en remplaçant :

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^2 - a}{2x_0} = \frac{2x_0^2 - x_0^2 + a}{2x_0} = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right).$$

EXERCICE 161 (③) par Estelle Ta [*]

Soit a dans $\mathbb{R}^{+*}$. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est définie par son premier terme u_0, élément de $\mathbb{R}^{+*}$, et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) = f_a(u_n)$$

où la fonction f_a est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad f_a(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right).$$

a) Étudier f_a et donner sommairement l'allure de son graphe.

b) Justifier que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est bien définie et à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$.

c) Établir les inégalités :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad f_a(x) \geq \sqrt{a},$$
$$\forall x \in [\sqrt{a}; +\infty[\qquad f_a(x) \leq x$$

d) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante, puis que cette suite converge vers $\sqrt{a}$.

e) Pour n dans $\mathbb{N}$ on pose

$$v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}.$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = v_n^2.$$

f) Exprimer v_n en fonction de n.

g) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leq u_n - \sqrt{a} \leq (u_1 + \sqrt{a})\left(\frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}}\right)^{2^n}.$$

Conclure que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers $\sqrt{a}$.

h) On prend $a = 2$, $u_0 = 1$. Représenter graphiquement la fonction f_2 et les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$. Écrire l'inégalité de la question précédente dans ce cas. Comment choisir n pour obtenir une valeur approchée à 10^{-5} près de $\sqrt{2}$? Faire les calculs correspondants.

a) On a

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad f_a'(x) = \frac{1}{2} - \frac{a}{2x^2}.$$

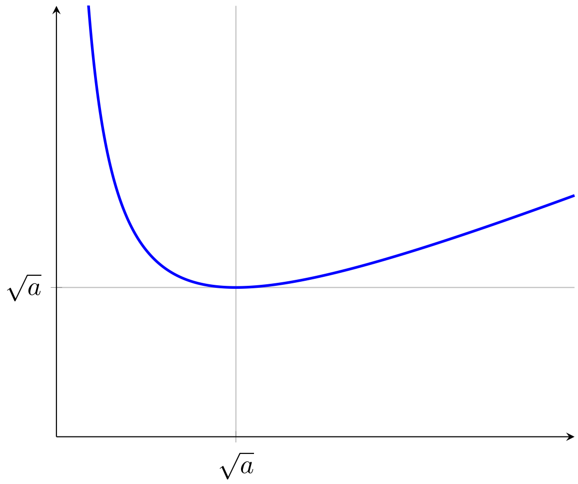
Donc

$$f_a'(x) \geqslant 0 \iff \frac{1}{2} - \frac{a}{x^2} \geqslant 0 \iff \frac{1}{2} \geqslant \frac{a}{x^2} \iff x \geqslant \sqrt{a}.$$

De plus, $f_a(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{a} + \dfrac{a}{\sqrt{a}}\right) = \sqrt{a}$. On obtient le tableau suivant :

x	0		$\sqrt{a}$		$+\infty$
signe de $f_a'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
variations de f_a	$\|$	$\searrow$	$\sqrt{a}$	$\nearrow$	

Avec un graphe de l'allure suivante :



b) La fonction f_a est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$. On sait que $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}^{+*}$. Ainsi $(u_n)_{n\geq 0}$ est définie et à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$.

c) L'étude de f_a montre que

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad f_a(x) \geq f_a(\sqrt{a}) = \sqrt{a}.$$

Par ailleurs, pour $x \geq \sqrt{a}$,

$$f_a(x) - x = \frac{1}{2}\left(\frac{a - x^2}{x}\right) \leq 0.$$

d) On sait que $f_a(x) \geqslant \sqrt{a}$ pour tout x positif non nul, donc $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est à valeurs dans $[\sqrt{a}, +\infty[$. Or on sait que $\forall x \in [\sqrt{a}, +\infty[$, $f_a(x) \leqslant x$. Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_a(u_n) \leqslant u_n$, donc $u_{n+1} \leqslant u_n$. La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante, minorée par 0.

La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée donc converge vers un réel noté $\ell \geq 0$. Comme $(u_{n+1})_{n\geq 0}$ converge vers ℓ, on a

$$\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{a}{\ell}\right) \quad \text{i.e.} \quad \ell = \frac{a}{\ell} \quad \text{i.e.} \quad \ell = \sqrt{a}.$$

Donc $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers $\sqrt{a}$.

e) On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_{n+1} = \left(\frac{u_{n+1} - \sqrt{a}}{u_{n+1} + \sqrt{a}}\right) = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) - \sqrt{a} \times \frac{1}{\frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) + \sqrt{a}}.$$

En simplifiant et en réduisant au même dénominateur, on obtient

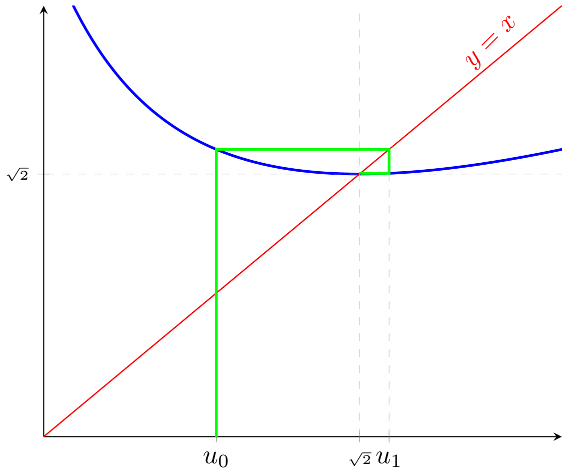
$$\frac{u_n^2 + a - 2u_n\sqrt{a}}{u_n^2 + a + 2u_n\sqrt{a}} = \left(\frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}\right)^2 = v_n^2.$$

f) On a $v_0 = \left(\dfrac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}}\right)$. On observe que $v_1 = v_0^2$, $v_2 = v_1^2 = v_0^4$.

On conjecture que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \left(\frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}}\right)^{2^n}.$$
Cette conjecture est facilement démontrable par récurrence simple, sachant que $v_{n+1} = v_n^2$ et que $(v_0^{2^n})^2 = v_0^{2\times 2^n} = v_0^{2^{n+1}}$.

g) La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante donc
$$\begin{aligned} u_n \leqslant u_1 \Rightarrow \quad & u_n + \sqrt{a} \leqslant u_1 + \sqrt{a} \quad \Rightarrow \quad 1 \leqslant \frac{u_1 + \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}} \\ & \Rightarrow u_n - \sqrt{a} \leqslant (u_1 + \sqrt{a}) \left(\frac{u_1 + \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}\right) \\ & \Rightarrow \quad u_n - \sqrt{a} \leqslant (u_1 + \sqrt{a}) \left(\frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}}\right)^{2^n}. \end{aligned}$$
Or, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \geqslant f_a(u_n) \geqslant \sqrt{a}$ donc $u_n - \sqrt{a} \geqslant 0$. Ainsi
$$(1) \qquad 0 \leqslant u_n - \sqrt{a} \leqslant (u_1 + \sqrt{a}) \left(\frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}}\right)^{2^n}.$$
Or $a \in \mathbb{R}^{+*}$ donc $\sqrt{a} > 0$, ce qui veut dire que
$$u_0 - \sqrt{a} < u_0 + \sqrt{a} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}} < 1$$
De plus, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \sqrt{a}$, donc $u_0 - \sqrt{a} \geqslant 0$. Ainsi
$$0 \leqslant \frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}} < 1.$$
Et
$$0 \leqslant \left(\frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}}\right)^2 < 1.$$
Donc $\left(\left(\frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}}\right)^m\right)_{m\geq 0}$ est une suite géométrique de raison $\left(\frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}}\right)^2$ comprise entre 0 et 1. Cette suite converge vers 0, d'où
$$\left(\frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}}\right)^{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$
Soit
$$(u_1 + \sqrt{a}) \left(\frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}}\right)^{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$
L'encadrement (1) et le théorème des gendarmes entraînent que $(u_n - \sqrt{a})_{n\geq 0}$ converge vers 0, donc que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers $\sqrt{a}$.

h) On obtient $u_0 = 1, \quad u_1 = \dfrac{3}{2}, \quad u_2 = \dfrac{17}{12}, \quad u_3 = 1.41421$ à 10^{-5} près. Cela donne comme représentation graphique, où on utilise la méthode de l'escalier avec la droite $y = x$ pour représenter les premiers termes de la suite u_n.



Dans ce cas, l'inégalité de la question précédente est

$$0 \leqslant u_n - \sqrt{2} \leqslant \left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^{2^n}.$$

On veut n tel que $|\sqrt{2} - u_n| \leqslant 10^{-5}$, soit $u_n - \sqrt{2} \leqslant 10^{-5}$. Il suffit d'avoir

$$10^{-5} \geqslant (\frac{3}{2} + \sqrt{2})\left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^{2^n} \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{10^{-5}}{\frac{3}{2}+\sqrt{2}}\right) \geqslant n \ln\left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^2.$$

Or

$$\left(\frac{\ln\left(\frac{10^{-5}}{\frac{3}{2}+\sqrt{2}}\right)}{\ln\left(\left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^2\right)}\right) \approx 3.57.$$

Il suffit de prendre $n = 4$. On aura ainsi $u_3 = 1.41421$.

6.3 Variations des fonctions

6.3.1 Étude de fonctions, nombres de solutions d'une équation

Exercice 162 (①) par Loïse Launay [*]

Étudier la fonction f définie par

$$\forall x \in]1, +\infty[, \qquad f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

La fonction f est définie et dérivable sur $]1; +\infty[$ en tant que composée et quotient de fonctions dérivables. Pour étudier les variations d'une fonction, on étudie le signe de sa dérivée première. Exprimons $f'(x)$:

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad f'(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{x^2-1} - x\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1} = \frac{\sqrt{x^2-1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}.$$

Après mise au même dénominateur et simplification :

$$\forall x \in]1, +\infty[, \qquad f'(x) = \frac{-1}{(x+1)(x-1)\sqrt{x^2-1}}.$$

Pour étudier le signe de $f'(x)$, il suffit d'étudier le signe de chacun des facteurs.

$$\forall x \in]1,+\infty[, x+1>0 \quad \text{et}et \quad x-1>0.$$

Par définition de la fonction racine carrée, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$:

$$\forall x \in]1,+\infty[, \qquad \sqrt{x^2-1}>0.$$

Par produit, on en déduit que le dénominateur est positif et par inverse et produit par (-1), il vient :

$$\forall x \in]1,+\infty[, \qquad f'(x)<0.$$

La dérivée de la fonction f est strictement négative sur $]1;+\infty[$, la fonction f est strictement décroissante sur cet intervalle. Avant de dresser le tableau de variations complet, on cherche à déterminer les limites de la fonction f aux bornes de l'intervalle d'étude. Par composition de limites de fonction, comme on a :

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (x^2-1)=0 \quad \text{et} \quad \lim_{X\to 0} \sqrt{X}=0,$$

il vient

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \sqrt{x^2-1}=0.$$

D'où, par quotient de limites :

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=+\infty.$$

Pour déterminer la limite de la fonction f au voisinage de $+\infty$, on lève l'indétermination en factorisant les termes prépondérants. Pour $x\in]1,+\infty[$:

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{x}{x\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}.$$

Or :

$$\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty.$$

Par inverse :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}=0.$$

Par somme :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1-\frac{1}{x^2}\right)=1.$$

On en déduit, par composition de limites de fonctions :

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=1.$$

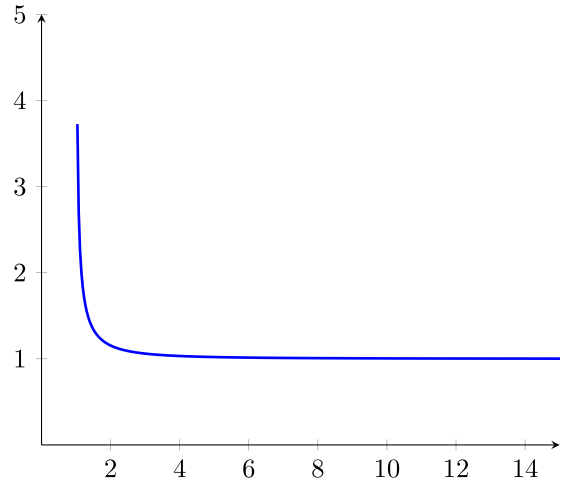
Soit, par inverse :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1.$$

Dressons à présent le tableau de signe de la dérivée première et le tableau de variations complet de la fonction f.

x	1		$+\infty$
signe de $f'(x)$	$\|$	$-$	
variations de f	$\|$ $+\infty$	$\searrow$	1

A présent, on trace le graphe de la fonction f.



Exercice 163 (②) par Loïse Launay [*]

a) Étudier la fonction f définie par

$$\forall x \in]1,+\infty[, \qquad f(x) = \ln(1+e^x).$$

b) Montrer que $f(x) - x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Interpréter géométriquement.

a) La fonction f est définie et dérivable sur $]1;+\infty[$ en tant que composée et quotient de fonctions dérivables. Pour étudier les variations d'une fonction, on étudie le signe de sa dérivée première. Exprimons $f'(x)$:

$$\forall x \in]1,+\infty[, \quad f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}.$$

Or, par définition de la fonction exponentielle réelle à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$, on sait que :

$$\forall x \in]1,+\infty[, \qquad e^x > 0 \qquad .$$

D'où :

$$\forall x \in]1,+\infty[, \qquad e^x + 1 > 0 \qquad .$$

Soit, par quotient :

$$\forall x \in]1,+\infty[, \qquad f'(x) > 0 \qquad .$$

La dérivée de la fonction f est strictement positive sur $]1;+\infty[$, la fonction f est strictement croissante sur cet intervalle. Avant de dresser le tableau de variations complet, on cherche à déterminer les limites de la fonction f aux bornes de l'intervalle d'étude. Comme la fonction exponentielle est continue sur son ensemble de définition, on a :

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} e^x = e.$$

Par somme :

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (e^x+1) = e+1.$$

Par composition de limites de fonctions, comme on a :

$$\lim_{X\to e+1} \ln(X) = ln(e+1),$$

il vient :

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \ln(e+1).$$

Par un raisonnement analogue, on procède pour la limite de la fonction au voisinage de l'infini positif :

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty,$$

et par somme :

$$\lim_{x \to +\infty} (e^x + 1) = +\infty.$$

Or,

$$\lim_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty.$$

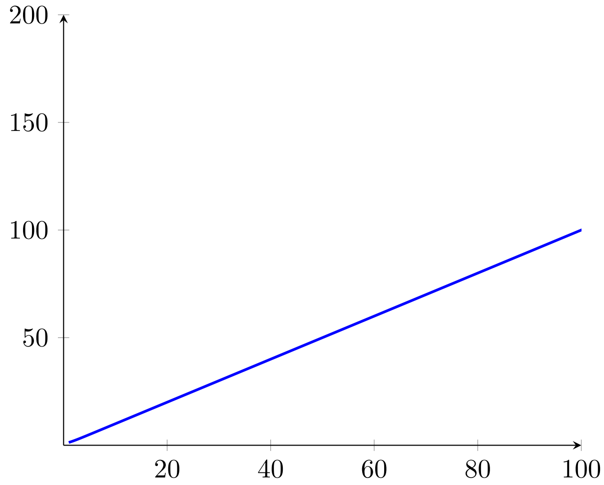
Par composition de limites de fonctions, il vient :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Dressons à présent le tableau de signe de la dérivée première et le tableau de variations complet de la fonction f.

x	1	$+\infty$
signe de $f'(x)$	$+$	
variations de f	$ln(e+1)$ $\nearrow$	$+\infty$

A présent, on trace le graphe de la fonction f.



b) Le calcul de cette limite nécessite de modifier l'expression $f(x) - x$ pour lever l'indétermination. Ainsi, pour tout $x \in]1, +\infty[$:

$$f(x) - x = \ln(e^x + 1) - x = \ln(e^x + 1) - \ln(e^x) = \ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x}\right).$$

Soit :

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad f(x) - x = \ln\left(e^{-x} + 1\right).$$

Par composition de limites de fonction, comme on a :

$$\lim_{x \to +\infty} -x = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{X \to -\infty} e^X = 0,$$

il vient :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(e^{-x} + 1\right) = 1.$$

Or

$$\lim_{X \to 1} \ln(X) = 0.$$

D'où, par composition de limites de fonction :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(e^{-x}+1) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) - x = 0.$$

La droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique au graphe de la fonction f au voisinage de $+\infty$.

Exercice 164 (3) par Matilde Cruz [∗]

a) Étudier la fonction $f : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$

b) En utilisant a), déterminer les couples (a, b) d'éléments de $\mathbb{N}^*$ vérifiant $a < b$ et

$$a^b = b^a$$

.

a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ (théorème usuels sur les opérations), avec

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$$

Si $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on a $x^2 > 0$ et

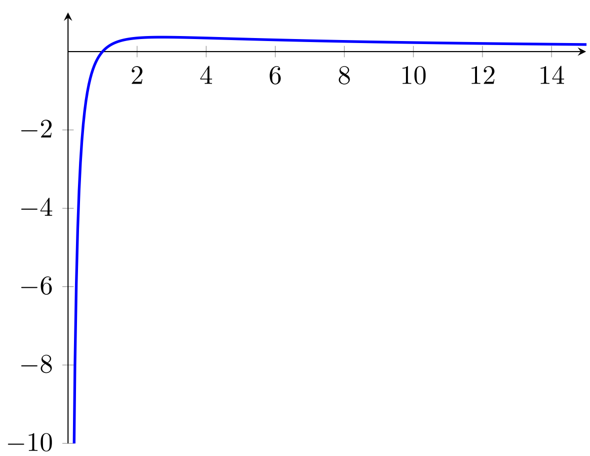
$$1 - \ln(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \ln(x) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad x < \exp(1) = e.$$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

Dressons ensuite le tableau de variation de f :

x	0		e		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0^+

Et enfin, traçons le graphe de $\dfrac{\ln(x)}{x}$:



$b)$ Soient a et b dans $\mathbb{N}^*$. Alors

$$a^b = b^a \quad \Longleftrightarrow \quad \ln(a^b) = \ln(b^a) \quad \Longleftrightarrow \quad b\ln(a) = a\ln(b) \quad \Longleftrightarrow \quad f(a) = f(b).$$

Comme $a < b$, le tableau montre que cette égalité impose $a \in]0, e[$ et $b \in]e, +\infty[$. Il n'y a que deux possibilités pour a : $a = 1$ ou $a = 2$.

Comme a ne peut prendre que ces deux valeurs, on peut trouver les solutions de l'équation par essais :

Pour $a = 1$:

$$1^b = b^1$$

$$b = 1$$

Cependant ici $a = b$, or $a < b$ donc nous n'obtenons pas de solution pour l'équation.

Pour $a = 2$:

$$2^b = b^2$$

Il y a deux solutions évidentes, $b = 2$ et $b = 4$. Le tableau de variations montre qu'il n'y en a pas d'autres.

L'équation $a^b = b^a$ n'a donc qu'un seul couple (a, b) solution tel que $a < b$, qui est $(2, 4)$.

EXERCICE 165 (③) par Térence Marchi[*]

Les fonctions ch (cosinus hyperbolique) et sh (sinus hyperbolique) sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1. *Étudier ces deux fonctions ; en tracer les graphes.*
2. *Montrer que ch réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $[1, +\infty]$ et exprimer la bijection réciproque.*
3. *Montrer que sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer la bijection réciproque.*
4. *Pour x dans $\mathbb{R}$, calculer*
$$\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x).$$

La fonction ch est paire. Puisque

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

la fonction ch est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme combinaison linéaire de fonctions dérivables. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\operatorname{ch}'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh}(x).$$

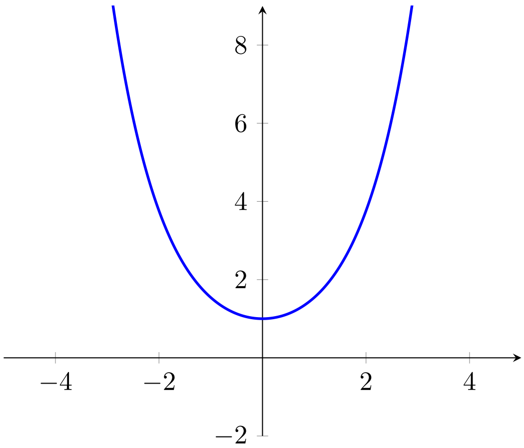
Étudions les variations de ch en regardant le signe de sa dérivée. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\operatorname{ch}'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} > 0 \Leftrightarrow e^x > e^{-x} \Leftrightarrow x > 0$$

La fonction ch est donc strictement croissante sur $[0; +\infty[$ et strictement décroissante sur $[-\infty; 0[$; son minimum est donc atteint en 0, $\operatorname{ch}(0) = 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{ch}(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{ch}(x) = +\infty$.

Ainsi,

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$



La fonction sh est impaire. Puisque

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

sh est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme combinaison linéaire de fonctions dérivables. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

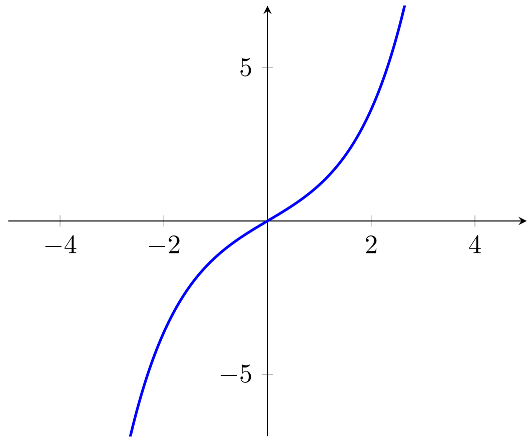
$$\mathrm{sh}'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}(x)$$

Étudions les variations de sh en regardant le signe de sa dérivée.
Comme vu lors de l'étude de ch :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \mathrm{ch}(x) > 0 \Leftrightarrow \mathrm{sh}'(x) > 0$$

La fonction sh est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty$; $\mathrm{sh}(0) = 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$			$+$		
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$



b) Montrons que ch : $\mathbb{R}^+ \to [1, +\infty[$ est bijective, c'est-à-dire, pour tout y de $[1, +\infty[$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $\mathrm{ch}(x) = y$.

Soit $y \in [1, +\infty[$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathrm{ch}(x) = y \Leftrightarrow \frac{e^x + e^{-x}}{2} = y \Leftrightarrow e^x + e^{-x} = 2y \Leftrightarrow\ e^x + e^{-x} - 2y = 0 \Leftrightarrow\ e^{2x} + 1 - 2ye^x = 0.$$

Cette égalité signifie que e^x est solution de l'équation du second degré $X^2 - 2yX + 1 = 0$ d'inconnue X, dont les racines sont

$$y + \sqrt{y^2 - 1} \quad \text{et} \quad y - \sqrt{y^2 - 1}.$$

L'exponentielle induit une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $[1, +\infty$. Les deux racines précédentes sont positives de produit 1, seule la plus grande appartient à $[1, +\infty[$ (noter que les deux racines sont égales si et seulement si $y = 1$, auquel cas elles sont égales à 1). Finalement, pour $y \in [1, +\infty[$ et $x \in \mathbb{R}^+$,

$$\mathrm{ch}(x) = y \Leftrightarrow \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}).$$

La fonction ch est bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $[1, +\infty[$, de réciproque donnée par :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{ch}^{-1}: & [1; +\infty[& \to & \mathbb{R}^+ \\ & x & \mapsto & \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \end{array}$$

c) Montrons que sh est bijective, c'est-à-dire que, pour tout réel y, il existe un unique réel x tel que $\mathrm{sh}(x) = y$.

Soient x, y deux nombres réels. Alors

$$\mathrm{sh}(x) = y \Leftrightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \Leftrightarrow\ e^x - e^{-x} = 2y \Leftrightarrow\ e^x - e^{-x} - 2y = 0 \Leftrightarrow\ e^{2x} - 1 - 2ye^x = 0.$$

Cette égalité signifie que e^x est racine de l'équation du second degré $X^2 - 2yX - 1$ d'inconnue X. Cette équation admet deux racines réelles

$$y + \sqrt{y^2 + 1} \quad \text{et} \quad y - \sqrt{y^2 + 1}.$$

Le produit des deux racines vaut -1. Seule la première racine est dans $\mathbb{R}^{+*}$. Finalement, pour $y \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{sh}(x) = y \Longleftrightarrow x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right).$$

La fonction sh est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, de réciproque donnée par :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{sh}^{-1}: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \end{array}$$

d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) &= \frac{1}{4} \cdot (e^x + e^{-x})^2 - \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2 \\
&= \frac{1}{4} \cdot [(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2] \\
&= \frac{1}{4} \cdot (e^x + e^{-x} - e^x + e^{-x}) \cdot (e^x + e^{-x} + e^x - e^{-x}) \\
&= \frac{1}{4} \cdot 2e^{-x} \cdot 2e^x = 1
\end{aligned}$$

Exercice 166 (②) par Matilde Cruz [*]

Si $m \in \mathbb{R}$, quel est le nombre de réels x tels que $\exp(x) = mx^2$

Soit f la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f(x) = \frac{e^x}{x^2}.$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et, pour tout x dans $\mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = \frac{\exp(x)(x-2)}{x^3}$$

Étudions le signe de la dérivée :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$\exp(x)$		$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
x^3		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

Dressons le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{e^2}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Le tableau de variations (et, si on veut être complet, des arguments de continuité et de stricte monotonie) donne les résultats suivants.

– Pour $m \in]-\infty; 0]$, l'équation $\exp(x) = mx^2$ n'admet aucune solution.

– Pour $m \in \left]0; \frac{e^2}{4}\right[$, l'équation $\exp(x) = mx^2$ admet une solution.

– Pour $m = \frac{e^2}{4}$, l'équation $\exp(x) = mx^2$ admet deux solutions.

– Pour $m \in \left]\frac{e^2}{4}; +\infty\right[$, l'équation $\exp(x) = mx^2$ admet trois solutions.

EXERCICE 167 (③) par Alexandre Camelin

Pour $m \in \mathbb{R}^{+*}$, on note f_m et g_m les fonctions définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ f_m(x) = 1 - x + \frac{m}{x}\left(1 + \ln(x)\right),\ g_m(x) = x^2 + m\ln(x)$$

a) Montrer que g_m s'annule en un unique réel que l'on notera α_m et que l'on ne cherchera pas à calculer

b) Étudier les variations de f_m

c) Soit $P = (x, y)$ un point du plan avec $x > 0$. En discutant selon la position de P, déterminer le nombre de $m \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que le graphe de f_m passe par P

a) Soit $m \in \mathbb{R}^{+*}$. g_m est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ en tant que sommes de fonctions strictement croissantes sur $\mathbb{R}^{+*}$. En outre, g_m est évidemment continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et on a : $\lim_{x\to 0} g_m(x) = -\infty$ et $g_m(1) = 1 > 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte croissance de g_m permettent donc d'affirmer respectivement l'existence et l'unicité d'un réel α_m où g_m s'annule.

b) f_m est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f'_m(x) = -1 - \frac{m}{x^2}\left(1 + \ln(x)\right) + \frac{m}{x^2} = -1 - \frac{m\ln(x)}{x^2}$$

On a :

$$f'_m(x) \geqslant 0 \iff -1 - \frac{m\ln(x)}{x^2} \geqslant 0 \iff x^2 + m\ln(x) \leqslant 0 \iff g_m(x) \leqslant 0$$

Ainsi, $f_m(x)$ est croissante sur $]0; \alpha_m]$ et décroissante sur $[\alpha_m, +\infty[$.

c) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On cherche le nombre de solutions de l'équation d'inconnue $m \in \mathbb{R}^{+*}$

$$1 - x + \frac{m}{x}\left(1 + \ln(x)\right) = y \quad (E)$$

• Si $\ln(x) = -1 \iff x = \dfrac{1}{e}$ alors :

— Si $y = 1 - \dfrac{1}{e}$ alors $\forall m \in \mathbb{R}^{+*}, 1 - x + \dfrac{m}{x}(1 + \ln(x)) = y$, donc il existe une infinité de $m \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que le graphe de f_m passe par $\left(\dfrac{1}{e}; 1 - \dfrac{1}{e}\right)$

— Si $y \neq 1 - \dfrac{1}{e}$, alors $\forall m \in \mathbb{R}^{+*}, 1 - x + \dfrac{m}{x}(1 + \ln(x)) \neq y$, donc il n'existe aucun $m \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que le graphe de f_m passe pas $\left(\dfrac{1}{e}; y\right)$

• Si $\ln(x) \neq -1$, alors $(E) \iff m = \dfrac{(x + y - 1) \cdot x}{1 + \ln(x)},\ m \in \mathbb{R}^{+*}$

Cette équation admet exactement une solution $m \in \mathbb{R}^{+*}$ pour les points $P = P(x, y)$ tels que $\dfrac{(x + y - 1) \cdot x}{1 + \ln(x)} > 0$, sinon elle n'admet pas de solution.

Si

$$(S_1)\begin{cases} x + y - 1 > 0 \\ 1 + \ln(x) > 0 \end{cases} \iff (S_1)\begin{cases} y > 1 - x \\ x > \dfrac{1}{e} \end{cases}$$

ou si

$$(S_2)\begin{cases} x + y - 1 < 0 \\ 1 + \ln(x) < 0 \end{cases} \iff (S_2)\begin{cases} y < 1 - x \\ x < \dfrac{1}{e} \end{cases}$$

il existe exactement un $m \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que le graphe de f_m par P. Sinon, il n'existe aucun m vérifiant cette condition.

Exercice 168 (③) par Estelle Ta

Soient p et q deux réels et, pour x dans $\mathbb{R}$:

$$f(x) = x^3 + px + q$$

On se propose de déterminer le nombre de réels x tels que $f(x) = 0$

a) On suppose $p \geqslant 0$. Tracer le tableau de variations de f et conclure dans ce cas

b) On suppose $p < 0$. Tracer le tableau de variations de f

c) On suppose $p < 0$. Soient x_1 et x_2 les points d'annulation de f'. Calculer $f(x_1) \times f(x_2)$ en fonction de p et q.

d) Déterminer en fonction de la quantité

$$\Delta = -(4p^3 + 27q^2)$$

le nombre de racines réelles de l'équation $f(x) = 0$. On montrera en particulier que si $\Delta < 0$, l'équation admet une unique racine réelle.

a) $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2 + p \geqslant 0$, avec égalité si et seulement si $p = 0$ et $x = 0$. Quel que soit $p \geq 0$, f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et on obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

En particulier, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution.

b)

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \geqslant 0 &\iff 3x^2 \geqslant -p \\ &\iff x^2 \geqslant \frac{-p}{3} \\ &\iff x \leqslant -\sqrt{\frac{-p}{3}} \text{ ou } x \geqslant \sqrt{\frac{-p}{3}}\end{aligned}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{-p}{3}}$		$\sqrt{\frac{-p}{3}}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\longrightarrow$	$f\left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)$	$\longrightarrow$	$f\left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)$	$\longrightarrow$	$+\infty$

c) $x_1 = -\sqrt{\frac{-p}{3}}$ et $x_2 = \sqrt{\frac{-p}{3}}$, donc :

$$\begin{aligned}f(x_1) \times f(x_2) &= \left[\left(-\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)^3 + p\left(-\sqrt{\frac{-p}{3}}\right) + q\right] \times \left[\left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)^3 + p\left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right) + q\right] \\ &= \frac{p^3}{3^3} - \frac{2p^3}{3^2} + \frac{p^3}{3} + q^2 \\ &= \frac{4p^3 + 27q^2}{27}\end{aligned}$$

d) On remarque que $f(x_1) \times f(x_2) = \dfrac{-\Delta}{27}$

• Lorsque $f(x_1) \times f(x_2)$ est strictement positif, les "sommets" (maximum et minimum locaux) sont de même signe, et il y a donc une solution à $f(x) = 0$.
Or $f(x_1) \times f(x_2) > 0 \iff \Delta < 0$

• De même, si $f(x_1) \times f(x_2) < 0$ alors il y a trois solutions à $f(x) = 0$ car les sommets

sont de signe différent.
Or, $f(x_1) \times f(x_2) < 0 \iff \Delta > 0$

• Enfin, si $f(x_1) \times f(x_2) = 0$, alors au moins un des deux sommets a une ordonnée égale à 0, ainsi il y a deux solutions à $f(x) = 0$.
Or, $f(x_1) \times f(x_2) = 0 \iff \Delta = 0$.
En définitive :
— Si $\Delta > 0$, il y a 3 solutions à $f(x) = 0$
— Si $\Delta = 0$, il y en 2
— Si $\Delta < 0$, il y a une unique solution

Exercice 169 (③) par Paul Perrier

Soient $n \geq 2$ un entier, p et q deux nombres réels. Montrer que l'équation $x^n + px + q = 0$ admet au plus deux racines réelles si n est pair, au plus trois si n est impair.

Soit, $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x^n + xp + q$. Si n est pair, alors $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$. Il est clair que f est deux fois dérivable. On calcule :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = nx^{n-1}, \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = n(n-1)x^{n-2} = n(n-1)(x^2)^{k-1}.$$

Ainsi, $f''(x) \geq 0$, avec égalité si et seulement si $x = 0$: la fonction f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim_{x\to-\infty} x^{n-1} = -\infty$ car $n-1$ est impair. Donc pas produit puis par somme, $\lim_{x\to-\infty} f'(x) = -\infty < 0$. Aussi $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$, des mêmes arguments $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty > 0$. Donc d'après le théorème de la bijection (ou corollaire du Théorème des valeurs intermédiaires),

$$\exists! \alpha \in \mathbb{R}, \quad f(\alpha) = 0.$$

Ainsi, f est strictement monotone sur $]-\infty;\alpha[$ et sur $]\alpha;+\infty[$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ car n est pair. Donc f est strictement décroissante sur $]-\infty;\alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha;+\infty[$. En appliquant deux fois le théorème de la bijection sur $]-\infty;\alpha]$ et sur $[\alpha;+\infty[$, on trouve que f a exactement 2 racines si $f(\alpha) < 0$. Si $f(\alpha) = 0$ il n'y a qu'une seule racine, et si $f(\alpha) > 0$ il n'y a donc pas de racines.

Si n est impair, alors $n = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$. Si $p \geq 0$ alors $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = n(x^2)^k + p \geq 0$. f' s'annule si et seulement si $x = p = 0$, et donc f est strictement croissante. Or :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Donc pas le Théorème de la bijection f a une unique racine.

Si $p < 0$: en appliquant le théorème de la bijection, aux intervalles $]-\infty;0]$ et $[0;+\infty$ (car f' est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$ et strictement croissante croissante sur $[0;+\infty)$, on sait qu'il existe $\alpha \in]-\infty;0[$ et $\beta \in]0;+\infty$ tels que $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$. Or $\lim_{x\to-\infty} = \lim_{x\to+\infty} = +\infty$ car n-1 est pair et $f'(0) = p < 0$. Donc on en déduit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		α	0	β		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de f	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$ $f(0)$ $\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Dans chacun des intervalles $]-\infty;\alpha]$,$[\alpha;\beta]$ et $]\beta;+\infty[$, f admet au plus une racine (car strictement monotone). Donc f admet au plus 3 racines et l'équation $x^n + px + q = 0$ au plus 3 solutions.

Exercice 170 (④) par Jean Maltère[∗]

Soient $n \in \mathbb{N}^*, a_1 < .. < a_n$ des réels et P la fonction polynôme définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - a_i)$$

a) Dresser le tableau de variations de $\dfrac{P'}{P}$. On utilisera l'exercice 153.

b) Pour α dans $\mathbb{R}$, quel est le nombre de racines de l'équation $P'(x) - \alpha P(x) = 0$?

a) D'après l'exercice 153,

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a_1, ..., a_j\}, \qquad \frac{P'}{P}(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{(x - a_i)}\right),$$

donc,

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a_1, ..., a_j\}, \qquad \left(\frac{P'}{P}\right)'(x) = \left(-\frac{1}{(x - a_i)^2}\right) < 0.$$

De plus

$$\frac{P'}{P}(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \frac{P'}{P}(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \frac{P'}{P}(x) \underset{x\to a_i^-}{\longrightarrow} -\infty, \quad \frac{P'}{P}(x) \underset{x\to a_i^+}{\longrightarrow} +\infty.$$

On obtient donc :

x	$-\infty$		a_1		a_2		a_n		$+\infty$
$\left(\frac{P'}{P}\right)'(x)$		$-$	‖	$-$	‖	$-$	‖	$-$	
$\frac{P'}{P}$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

b) Notons que $P(x) = 0$ si et seulement si x est l'un des a_i, auquel cas $P'(x) \neq 0$ (comme on le voit par exemple en examinant le taux de variation de P en a_i, qui a pour limite $\prod_{1\leq j\leq n j\neq i}(a_i - a_j)$, qui n'est pas nul). L'équation $P'(x) - \alpha P(x) = 0$ implique donc que x n'est pas l'un des a_i. Ses solutions sont donc celles de $\dfrac{P'}{P}(x) = \alpha$, dans $\mathbb{R} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$.

La continuité de $\frac{P'}{P}$ et sa stricte décroissance sur chacun des intervalles du domaine de définition entraînent que cette équation admet n solutions si $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $n - 1$ si $\alpha = 0$.

Exercice 171 (②) par Léo Baciocchi [∗]

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x)^2 = 1.$$

Montrer que f est constante.

La fonction f prend ses valeurs dans $\{\pm 1\}$. D'autre part, le théorème des valeurs intermédiaires et la continuité de f entraînent que $f(I)$ est un intervalle. Il s'ensuit que $f(I)$ est l'un des deux singletons $\{1\}$ ou $\{-1\}$, donc que f est constante.

Exercice 172 (③) par Tristan Hottier [∗]

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation

$$x^3 \sin(x) \ln(x+1) + e^x \cos(x) = 2$$

admet au moins une solution dans $]n\pi, (n+1)\pi[$.

On note dans un premier temps que $f : x \mapsto x^3 \sin(x) \ln(x+1) + e^x \cos(x)$ est définie est continue sur $]-1, +\infty[$.

En calculant ensuite, avec $n \in \mathbb{N}^*$, $f(x)$ pour $x \to n\pi$ puis pour $x \to (n+1)\pi$, on obtient

$$\begin{aligned} f(n\pi) &= (n\pi)^3 \sin(n\pi) \ln(n\pi + 1) + e^{n\pi} \cos(n\pi) \\ &= \begin{cases} e^{n\pi} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -e^{n\pi} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} f((n+1)\pi) &= ((n+1)\pi)^3 \sin((n+1)\pi) \ln((n+1)\pi + 1) + e^{(n+1)\pi} \cos((n+1)\pi) \\ &= \begin{cases} -e^{(n+1)\pi} & \text{si } n \text{ est pair} \\ e^{(n+1)\pi} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, si n est pair et en posant $I =]n\pi, (n+1)\pi[$, on a, grâce au théorème des valeurs intermédiaires,

$$f(I) \supset \left] -e^{(n+1)\pi}, e^{n\pi} \right[$$

Et si n est impair,

$$f(I) \supset \left] -e^{n\pi}, e^{(n+1)\pi} \right[$$

Dans tous les cas, $2 \in f(I)$. L'équation

$$x^3 \sin(x) \ln(x+1) + e^x \cos(x) = 2$$

admet au moins une solution dans $]n\pi, (n+1)\pi[$.

6.3.2 Démonstration d'inégalités, détermination d'extrema

Exercice 173 (③) par Léo Baciocchi [*]

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$, f une application continue de $[a, b]$ dans $[a, b]$. Montrer que f admet un point fixe, i.e. qu'il existe x dans $[a, b]$ tel que $f(x) = x$. On écrira cette équation sous la forme $g(x) = 0$ pour une certaine fonction g.

Soit $g : x \mapsto f(x) - x$. Or, f est à valeurs dans $[a, b]$, donc $g(a) \in [0, b-a]$ et $g(a) \geqslant 0$. De même, $g(b) \in [a-b, 0]$ et $g(b) \leqslant 0$.

Or g est une combinaison linéaire de deux fonctions continues, donc continue. Puisque $g(a) \geqslant 0$ et $g(b) \leqslant 0$, le théorème des valeurs intermédiaires fournit $x \in [a, b]$ tel que $g(x) = 0$, à savoir $f(x) = x$.

Exercice 174 (②) par Wéline Pujol [*]

Montrons l'inégalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \sin x \leq x$$

En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin x| \leq |x|$$

Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x) - x$. On cherche à montrer que la fonction f est négative dans $\mathbb{R}^+$.

La fonction f est dérivable comme somme de deux fonctions dérivables et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \cos x - 1.$$

On sait que cos est à valeurs dans $[-1, 1]$, donc, on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de f'			$-$		
variation de f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
signe de f		$+$	0	$-$	

On a donc bien que f est négative sur $\mathbb{R}^+$ donc, pour tout x de $\mathbb{R}^+$, $\sin(x) - x \leq 0$ et $\sin(x) \leq x$.

La seconde inégalité équivaut à la première si $x \geq 0$. Par ailleurs, si on change x en $-x$, la seconde inégalité n'est pas altérée, ce qui permet de ramener le cas $x \leq 0$ au cas $x \geq 0$.

Exercice 175 (③) par Wéline Pujol [*]

En utilisant la fonction $f : x \mapsto \ln(\operatorname{ch}(x)) - \dfrac{x^2}{2}$, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch}(x) \leq e^{\frac{x^2}{2}}.$$

On a

$$f(x) = \ln(\operatorname{ch}(x)) - \frac{x^2}{2} = \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) - \frac{x^2}{2}.$$

La fonction f est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \times \frac{1}{\frac{e^x+e^{-x}}{2}} - x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} - x, \\ f''(x) &= \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} - 1 = \frac{4 - (e^x + e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{2 - e^{2x} - e^{-2x}}{(e^x + e^{(-x)})^2}. \end{aligned}$$

Or, par exemple par l'inégalité arithmético-géométrique pour deux nombres réels positifs,

$$e^{2x} + e^{-2x} \geq 2,$$

avec égalité si et seulement si $e^{2x} = 1$, i.e. $x = 0$. Il s'ensuit que $f''(x) \leq 0$, avec égalité si et seulement si $x = 0$. Ainsi, la fonction f' est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, ce qui permte de tracer le tableau suivant.

x	$+\infty$		0		$+\infty$
signe de f''			$-$		
variation de f'	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
signe de f'		$+$	0	$-$	
variation de f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
signe de f		$-$	0	$-$	

Grâce au résultat précédent on en déduit que, pour x de $\mathbb{R}$:

$$\ln(\operatorname{ch}(x)) - \frac{x^2}{2} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(\operatorname{ch}(x)) \leq \frac{x^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad e^{\ln(\operatorname{ch}(x))} \leq e^{\frac{x^2}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{ch}(x) \leq e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Exercice 176 (④) par Matilde Cruz [∗]

Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 2[$,

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \frac{2+x}{2-x}.$$

Notons déjà que, si $x \in [0, 2]$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{x}{n} \geq 0 \quad \text{et} \quad \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \leq \frac{x}{n}.$$

Par croissance de exp, on a donc

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e^x.$$

Il suffit donc d'"établir l'inégalité

$$(1) \qquad e^x \leq \frac{2+x}{2-x}.$$

(Notons qu'en fait, il n'y a pas vraiment le choix. On sait (poly, **5.2**) que, pour tout nombre réel x,

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} e^x.$$

Si l'inégalité demandée est vraie, (1) l'est donc également.)

Prouvons donc (1). Cette inégalité équivaut à

$$\forall x \in [0, 2], \qquad x - \ln(2+x) + \ln(2-x).$$

Posons donc

$$\forall x \in [0, 2], \qquad f(x) = x - \ln(2+x) + \ln(2-x).$$

La fonction f est dérivable, avec

$$\forall x \in [0, 2], \qquad f'(x) = 1 - \frac{1}{2+x} - \frac{1}{2-x} = -\frac{x^2}{4-x^2} = -\frac{x^2}{(2-x)(2+x)} \leq 0.$$

La fonction f est décroissante, majorée par $f(0) = 0$. Elle est est donc à valeurs dans $\mathbb{R}^-$.

Exercice 177 (④) par Tristan Hottier[*]

La fonction sinus cardinal, notée ici $\sin_c$, est définie par $\sin_c(0) = 1$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \sin_c(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

a) Étudier la parité de $\sin_c$.

b) Montrer que $\sin_c$ est continue en 0. Quelle est sa limite en $\pm\infty$?

c) Pour $x \in \mathbb{R}^*$, calculer $\sin_c'(x)$.
On admettra que $\sin_c$ est également dérivable en 0, de dérivée nulle.

d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction tan admet un unique point fixe sur l'intervalle $I_n := \left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$, que l'on note x_n.

e) Montrer que les x_n pour $n \in \mathbb{Z}$ sont les points en lesquels $\sin_c'$ s'annule.

f) Selon la parité de n, tracer le tableau de variation de $\sin_c$ sur l'intervalle $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$.

a) Étudions la parité de $\sin_c$. Si $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\sin_c(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin(x)}{-x} = \sin_c(-x) = \frac{\sin(x)}{x} = \sin_c(-x) = \sin_c(x).$$

Comme $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\sin_c(-x) = \sin_c(x)$, $\sin_c$ est paire.

b) On a

$$\sin_c(x) = \frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x \to 0^-]{} 1 = \sin_c(0),$$

donc $\sin_c$ est continue en 0.
Déterminons maintenant la limite de $\sin_c$ en $+\infty$, qui sera la même que celle en $-\infty$ en raison de la parité de $\sin_c$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on a

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-1}{x} \leq \sin_c(x) \leq \frac{1}{x}$$

Par passage à la limite dans l'encadrement,

$$\lim_{x \to \pm\infty} (\sin_c(x)) = 0.$$

c) Pour $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\sin_c'(x) = \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2}.$$

On admet que $\sin_c'(0) = 0$.

d) Calculons dans un premier temps la dérivée de tan sur $\mathbb{R} \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} = \cup_{k \in \mathbb{Z}} I_k$:

$$\tan'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} > 0.$$

Posons maintenant

$$\forall x \in \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}, \qquad g(x) = \tan(x) - x.$$

Alors g est dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}, \qquad g'(x) = \tan^2(x),$$

qui est positif et ne s'annule que sur les multiples de π. La fonction g est donc strictement croissante sur chaque intervalle I_n avec $n \in \mathbb{Z}$.

De plus,

$$g(x) \xrightarrow[x\to(n\pi-\frac{\pi}{2})^+]{} -\infty \quad \text{et} \quad g(x) \xrightarrow[(x\to n\pi+\frac{\pi}{2})^-]{} +\infty.$$

En appliquant alors le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires à tan sur l'intervalle I_n, on trouve qu'il existe un unique $x \in I_n$ tel que $\tan(x) = x$, que l'on note x_n.

e) Transformons l'expression $\tan(x_n) = x_n$ avec $x_n \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

$$\begin{aligned}
\tan(x_n) = x_n \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\sin(x_n)}{\cos(x_n)} = x_n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin(x_n)}{x_n} = \cos(x_n) \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\sin(x_n) - x_n\cos(x_n)}{x_n} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x_n\cos(x_n) - \sin(x_n)}{x_n^2} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \sin_c'(x_n) = 0
\end{aligned}$$

Ainsi, les x_n pour $n \in \mathbb{Z}$ sont les points en lesquels $\sin_c'$ s'annule.

f) Supposons n pair. Alors cos est stictement positif sur I_n et donc, pour $x \in I_n$

$$\sin_c{}'(x) > 0 \Longleftrightarrow x > \tan(x) \Longleftrightarrow g(x) < 0 \Longleftrightarrow x < x_n.$$

Le tableau de variation de $\sin_c$ sur I_n est donc :

x	$n\pi - \frac{\pi}{2}$		x_n		$n\pi + \frac{\pi}{2}$
$\sin_c'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$
$\sin_c(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

En supposant désormais n impair, on obtient de même le tableau de variation suivant :

x	$n\pi - \frac{\pi}{2}$		x_n		$n\pi + \frac{\pi}{2}$
$\sin_c'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$
$\sin_c(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Exercice 178 (③) par Tristan Hottier [∗]

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$, f et g deux fonctions dérivables de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(a) \leq g(a)$ et que

$$\forall x \in [a,b], \quad f'(x) \leq g'(x).$$

En considérant $h = g - f$, montrer que

$$\forall x \in [a,b], \quad f(x) \leq g(x).$$

Soit $h \in [a,b] \mapsto g(x) - f(x)$. On a alors, si $x \in [a,b]$, $h'(x) = g'(x) - f'(x) \geq 0$. Ainsi, la fonction h est croissante sur $[a,b]$ donc

$$\forall x \in [a,b], \quad h(x) \geq h(a)$$

Or, $h(a) = g(a) - f(a) \geq 0$ car $f(a) \leq g(a)$. On a finalement

$$\begin{aligned}
\forall x \in [a,b], \quad h(x) \geq h(a) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in [a,b], \quad g(x) - f(x) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in [a,b], \quad f(x) \leq g(x)
\end{aligned}$$

Exercice 179 (③) par Antoine Charki [*]

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$, m et M deux nombres réels, f une fonction dérivable sur $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

a) On suppose que
$$\forall x \in [a, b], \quad m \leqslant f'(x) \leqslant M.$$
Montrer que
$$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a).$$
On pourra considérer les fonctions
$$g : x \longmapsto f(x) - Mx \qquad \text{et} \qquad h : x \longmapsto f(x) - mx.$$

b) Soit $K \in \mathbb{R}^+$. On suppose que
$$\forall x \in [a, b], \quad |f'(x)| \leqslant K$$
Montrer que :
$$|f(b) - f(a)| \leqslant K\,|b-a|\,,$$
puis que :
$$\forall (x, y) \in [a, b]^2, \quad |f(y) - f(x)| \leqslant K\,|y-x|\,.$$

a) On remarque que $m(b-a)-f(b)+f(a) = h(a)-h(b)$. De plus, si $x \in [a, b]$, $h'(x) = f'(x)-m \geqslant 0$. La fonction h est croissante sur $[a, b]$. En particulier, $h(b) \geq h(a)$, i.e. $m(b-a) \leqslant f(b) - f(a)$. Le raisonnement pour l'autre inégalité est identique, en considérant la fonction g.

b) Pour la première partie, on applique a) avec $m = -K$ et $M = K$. Pour la seconde, on applique le résultat en remplaçant l'intervalle $[a, b]$ par $[x, y]$ si $y \geq x$, par $[y, x]$ sinon.

Exercice 180 (③) par Jean Maltère [*]

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$, $K \in [0, 1[$ et f une fonction dérivable de $[a, b]$ dans $[a, b]$ telle que :
$$\forall x \in [a, b], \quad |f'(x)| \leqslant K.$$
On sait depuis l'exercice 172 que f admet un point fixe $c \in [a, b]$. Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite définie par $u_0 \in [a, b]$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$
En utilisant l'exercice précédent montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - c| \leqslant K^n\,|u_0 - c|\,.$$
Qu'en déduit-on sur la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$?

D'après l'exercice 179 :
$$\forall (x, y) \in [a, b]^2, \ |f(x) - f(y)| \leqslant K\,|x-y|\,.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}_n$ la propriété :
$$|u_n - c| \leqslant K^n\,|u_0 - c|$$

Montrons cette propriété par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. On a $|u_0 - c| \leqslant |u_0 - c|$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Ainsi, $|u_n - c| \leqslant K^n\,|u_0 - c|$.

Or, $|f(u_n) - f(c)| \leqslant K\,|u_n - c|$, donc, $|u_{n+1} - c| \leqslant K\,|u_n - c| \leqslant K \cdot K^n\,|u_0 - c|$. Finalement, on a :
$$|u_{n+1} - c| \leqslant K^{n+1}\,|u_0 - c|$$

C'est exactement $\mathcal{P}_{n+1}$.

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - c| \leq K^n |u_0 - c|$.

Or, $K \in [0, 1[$, donc $K^n\,|u_n - c| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Grâce au théorème de majoration, $|u_n - c|$ tend vers 0, donc $(u_n)_{n \geqslant 0}$ converge vers c.

Exercice 181 (1) par Estelle Ta [∗]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le maximum de la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f_n(x) = x^n e^{-x}$$

La fonction f est dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f_n'(x) = nx^{n-1} \cdot e^{-x} - x^n e^{-x} = e^{-x} x^{n-1}(n - x).$$

Ainsi $f_n'(x)$ est du signe de $n - x$, ce qui nous donne le tableau suivant :

x	0		n		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f_n(n)$	$\searrow$	

La maximum de f_n est $f_n(n) = n^n e^{-n}$.

Exercice 182 (1) par Wéline Pujol [∗]

Soit λ dans $\mathbb{R}^{+*}$. Déterminer le minimum de la fonction f_λ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f_\lambda = \frac{\lambda x^2}{2} - \ln(x)$$

La fonction f_λ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ comme somme de deux fonctions dérivables :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad f_\lambda'(x) = \lambda x - \frac{1}{x} = \frac{\lambda x^2 - 1}{x}.$$

On en déduit que ; pour $x > 0$, $f_l'ambda(x) \geq 0$ si et seulement si $x \geq \sqrt{\frac{1}{\lambda}}$. On a donc le tableau de variations suivant.

x	0		$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$		$+\infty$
signe de $\lambda x^2 - 1$	‖	$-$	0	$+$	
signe de x	‖	$+$		$+$	
signe de f_λ'	‖	$-$	0	$+$	
variation de f_λ	‖ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}(1 + \ln(\lambda))$	$\nearrow$	$+\infty$

Le minimum de la fonction f_λ est donc atteint pour $x = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$ et vaut $\dfrac{1}{2}(1+\ln(\lambda))$.

Exercice 183 (⑤) par Octave Koenig et Tristan Hottier [∗]

Déterminer le maximum de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f\left(x\right) = \ln\left(1+x\right)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

Tout d'abord, f est dérivable en tant que produit de fonctions dérivables. On a, pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad f'(x) = \frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{1+x} - \frac{\ln(1+x)}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$$

Déterminons les variations de f. On a

$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 &\Longleftrightarrow (x^2+x)\ \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \geq (1+x)\ \ln(1+x) \\ &\Longleftrightarrow (1+x)\ \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \geq \left(1+\frac{1}{x}\right)\ \ln(1+x) \end{aligned}$$

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad g(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)\ \ln(1+x).$$

La fonction g est aussi dérivable, en tant que produit de fonctions dérivables, et, pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$:

$$g'(x) = \frac{-\ln(1+x)}{x^2} + \frac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{1+x} = \frac{x^2+x-(1+x)\ \ln(1+x)}{x^3+x^2} = \frac{(1+x)\ (x-\ln(1+x))}{x^3+x^2}.$$

Par concavité de ln, $\ln(1+x) \leq x$ avec égalité si et seulement si $x=0$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ g'(x) > 0$. Ainsi, g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

En utilisant le caractère strictement croissant de g, on a donc, si i est la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+*}$,

$$f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad g(x) \leq g \circ i(x) \quad \Leftrightarrow \quad g(x) - g\circ i(x) \leq 0 \Longleftrightarrow x \leq i(x) \Longleftrightarrow x \leq 1.$$

x	0		1		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
variation de f	0	$\nearrow$	$\ln^2(2)$	$\searrow$	0

Conclusion : le maximum de f est $\ln^2(2)$, atteint en $x=1$.

6.4 Caractérisation des fonctions constantes, équations différentielles

6.4.1 Caractérisation des fonctions constantes

Exercice 184 (①) par Tristan Hottier [*]

Déterminer les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, n fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et dont la dérivée n-ième est identiquement nulle.

On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathcal{P}_n$: les fonctions n fois dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont exactement les fonctions polynomiales de degré majoré par $n-1$.

La propriété $\mathcal{P}_1$ est connue : les fonctions dérivables de dérivée nulle sont les constantes.

Supposons $n \geq 0$ et $\mathcal{P}_n$ vraie. Soit f une fonction $n+1$ fois dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Dire que $f^{(n+1)} = 0$, c'est dire que f' a sa dérivée n-ième nulle, donc est une fonction polynomiale de degré majoré par $n-1$, i.e. de la forme

$$f' : x \in \mathbb{R} \longmapsto a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k, \qquad \text{avec} \quad (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n.$$

Si tel est le cas, f est de la forme

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto b + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} \qquad \text{avec} \quad b \in \mathbb{R},$$

donc polynomiale de degré majoré par n. Réciproquement, si f est polynomiale de degré majoré par n, f' est polynomiale de degré majoré par $n-1$, donc $f^{(n+1)} = f'^{(n)} = 0$. La propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est démontrée.

Exercice 185 (③) par Matilde Cruz [*]

Pour quelles valeurs du nombre réel λ la fonction f_λ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_\lambda(x) = \cos(x)^6 + \sin(x)^6 - \lambda \cos(4x)$$

est-elle constante ?

Réécrivons la fonction f_λ de manière plus simple :

$$\begin{aligned}
f_\lambda(x) &= \cos^6(x) + \sin^6(x) - \lambda\cos(4x) = \cos^6(x) + (1-\cos^2(x))^3 - \lambda(\cos^2(2x) - \sin^2(2x)) \\
&= \cos^6(x) + (1 - 3\cos^2(x) + 3\cos^4(x) - \cos^6(x)) - \lambda((\cos^2(x) - \sin^2(x))^2 - (1-\cos^2(2x)) \\
&= 1 - 3\cos^2(x) + 3\cos^4(x) - \lambda((\cos^2(x) - (1-\cos^2(x)))^2) - (1 - (2\cos^2(x)-1)^2)) \\
&= 1 - 3\cos^2(x) + 3\cos^4(x) - \lambda(2\cos^2(x)-1)^2 - (1-(2\cos^2(x)-1)^2)) \\
&= 1 - 3\cos^2(x) + 3\cos^4(x) - \lambda[2(2\cos^2(x)-1)^2 - 1] \\
&= 1 - 3\cos^2(x) + 3\cos^4(x) - \lambda(1 - 8\cos^2(x) + 8\cos^4(x)) \\
&= (3-8\lambda)\cos^4(x) + (8\lambda - 3) + 1 - \lambda \\
&= (3-8\lambda)\cos^2(x)[\cos^2(x) - 1] + 1 - \lambda \\
&= (3-8\lambda)\cos^2(x)\cdot(-\sin^2(x)) + 1 - \lambda \\
&= (3-8\lambda)\left(\frac{-\sin^2(2x)}{4}\right) + 1 - \lambda \\
&= \left(\frac{8\lambda-3}{4}\right)\sin^2(2x) + 1 - \lambda
\end{aligned}$$

Lorsque x décrit $\mathbb{R}$, $\sin^2(x)$ décrit $[0,1]$. Il s'ensuit que f_λ est constante si et seulement si $8\lambda - 3 = 0$, i.e. $\lambda = \dfrac{3}{8}$.

Exercice 186 (②) par Mathieu Chebib [*]

Soient un pendule simple de masse m et de longueur ℓ, θ l'angle que fait le pendule avec la «verticale descendante» ; alors θ dépend du temps t et obéit à l'équation différentielle :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \theta''(t) + \frac{g}{\ell}\sin(\theta(t)) = 0.$$

L'énergie du pendule au temps t est donnée par la formule :

$$E(t) = \frac{m\ell^2\theta'(t)^2}{2} - mg\ell\cos(\theta(t)).$$

Montrer que E est constante (conservation de l'énergie).

Dérivons l'expression de l'énergie en fonction du temps. Pour $t \in \mathbb{R}$,

$$E'(t) = m\ell^2\theta''(t)\theta'(t) + mg\ell\theta'(t)\sin(\theta(t)) \text{ (dérivée de } u^2 \text{ et } \cos(u)) = m\ell^2\theta'(t)(\theta''(t) + \frac{g}{\ell}\sin(\theta(t)))\,.$$

Or d'après l'équation du pendule simple : $\theta''(t) + \frac{g}{\ell}\sin(\theta(t)) = 0$, donc $E'(t) = 0$. La fonction E est donc constante.

Exercice 187 (②) par Macéo Pereira[*]

Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a) En considérant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x) - f(-x),$$

montrer que f est paire si et seulement si f' est impaire.

b) Montrer que f est impaire si et seulement si f' est paire et f(0)=0.

a) On a déjà montré que, si f est paire, f' est impaire (exercice 151). Montrons la réciproque. On suppose que f' est impaire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(-x) = -f'(x).$$

Il s'ensuit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g'(x) = f'(x) + f'(-x) = 0.$$

On en déduit que g est constante. En évaluant g en 0, on obtient que g est nulle, c'est-à-dire que f est impaire.

b) De même, on a déjà montré que, si f est impaire, f' est paire (exercice 151).
De plus, par définition :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(-x) + f(x) = 0.$$

D'où, en évaluant en 0, $f(0) = 0$.
On suppose maintenant que f' est paire et que $f(0) = 0$, montrons que f est impaire.
Tout d'abord, par définition :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(-x) = f'(x).$$

D'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g'(x) = f'(x) + f'(-x) = 2f'(x).$$

On en déduit que $g = 2f + C$, où C est une constante réelle. En évaluant en 0, on en déduit que $C = 0$. Finalement, $g = 2f$, ce qui signifie que f est impaire.

EXERCICE 188 (③) par Daniel Caby (Dérivation et périodicité $*$).

Soient f un fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, T un élément de $\mathbb{R}^{+*}$.
a) On suppose qu'il existe λ dans $\mathbb{R}$ et une fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ périodique de période T telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = g(x) + \lambda x.$$

Montrer que f' est périodique de période T.
b) Formuler et démontrer une réciproque du résultat établi en a).

a) On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = g'(x) + \lambda.$$

Or, g étant périodique de période T, g' et donc f' l'est aussi.

b) La réciproque peut être formulée de la manière suivante : Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ périodique de période T, alors il existe une fonction G de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et λ dans $\mathbb{R}$ tels que toute primitive F de f vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = G(x) + \lambda x.$$

Montrons tout d'abord la propriété suivante :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \int_x^{x+T} f(t)dt = \int_y^{y+T} f(t)dt.$$

On a :

$$\begin{aligned}
\int_y^{y+T} f'(t)dt &= \int_x^{x+T} f(t)dt + \int_{x+T}^{y+T} f(t)dt - \int_x^y f(t)dt \\
&= \int_x^{x+T} f(t)dt \text{ car f est périodique de période T.}
\end{aligned}$$

On peut donc poser $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{\int_x^{x+T} f'(t)dt}{T} = \lambda.$$

On pose g une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x) - \lambda.$$

Soit F une primitive de f. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = G(x) + \lambda x + c \text{ avec } G \text{ une primitive de } g \text{ et } c \in \mathbb{R}.$$

Il ne nous reste plus qu'à montrer que G est périodique de période T, soit : $\forall x \in \mathbb{R}, G(x+T) - G(x) = 0$.

$$\begin{aligned}
G(x+T) - G(x) &= \int_x^{x+T} g(t)dt \\
&= \int_x^{x+T} f(t)dt - \int_x^{x+T} \frac{\int_x^{x+T} f(s)ds}{T} dt \\
&= 0.
\end{aligned}$$

EXERCICE 189 (③) par Ylan Marx [$*$]

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(y) - f(x)| \leq (y - x)^2.$$

Montrer que f est constante.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $y \in \mathbb{R}$ avec $y \neq x$. On a $|f(y) - f(x)| \leq (y-x)^2$ donc $|f(y) - f(x)| \leq |y-x|^2$, et donc, comme $y \neq x$, $|y - x| \neq 0$, d'où :

$$\left|\frac{f(y) - f(x)}{y - x}\right| \leq |y - x|$$

Or, $|y - x| \xrightarrow[y \to x]{} 0$, donc par encadrement :

$$\left|\frac{f(y) - f(x)}{y - x}\right| \xrightarrow[y \to x]{} 0 \quad \text{et} \quad \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \xrightarrow[y \to x]{} 0.$$

On a donc f dérivable en x avec : $f'(x) = 0$, et donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 0.$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée nulle, et donc d'après la caractérisation de **6.4.1** des fonctions constantes, la fonction f est constante.

6.4.2 L'équation différentielle $y' = \lambda y$

Exercice 190 (①) par Estelle Ta [*]

Une certaine quantité d'une substance décroît exponentiellement en fonction du temps en obéissant à la loi :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \qquad N(t) = Ce^{-Kt},$$

où les constantes C et K sont > 0. Déterminer le temps de demi-vie, c'est-à dire l'instant t tel que

$$N(t) = \frac{C}{2}.$$

Pour $t \in \mathbb{R}^+$,

$$N(t) = \frac{C}{2} \quad \Leftrightarrow \quad e^{-Kt} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -Kt = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2) \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{\ln(2)}{K}.$$

Exercice 191 (②) par Estelle Ta [*]

Une bactérie se développe avec un taux d'accroissement proportionnel à la population, c'est-à-dire que le nombre $N(t)$ de bactéries à l'instant t obéit à l'équation différentielle :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad N'(t) = KN(t)$$

où K est une constante > 0. La population passe de 10^6 individus à $2 \cdot 10^6$ en 12 minutes. Combien de temps faut-il pour passer de 10^6 individus à 10^8 ?

La fonction N est de la forme $t \mapsto Ce^{Kt}$, avec $C \in \mathbb{R}$, où t est le temps mesuré en minutes. Or, $N(0) = C \cdot e^{K \cdot 0} = C = 10^6$. De plus, $N(12) = 2.10^6 = Ce^{12K} = 10^6\ e^{12K}$, donc $e^{12K} = 2$, $12K = \ln(2)$, $K = \dfrac{\ln(2)}{12}$. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$N(t) = 10^6\ e^{\frac{\ln(2)}{12}t}.$$

Par conséquent,

$$N(t) = 10^8 \quad \Leftrightarrow \quad 10^2 = e^{\frac{\ln(2)}{12}t} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\ln(2)t}{12} = 2 \cdot \ln(10) \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{2 \cdot \ln(10) \cdot 12}{\ln(2)} \simeq 79,76.$$

Le temps nécessaire est d'environ 79 minutes et 46 secondes.

Exercice 192 (③) par Matilde Cruz (Courbes de sous-tangente constante) [*]

Déterminer les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$, à dérivée continue, vérifiant la condition suivante : pour tout réel x, la tangente au graphe de f en x n'est pas parallèle à l'axe (Ox) et, si $N(x)$ désigne le point d'intersection de cette tangente et de (Ox), la distance $N(x)$ à la projection orthogonale du point d'abscisse x du graphe de f sur l'axe (Ox) est constante.

Il est recommandé de faire un dessin.

La tangente au graphe de f au point d'abscisse a a pour équation :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a) = f'(a)x - f'(a)a + f(a).$$

L'énoncé nous dit que la tangente au graphe de f en a n'est pas parallèle à l'axe (Ox), c'est-à-dire que :

$$f'(a) \neq 0.$$

Le point $N(a)$ a pour ordonnée 0. Son abscisse est le nombre réel x tel que :

$$f'(a)(x-a) + f(a) = 0, \quad \text{i.e.} \quad x = \frac{-f(a)}{f'(a)} + a.$$

La projection orthogonale du point d'abscisse a du graphe de f sur l'axe (Ox) est le point de coordonnées $(a, 0)$. Ainsi, la distance de $N(a)$ à la projection orthogonale du point d'abscisse a du graphe de f est égale à :

$$\left|\frac{-f(a)}{f'(a)} + a - a\right| = \left|\frac{-f(a)}{f'(a)}\right| = \left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right|.$$

L'énoncé fournit une constante C telle que

$$\forall a \in \mathbb{R}, \qquad \left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right| = C.$$

Le choix $C = 0$, qui conduirait à $f = 0$, est exclu (car f' ne s'annule pas). Donc, f ne s'annule pas et reste de signe constant (car elle est dérivable, donc continue) ; il en est de même de f'. Ainsi, f vérifie une équation différentielle de la forme $y' = \lambda y$ avec $\lambda \neq 0$, donc est de la forme

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto K\, e^{\lambda t}$$

avec K et λ dans $\mathbb{R}^*$.

Réciproquement, si cette condition est satisfaite, f et f' ne s'nnulent pas et $\left|\frac{f}{f'}\right|$, donc f convient.

Exercice 193 (③) par Tristan Hottier [*]

On se propose de déterminer les fonctions f dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x)\, f(y).$$

a) Soit f une fonction vérifiant les conditions précédentes. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f'(0)\, f(x).$$

b) Conclure.

a) Prenons f qui convient. Alors

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x+y) = f(x) f(y)$$

En dérivant par rapport à y chaque membre de l'équation, on obtient

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f'(x+y) = f'(y) f(x).$$

D'où, en prenant $y = 0$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = f'(0) f(x).$$

b) D'après l'équation différentielle précédemment obtenue, les fonctions solutions sont de la forme

$$f : x \mapsto Ce^{f'(0)x} \qquad \text{avec} \quad C \in \mathbb{R}.$$

En prenant $x = 0$, on trouve alors facilement que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(0) e^{f'(0)x}$$

Or, f vérifie $f'(x) = f'(0) f(x)$ donc pour $x = 0$:

$$f'(0) = f'(0) f(0).$$

Il y a deux possibilités : $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.
Si $f(0) = 0$ alors f est la solution nulle. Si $f(0) = 1$ alors f est de la forme $f : x \mapsto e^{xf'(0)}$. En posant $\lambda = f'(0)$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = e^{\lambda x}.$$

Réciproquement, de telles fonctions sont bien solutions de l'équation fonctionnelle.
Les fonctions solutions de l'équation fonctionnelle

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) f(y)$$

sont donc la fonction nulle et les fonctions de la forme $x \mapsto e^{\lambda x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 194 (③) par Tristan Hottier [∗]

On considère une fonction continue f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) f(y)$$

a) Montrer que f est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.
b) On suppose que f s'annule en un point de $\mathbb{R}$. Montrer que f est identiquement nulle.
c) On suppose que f est à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$. Qu'en déduit t-on à l'aide de l'exercice 24 de **1.5** ?

a) En prenant $y = x$, on obtient d'après l'équation donnée : $f(2x) = f(x)^2$.
Or, il est évident que $f(x)^2 \in \mathbb{R}^+$ donc en remplaçant x par $\dfrac{x}{2}$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)^2 \in \mathbb{R}^+.$$

b) On suppose que la fonction f s'annule en $y \in \mathbb{R}$.
Alors, d'après l'équation fonctionnelle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) f(y) = f(x) \times 0 = 0.$$

Lorsque x décrit $\mathbb{R}$, $x + y$ aussi, donc f est identiquement nulle.

c) Supposons f à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$. La fonction $\ln(f)$ est donc bien définie, continue, et vérifie, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\ln(f(x+y)) = \ln(f(x)\ f(y)) = \ln(f(x)) + \ln(f(y)).$$

L'exercice 24 assure qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \ln(f(x)) = ax.$$

Ainsi, si $\alpha = e^a$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = e^{ax} = \alpha^x.$$

Réciproquement, les fonction de la forme $x \longmapsto \alpha^x$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ sont strictement positives et solutions du problème. Pour obtenir l'ensemble des solutions du problème, il suffit de rajouter la fonction nulle.

Exercice 195 (①) par Macéo Pereira [*]

a) Trouver les fonctions réelles f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) - 2f(x) = 1.$$

On cherchera une solution particulière constante.

b) Trouver les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) + f(x) = x.$$

On cherchera une solution particulière affine.

---

a) La seule solution constante de l'équation non homogène est $x \mapsto -\dfrac{1}{2}$. Les solutions de l'équation homogène sont les $x \mapsto Ce^{2x}$. Par conséquent, les solutions de l'équation sont les fonctions f de la forme

$$x \mapsto -\frac{1}{2} + Ce^{2x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

b) Si $(A,B) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $x \mapsto Ax+B$ est solution de l'équation non homogène si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad Ax + (A+B) = x,$$

c'est-à-dire, par identification, $A = 1$ et $A + B = 0$, i.e. si $A = 1$ et $B = -1$. Les solutions de l'équation homogène sont les $x \mapsto Ce^{-x}, C \in \mathbb{R}$. Ainsi les solutions de l'équation sont :

$$x \mapsto x - 1 + Ce^{-x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 196 (②) par Jean Maltère [*]

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche les fonctions réelles et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) - \lambda f(x) = e^x.$$

a) Traiter le cas $\lambda \neq 1$. On cherchera une solution particulière de la forme$x \longmapsto Ce^x$.

b) Traiter le cas $\lambda = 1$. On cherchera une solution particulière de la forme$x \longmapsto Cxe^x$.

---

a) Pour $\lambda \neq 1$, il s'agit de résoudre

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) - \lambda f(x) = e^x \quad (1)$$

Soient $C \in \mathbb{R}$ et $f_1 : x \mapsto Ce^x$. Alors f_1 est solution de (1) si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad Ce^x - \lambda e^x = e^x \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{1}{1-\lambda}.$$

Ainsi, les solutions de (1) sont les fonctions de la forme :

$$x \longmapsto \frac{e^x}{1-\lambda} + Ke^{\lambda x}, \qquad \text{avec} \quad K \in \mathbb{R}.$$

b) L'équation devient

$$f'(x) - f(x) = e^x \quad (2).$$

Soient $C \in \mathbb{R}$ et $f_2 : x \mapsto Cxe^x$. Alors f_2 est solution de (2) si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad C\left(e^x + xe^x\right) - Cxe^x = e^x \quad \Leftrightarrow \quad C = 1.$$

Ainsi les fonctions solutions de (2) sont les fonctions de la forme :

$$x \longmapsto e^x(x+K), \qquad \text{avec} \qquad K \in \mathbb{R}.$$

Exercice 197 (②) par Estelle Ta [*]

Trouver les fonctions réelles f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) + 3f(x) = \sin(x).$$

On cherchera une solution particulière de la forme $x \longmapsto a\sin(x) + b\cos(x)$.

Posons, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f_0(x) = a\sin(x) + b\cos(x).$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_0'(x) = a\cos(x) - b\sin(x).$$

Donc, f_0 vérifie l'équation différentielle si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad (a+3b)\cdot\cos(x) + (3a-b)\cdot\sin(x) = \sin(x).$$

Il suffit à cet effet que

$$(a,b) = \left(\frac{3}{10}, \frac{-1}{10}\right).$$

Comme les solutions de l'équation homogène sont les

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto Ce^{-3x},$$

les solutions de l'équation difféletielle considérée sont les

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{3}{10}\sin(x) - \frac{1}{10}\cos(x) + Ce^{-3x}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

6.5 Complément : la condition nécessaire d'extremum

Exercice 198 (④) par Estelle Ta

Soient f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et M_0 un point de $\mathbb{R}^2$ n'appartenant pas au graphe de f, de coordonnées (x_0, y_0). Pour x dans $\mathbb{R}$, on note $M(x)$ le point du graphe de f d'abscisse x, c'est-à-dire le point de coordonnées $(x, f(x))$. On suppose que la distance de M_0 au graphe de f est atteinte au point de paramètre x_1, ce qui signifie que la fonction :

$$\varphi : x \longmapsto \left|\left|\overrightarrow{M_0M(x)}\right|\right|$$

est minimale en x_1.
Pour x dans $\mathbb{R}$, exprimer $\psi(x) = \varphi(x)^2$ en fonction de $x, x_0, y_0, f(x)$. Calculer ensuite $\psi'(x)$.
En déduire que la droite $(M_0M(x_1))$ est perpendiculaire à la tangente au graphe de f au point d'abscisse x_1.
Il est recommandé de faire un dessin.

Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\psi(x) = \left(\left\|\overrightarrow{M_0M(x)}\right\|\right)^2 = (x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 = (x_0 - x)^2 + (y_0 - f(x))^2.$$

Par suite, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\psi'(x) = 2(x - x_0) + 2f(x)f'(x)\ (f(x) - y_0)^2 = \overrightarrow{M_0M(x)}.\overrightarrow{M'(x)},$$

où on note $\overrightarrow{M'(x)}$ le vecteur de coordonnées $(1, f'(x))$, qui dirige la tangente au graphe de f au point d'abscisse x.

Puisque φ est minimale en x_1, ψ aussi et $\psi'(x_1) = 0$, i.e.

$$\overrightarrow{M_0M(x_1)}.\overrightarrow{M'(x_1)} = 0.$$

Comme $\overrightarrow{M'(x_1)}$ dirige la tangente au graphe de f au point d'abscisse x_1, cette dernière relation signifie bien que la droite $(M_0M(x_1))$ est perpendiculaire à la tangente au graphe de f au point d'abscisse x_1. Un dessin permet de visualiser cette propriété.

Remarque. Il est préférable de travailler avec $\psi = \varphi^2$ qu'avec φ pour éviter l'apparition de radicaux parasites.

7 Complément : les fonctions puissances

7.1 Généralités

EXERCICE 199 (②) par Loïse Launay [*]

a) Pour quels nombres réels α la fonction $\varphi_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ est-elle convexe sur $\mathbb{R}^{+*}$?
b) En déduire que, si $\alpha > 1$,

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \qquad (1 + x)^\alpha \geq 1 + \alpha x.$$

a) Les fonctions puissances sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$. Pour étudier la convexité d'une fonction, on étudie le signe de la dérivée seconde.

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \varphi'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1},$$
$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \varphi''_\alpha(x) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2}.$$

Par définition des fonctions puissances, pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, x^α est strictement positif. Ainsi, le signe de la dérivée seconde est, en tout point, celui de $\alpha(\alpha - 1)$.
Par conséquent, la fonction φ_α est convexe sur $\mathbb{R}^{+*}$ si et seulement si $\alpha \in]-\infty, 0] \cup [1; +\infty[$.

b) On note f la fonction suivante :

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \qquad f(x) = (1 + x)^\alpha.$$

Si $\alpha > 1$, la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}^{+*}$. La courbe d'une fonction convexe est au-dessus de toutes ses tangentes. Or, l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse 0 est :

$$y = f(0) + f'(0)(x - 0) = 1 + \alpha x,$$

ce qui achève la démonstration.

EXERCICE 200 (①) par Maorine Pereira [*]

Déterminer la limite de $\dfrac{x^{\alpha}-1}{x-1}$ lorsque x tend vers 1.

Soit φ_α la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \varphi_\alpha(x) = x^{\alpha}.$$

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \varphi'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}, \qquad \varphi_\alpha(1) = 1 \quad \text{et} \quad \varphi'_\alpha(1) = \alpha.$$

Alors, par définition de la dérivée en un point. :

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{\alpha}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\varphi_\alpha(x) - \varphi_\alpha(1)}{x-1} = \varphi'_\alpha(1) = \alpha.$$

EXERCICE 201 (①) par Macéo Pereira [*]

Soient α dans $\mathbb{R}$. Pour tout n de $\mathbb{N}$, calculer la dérivée n-ième de φ_α.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et φ_α la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad \varphi_\alpha(x) = x^{\alpha}.$$

On cherche à calculer la dérivée n-ième de φ_α. On conjecture :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad \varphi_\alpha^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}.$$

Démontrons cette propriété par récurrence sur n :

Initialisation : On sait que, si $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\varphi'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, la propriété est vraie pour $n = 1$.

Hérédité : Supposons la propriété vraie au rang $n \in \mathbb{N}^*$.

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$\varphi_\alpha^{(n)} = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$$

En dérivant, il vient, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$\varphi_\alpha^{(n+1)} = (\alpha-n)\ \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)x^{\alpha-n-1} = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)(\alpha-n)x^{\alpha-n-1},$$

ce qui achève la récurrence.

EXERCICE 202 (④) par Antonin Demairé[*]

Soient $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$, f une fonction de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$. En imitant éventuellement la démonstration du théorème 4 de **6.4.2**, montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes.

- la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f'(x) = \frac{\alpha}{x} f(x),$$

- il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f(x) = Cx^{\alpha}.$$

Nous allons nous intéresser à une situation plus générale. On se donne un intervalle I de $\mathbb{R}$, une application continue a de I dans $\mathbb{R}$, et on cherche les applications f de I dans $\mathbb{R}$, dérivables et telles que

$$\forall x \in I, \qquad f'(x) = a(x)f(x).$$

Soit A une primitive de a sur I. Nous allons montrer que les fonctions vérifiant l'équation différentielle précédente sont les fonctions de la forme Ce^A où C est une constante réelle. Pour cela, on adapte la démonstration du théorème 4 de **6.4.2**.

Si f est une fonction dérivable de I dans $\mathbb{R}$, $g := fe^{-A}$ est dérivable de dérivée

$$g' = f'e^{-A} - fA'e^{-A} = (f' - af)e^{-A}.$$

Comme e^{-A} ne s'annule en aucun point, il s'ensuit que $f' - af$ est la fonction nulle si et seulement si g' est la fonction nulle, i.e. si g est constante, i.e. si f est de la forme Ce^A où C est constante.

Dans cet exercice, $I = \mathbb{R}^{+*}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad a(x) = \frac{\alpha}{x}.$$

La fonction a est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

$$A\ : x \in \mathbb{R}^{+*} \longmapsto \alpha \ln(x)$$

en est une primitive, qui vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad e^{A(x)} = x^{\alpha}.$$

On en déduit le résultat de l'exercice. Le sens retour pouvait bien sûr se traiter par simple vérification.

Exercice 203 (②) par Matilde Cruz [*]

La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est définie par $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = \sqrt{u_n}.$$

Exprimer u_n en fonction de u_0 et n, puis déterminer la limite de $(u_n)_{n\geq 0}$.

On remarque que

$$u_0 = u_0, \quad u_1 = \sqrt{u_0} = (u_0)^{\frac{1}{2}}, \quad u_2 = \sqrt{\sqrt{u_0}} = (u_0)^{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}, \quad u_3 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{u_0}}} = (u_0)^{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}.$$

On considère la propriété $\mathcal{P}_n : u_n = u_0^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$. Prouvons-la par récurrence.

Initialisation. Au rang $n = 0$, $(u_0)^{\left(\frac{1}{2}\right)^0} = (u_0)^1 = u_0$, donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_k$ vraie : $u_k = u_0^{\left(\frac{1}{2}\right)^k}$. Montrons alors que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie également.

$$u_{k+1} = \sqrt{u_k} = (u_k)^{\frac{1}{2}} = (u_0)^{\left(\frac{1}{2}\right)^k \times \frac{1}{2}} = (u_0)^{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}.$$

Ainsi $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

Calculons alors la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$. On a

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{donc} \quad u_0^{\left(\frac{1}{2}\right)^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (u_0)^0 = 1.$$

La suite (u_n) converge vers 1.

Exercice 204 (②) par Matilde Cruz [*]

Soit a un élément de $\mathbb{R}^{+*}$. On note ϕ_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ \phi_a(x) = a^x = \exp(\ln(a)x).$$

a) Calculer la dérivée de $\phi_a(x)$.

---

b) Déterminer les limites de $\phi_a(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, lorsque x tend vers $-\infty$. on discutera selon la position de a par rapport à 1.

c) Tracer les graphes de ϕ_2, de $\phi_{\frac{1}{2}}$.

a) Calculons la dérivée de ϕ_a. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\phi_a'(x) = \ln(a) \cdot \exp(x \cdot \ln(a)) = \ln(a)\, a^x.$$

b) Nous allons distinguer trois cas.

Pour $a < 1$ et donc $\ln(a) < 0$:

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} a^x = 0.$$

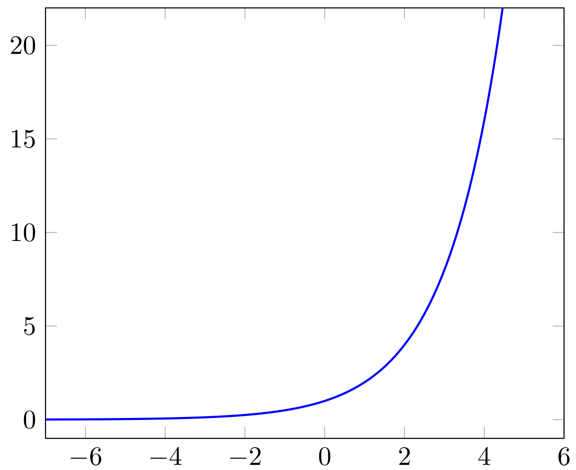
Pour $a = 1$ et donc $\ln(a) = 0$:

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} a^x = 1.$$

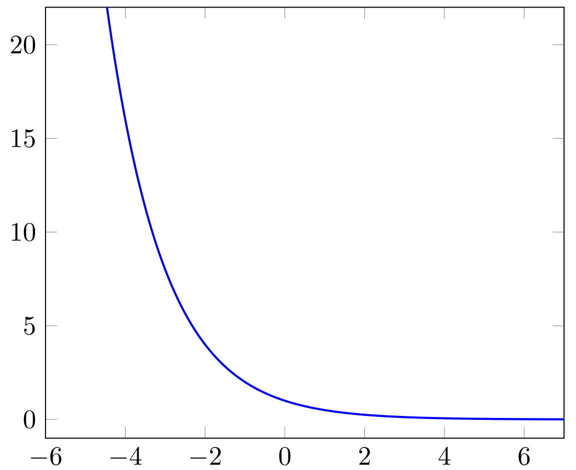
Pour $a > 1$ et donc $\ln(a) > 0$:

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty.$$

c) Graphe de la fonction ϕ_2 :



Graphe de la fonction $\phi_{\frac{1}{2}}$:



Exercice 205 (①) par Léo Baciocchi

Soit $a > 0$. Déterminer la limite de $\dfrac{a^x - 1}{x}$ lorsque x tend vers 0.

..

Soit $f(x) = a^x = e^{\ln(a)x}$. On a : $f'(x) = \ln(a)e^{\ln(a)x}$, donc $f'(0) = \ln(a)$.
Or, $f'(0) = \lim_{x\to 0} \dfrac{a^x - a^0}{x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x}$.
Ainsi, $\lim_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln(a)$

Exercice 206 (②) par Matilde Cruz [∗]

a) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, u une fonction dérivable de I dans $\mathbb{R}^{+*}$, v une fonction dérivable de I à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour x dans $\mathbb{R}$, on pose :

$$w(x) = u(x)^{v(x)}$$

Calculer la dérivée de w.

b) Écrire l'équation de la tangente au graphe de la fonction $f : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto x^x$ au point d'abscisse 1.

a) Réécrivons d'abord la fonction w :

$$\forall x \in I, \qquad w(x) = u(x)^{v(x)} = \exp(\ln(u(x)) \cdot v(x))$$

Calculons la dérivée :

$$w'(x) = \left[\frac{u'(x)}{u(x)} \cdot v(x) + \ln(u(x)) \cdot v'(x)\right] \cdot \exp(\ln(u(x)) \cdot v(x))$$

b) On prend pour u et v l'identité de $\mathbb{R}^{+*}$, et on utilise la formule de la tangente au graphe d'une fonction au point d'abscisse a :

$$T_a : y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

D'après a), on a, si $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$f'(x) = \left[\frac{1}{x} \cdot x + \ln(x) \cdot 1\right] \cdot \exp(\ln(x) \cdot x) = [1 + \ln(x)] \cdot x^x$$

L'équation de la tangente au graphe de la fonction f au point d'abscisse 1 est :

$$y = [1 + \ln(1)] \cdot 1^1 \cdot (x - 1) + 1^1 \quad \Leftrightarrow \quad y = x.$$

La tangente au graphe de la fonction f au point d'abscisse 1 est la première bissectrice.

Exercice 207 (③) par Matilde Cruz [∗]

On considère une boîte fermée en forme de cylindre droit. La base est un disque de rayon $r > 0$, la hauteur du cylindre est $h > 0$. On note S l'aire latérale de la boîte (incluant les deux bases), V son volume.

a) Justifier les relations :

$$S = 2\pi(r^2 + rh), \quad V = \pi r^2 h.$$

b) On suppose que V est fixé. En utilisant la relation $S = 2\pi\left(r^2 + \dfrac{V}{\pi r}\right)$ et en étudiant la fonction :
$$f : r \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto r^2 + \frac{V}{\pi r},$$
dire comment choisit r et h pour que S soit minimale.

a) Les deux « couvercles » du cylindre ont chacun pour aire πr^2, la partie ouverte $2\pi hr$ (produit du périmètre du cercle et de la hauteur) :
$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh.$$
Le volume du cylindre est le produit de l'aire de la base (disque de rayon r) et de la hauteur :
$$V = \pi r^2 h.$$
On obtient bien l'expression donnée.

b) Pour trouver la surface minimale pour un volume fixé, on étudie la fonction f, afin d'en déterminer le minimum.
Calculons d'abord sa dérivée :
$$\forall r \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad f'(r) = 2r + \frac{V}{\pi} \cdot \left(\frac{-1}{r^2}\right) = \frac{2r^3\pi - V}{\pi r^2}.$$
Puis, étudions le signe de $f'(r)$. Comme $\pi r^2 > 0$, on a, en utilisant la stricte croissance la fonction racine cubique,
$$f'(r) \geq 0 \iff r^3 > \frac{V}{2\pi} \iff r > \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$
Traçons alors les tableaux de signes et variations :

r	0		$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$		$+\infty$
$f(r)$		$-$	0	$+$	

r	0		$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$		$+\infty$
$f(r)$		$\searrow$	$f(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}})$	$\nearrow$	

Comme $S = 2\pi f(r)$, la surface du cylindre est minimale pour
$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \quad \text{et} \quad h = \frac{V}{\pi r^2}.$$

Exercice 208 (③) Par Lancelot Achour [*]

Soit α un élément de $]0;1[$

a) En étudiant une fonction judicieuse, montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad (1+x)^\alpha \leq 1 + x^\alpha.$$

b) Soient x et y dans $\mathbb{R}^+$ avec $y > x$. Montrer que $y^\alpha - x^\alpha \leq (x-y)^\alpha$.

a) On pose :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (1+x)^\alpha - 1 - x^\alpha.$$
Il est clair que f est bien définie sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. On calcule alors :
$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} - \alpha x^{\alpha-1} = \alpha((1+x)^{\alpha-1} - x^{\alpha-1}).$$
Observons que $\alpha - 1 < 0$. Par conséquent, la fonction $x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto x^{\alpha-1}$ est décroissante. En particulier f' est négative sur $\mathbb{R}^{+*}$ et donc f est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. Puisque $f(0) = 0$, on conclut :
$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f(x) \leq 0 \iff \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad (1+x)^\alpha \leq 1 + x^\alpha,$$
ce qu'il fallait montrer.

b) On utilise ici un argument d'homogénéité pour simplifier les calculs. On écrit :
$$y^\alpha = (y - x + x)^\alpha = x^\alpha \left(\frac{y-x}{x} + 1\right)^\alpha.$$
En appliquant a), il vient que :
$$y^\alpha \leq x^\alpha \left(1 + \left(\frac{y-x}{x}\right)^\alpha\right) = x^\alpha + (y-x)^\alpha,$$
d'où l'on tire que :
$$y^\alpha - x^\alpha \leq (y-x)^\alpha,$$
achevant l'exercice.

Exercice 209 (③) par Léo Baciocchi [*]

Soit $p \in]1, +\infty[$.

a) Montrer qu'il existe un unique réel q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Vérifier que $q > 1$. Déterminer q pour $p = 2$, puis pour $p = 4$.

b) On fixe y dans $\mathbb{R}^{+*}$. Étudier les variations de la fonction f définie par
$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy.$$

c) Conclure que
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{+*2}, \quad xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

a) On a $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \iff \frac{1}{q} = \frac{p-1}{p} \iff q = \frac{p}{p-1}$.

Puisque $p > p - 1$, on a bien $q > 1$. Pour $p = 2$ on a $q = 2$, et pour $p = 4$ on a $q = \frac{4}{3}$.

b) On a
$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f'(x) = x^{p-1} - y.$$
On peut donc tracer le tableau de variations suivant :

x	0		$y^{\frac{1}{p-1}}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$f\left(y^{\frac{1}{p-1}}\right)$	$\nearrow$	

En effet, $f'(x) = 0 \implies x^{p-1} = y \implies x = \sqrt[p-1]{y} = y^{\frac{1}{p-1}}$.

c) On a donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f(x) \geqslant f\left(y^{\frac{1}{p-1}}\right).$$

Or,

$$f\left(y^{\frac{1}{p-1}}\right) = \frac{y^{\frac{p}{p-1}}}{p} + \frac{y^q}{q} - y^{\frac{p}{p-1}} = y^q \cdot \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1\right) = 0,$$

donc l'inégalité est bien vérifiée :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{+*^2}, \quad xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

7.2 Fonctions puissances et croissances comparées

EXERCICE 210 (①) par Elies Kerkeni [*]

Déterminer la limite de $\dfrac{(1,01)^x}{x^{2022}}$ en $+\infty$

On pose $a = 1,01$ et $\alpha = 2022$. Il est clair que $a > 1$. On applique alors la remarque 2 de **7.2** pour aboutir à

$$\frac{(1,01)^x}{x^{2022}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty.$$

EXERCICE 211 (①) par J. Hoarau [*]

Trouver la limite en $+\infty$ de

$$f(x) = e^{-\sqrt{x}}x^2, \quad g(x) = e^{-x^2}x^{10000}, \quad h(x) = \ln(x)^8 e^{-x}, \quad i(x) = \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}.$$

1. On écrit $f(x)$ sous forme exponentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f(x) = \exp(-\sqrt{x} + 2\ln(x)).$$

On met en facteur le terme prépondérant :

$$-\sqrt{x} + 2\ln(x) = -\sqrt{x}\,\left(1 - 2\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\right)$$

c'est le produit d'un facteur tendant vers $-\infty$ et d'un facteur tendant vers 1, il tend donc vers $-\infty$. Ainsi,

$$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.$$

2. On écrit $g(x)$ sous forme exponentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad g(x) = \exp(-x^2 + 1000\ln(x)).$$

On met en facteur le terme prépondérant :

$$-x^2 + 1000\ln(x) = -x^2\,\left(1 - 1000\frac{\ln(x)}{x^2}\right)$$

c'est le produit d'un facteur tendant vers $-\infty$ et d'un facteur tendant vers 1, il tend donc vers $-\infty$. Ainsi,

$$g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.$$

3. On écrit $h(x)$ sous forme exponentielle :
$$\forall x \in]1,+\infty[, \quad h(x) = \exp(-x + 8\ln(\ln(x))).$$
On met en facteur le terme prépondérant :
$$-x + 8\ln(\ln(x)) = -x\left(1 - 8\frac{\ln(\ln(x))}{x}\right)$$
c'est le produit d'un facteur tendant vers $-\infty$ et d'un facteur tendant vers 1, il tend donc vers $-\infty$. Ainsi,
$$g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$
Remarque. On utilise la limite
$$\frac{\ln(\ln(x))}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0,$$
que l'on justifie par exemple en posant $x = e^y$ et en utilisant une croissance comparée standard.
4. Comme $\ln(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ et que $\dfrac{\ln(y)}{y}$ tend vers 0 en $+\infty$, on a, par composition de limites, $i(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Exercice 212 (②) par Elies Kerkeni [*]

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. En posant $y = \dfrac{1}{x}$, trouver la limite en 0^+ de :
$$f_\alpha(x) = x^\alpha \ln(x)$$

On a : $y^\alpha = \dfrac{1}{x^\alpha}$, donc quand $x \longrightarrow 0^+, y \to +\infty$

On a également : $f_\alpha(x) = -\dfrac{\ln(y)}{y^\alpha}$. Par conséquent, on a, en utilisant les croissances comparées :
$$\lim_{x\to 0^+} f_\alpha(x) = \lim_{y\to+\infty} -\frac{\ln(y)}{y^\alpha} = 0$$

Exercice 213 (②) par Tristan Hottier [*]

En appliquant la méthode de démonstration du théorème 3 de **5.5**, montrer que, si $a \in \mathbb{R}^+$ et $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$, alors
$$\frac{a^n}{(n!)^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Soient $a \in \mathbb{R}^+$ et $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$.

On pose, si $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{a^n}{(n!)^\alpha}$ et on note que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a}{(n+1)^\alpha}.$$
Pour $n \geq (2a)^{\frac{1}{\alpha}} - 1$, on a donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{1}{2}$. Notons N le plus petit entier supérieur ou égal à $(2a)^{\frac{1}{\alpha}} - 1$. Ainsi
$$\forall n \geq N, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}.$$
D'où, par une récurrence laissée au lecteur,
$$\forall n \geq N, \quad u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} u_N.$$
Le majorant tend vers 0 et $(u_n)_{n\geq 0}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, ce qui entraîne le résultat.

7.3 L'inégalité artihmético-géometrique

EXERCICE 214 (④) par Tristan Hottier [*]

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \dots, x_n$ des éléments de $\mathbb{R}^{+*}$. La moyenne harmonique de $(x_1, \dots, x_n)$ est le réel H tel que $\dfrac{1}{H}$ soit la moyenne arithmétique du n-uplet $\left(\dfrac{1}{x_1}, \dots, \dfrac{1}{x_n}\right)$. En d'autres termes : $H = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$. En appliquant le théorème 7 à $\left(\dfrac{1}{x_1}, \dots, \dfrac{1}{x_n}\right)$, montrer que $H \leq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$, et qu'il y a égalité si et seulement si les x_i sont tous égaux.

Appliquons le théorème 7 au n-uplet $\left(\dfrac{1}{x_1}, \dots, \dfrac{1}{x_n}\right)$ d'éléments de $\mathbb{R}^{+*}$. Il vient

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}.$$

Comme $H = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$, on a

$$H \leq \frac{1}{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}} = \sqrt[n]{\frac{1}{\frac{1}{\prod_{i=1}^n x_i}}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}.$$

On retrouve ainsi l'inégalité voulue :

$$H \leq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}.$$

D'autre part, d'après le cas d'égalité du théorème 7, cette inégalité est une égalité si et seulement si tous les $\frac{1}{x_i}$ sont égaux, i.e. si et seulement si tous les x_i sont égaux.

EXERCICE 215 (④) par Tristan Hottier [*]

Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on se propose d'établir la propriété suivante, que l'on appelle $\mathcal{P}_n$: pour tout n-uplet $(x_1, \dots, x_n)$ d'éléments de $\mathbb{R}^{+*}$, on a

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i},$$

avec égalité si et seulement si les x_i sont tous égaux. La démonstration proposée dans cet exercice est due à Cauchy.

On note A l'ensemble des n de $\mathbb{N}^*$ tels que $\mathcal{P}_n$ soit vraie.

a) Montrer que $\mathcal{P}_2$ est vraie.

b) Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que, si $\mathcal{P}_n$ est vraie, il en est de même de $\mathcal{P}_{2n}$.

c) Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que, si $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, il en est de même de $\mathcal{P}_n$. On pourra, si $x_1, \dots, x_n$ sont des éléments de $\mathbb{R}^{+*}$, poser :

$$x_{n+1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

d) Conclure à l'aide de l'exercice 13 de **1.3**.

a) Soit $n = 2$. Alors :

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} x_i = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{et} \quad \sqrt{\prod_{i=1}^{2} x_i} = \sqrt{x_1 x_2}.$$

Or,

$$\frac{x_1 + x_2}{2} - \sqrt{x_1 x_2} = \frac{x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1 x_2}}{2} = \frac{\left(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right)^2}{2} \geq 0$$

donc $\mathcal{P}_2$ est vraie.

b) Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \quad & \Rightarrow \quad \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} x_i \geq \frac{1}{2}\left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} + \frac{1}{n}\sum_{i=n+1}^{2n} x_i\right) \\ & \Rightarrow \quad \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} x_i \geq \frac{1}{2}\left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} + \sqrt[n]{\prod_{i=n+1}^{2n} x_i}\right) \end{aligned}$$

Or,

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} + \sqrt[n]{\prod_{i=n+1}^{2n} x_i} \geq 2\sqrt[2n]{\prod_{i=1}^{2n} x_i}$$

(il suffit d'observer l'inégalité $a^2 + b^2 \geq 2ab$ pour s'en convaincre.)
Ainsi,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \sqrt[2n]{\prod_{i=1}^{2n} x_i}$$

et $\mathcal{P}_{2n}$ est vraie.

c) Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. Alors :

$$\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} x_i \geq \sqrt[n+1]{\prod_{i=1}^{n+1} x_i}$$

donc

$$\frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + x_{n+1}\right) \geq \sqrt[n+1]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \times \sqrt[n+1]{x_{n+1}}.$$

En posant $x_{n+1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, on obtient :

$$\frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + x_{n+1}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

et :

$$\sqrt[n+1]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \times \sqrt[n+1]{x_{n+1}} \geq \sqrt[n+1]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \times \sqrt[n(n+1)]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$

donc

$$\sqrt[n+1]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \times \sqrt[n+1]{x_{n+1}} \geq \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}}$$

et enfin

$$\sqrt[n+1]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \times \sqrt[n+1]{x_{n+1}} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}.$$

Ainsi, on retrouve $\mathcal{P}_n$ qui est alors vraie si $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

d) D'après l'exercice 13, si B est une partie de $\mathbb{N}^*$ contenant 1 et telle que :

$$(i) \quad \forall n \in B,\ 2n \in B \qquad \text{et} \qquad (ii) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ n+1 \in B \Rightarrow n \in B$$

alors $B = \mathbb{N}^*$.
Selon les questions b) et c), l'ensemble A défini dans cet exercice vérifie (i) et (ii).
De plus, il est évident que $\mathcal{P}_1$ est vrai donc $1 \in A$ ce qui justifie $A = \mathbb{N}^*$.
Comme $A = \mathbb{N}^*$, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel $n > 0$.

Exercice 216 (③) par Estelle Ta

Les arêtes d'un parallélépipède rectangle ont pour longueurs a, b, c. Le volume du parallélépipède est noté V, son aire latérale (i.e. la somme des aires des six faces) est notée S.

a) Calcule V et S en fonction de a, b et c

b) Montrer que
$$\frac{ab+bc+ca}{3} \geqslant V^{\frac{2}{3}}$$
A quelle condition y a-t-il égalité ?

c) Quel est le volume maximal d'un paralléléppipède d'aire latérale S donnée ? Pour quels parallélépipèdes est-il atteint ?

a) On a $V = abc$ et $S = 2ab + 2ac + 2bc$.

b) Soient $x_1 = ab, x_2 = bc$ et $x_3 = ca$. D'après l'inégalité arithmético-géométrique (théorème 7), appliquée ici avec $n = 3$, on a
$$\sqrt[3]{abbcca} \leqslant \frac{1}{3} \cdot (ab + bc + ca)$$
soit
$$\sqrt[3]{(abc)^2} \leqslant \frac{ab+bc+ac}{3},$$
ou encore
$$V^{\frac{2}{3}} \leqslant \frac{ab+bc+ca}{3}$$
Il y a égalité si et seulement si $ab = bc = ca$, à savoir ssi $a = b = c$.

c) On a donc
$$V^{\frac{2}{3}} \leqslant \frac{ab+bc+ca}{3} \quad \text{i.e.} \quad V \leqslant \left(\frac{S}{6}\right)^{\frac{3}{2}}.$$
Cette inégalité est une égalité si et seulement lorsque $a = b = c$, i.e. si le parallélépipède est un cube.

Exercice 217 (④) par Jean Maltère[∗]

Soit ABC un triangle. On note a, b, c les longueurs respectives des côtés BC, CA, AB. Le demi-périmètre de ABC est noté p : $p = \dfrac{a+b+c}{2}$. L'aire de ABC est notée S.

Le but des trois premières questions est d'établir la formule de Héron :
$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c).$$

a) Au moins une des hauteurs du triangle est intérieure au triangle. Supposons que ce soit le cas de la hauteur issue de A, dont on note H le pied. On pose $x = BH$. Montrer que
$$x^2 + h^2 = c^2 \quad \text{et que} \quad (a-x)^2 + h^2 = b^2.$$

b) Montrer que
$$16S^2 = 4a^2h^2 = 4a^2c^2 - 4a^2x^2.$$

c) Etablir la formule de Héron.

d) En déduire l'inégalité :
$$S \leq \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$$
l'égalité ayant lieu si et seulement si le triangle est équilatéral. Ainsi, parmi les triangles de périmètre fixé, l'aire maximale est atteinte pour les triangles équilatéraux.

a) Le triangle ABH est rectangle en H, donc d'après le théorème de Pythagore :
$$AH^2 + HB^2 = AB^2 \quad \text{i.e.} \quad h^2 + x^2 = c^2$$

De même, dans le triangle AHC on a :
$$AH^2 + HC^2 = AC^2 \quad \text{i.e.} \quad h^2 + (a-x)^2 = b^2$$

b) L'aire du triangle est donnée par $S = \dfrac{1}{2}ah$, donc
$$16S^2 = \frac{16}{4}a^2h^2 = 4a^2h^2 = 4a^2(c^2 - x^2 = 4a^2c^2 - 4a^2x^2,$$
où on a utilisé la relation $h^2 = c^2 - x^2$ vue en a).

c) On écrit tout d'abord
$$16S^2 = 4a^2c^2 - 4a^2x^2 = (2ac)^2 - (2ax)^2 = (2ac + 2ax)(2ac - 2ax).$$

Or, d'après les deux égalités de la question **a)** :
$$h^2 + a^2 - 2ax + x^2 = b^2 \quad \text{i.e.} \quad -2ax = b^2 - a^2 - (h^2 + x^2) = b^2 - a^2 - c^2.$$

Il s'ensuit que
$$16S^2 = (2ac + a^2 + c^2 - b^2)(2ac - a^2 - c^2 + b^2) = ((a+c)^2 - b^2)(b^2 - (a-c)^2),$$
$$16S^2 = (a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c) = (a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c).$$

D'où, finalement
$$S^2 = \left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a-b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)\left(\frac{-a+b+c}{2}\right) = p(p-b)(p-c)(p-a).$$

d) D'après l'inégalité arithmético-géométrique :
$$(p-b)(p-c)(p-a) \leq \left(\frac{1}{3}(p-b+p-c+p-a)\right)^3,$$
ce qui se réécrit
$$p(p-b)(p-c)(p-a) \leq p\left(\frac{1}{3}p\right)^3 \quad \text{i.e.} \quad S^2 \leq \frac{p^4}{27}.$$
Soit, puisque l'application racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$:
$$S \leq \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$$

On a égalité si et seulement si $p - a = p - b = p - c \Leftrightarrow a = b = c$, c'est-à-dire si le triangle ABC est équilatéral. L'aire d'un triangle de périmètre fixé est donc maximale s'il est équilatéral.

Remarque Il existe bien sûr des démonstrations de ce résultat nécessitant moins de calcul. Elles supposent en général de savoir qu'il **existe** un triangle de périmètre p fixé dont l'aire est maximale, ce qui n'est pas a priori évident (mais a été tenu pour tel jusqu'à la fin du dix-neuvièmme siècle).

7.4 Utilisation de la forme exponentielle pour le calcul des limites

Exercice 218 (③) par Samy Clementz et Georges Faraj[*]

Trouver les limites quand x tend vers $+\infty$ de :

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x, \qquad g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}.$$

On utilisera la limite clé suivante, traduisant le fait que la dérivée en 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est 1 :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Maintenant, si $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$f(x) = \exp\left(x \ln(1 + \frac{1}{x^2})\right) = \exp(u(x)),$$

avec $u(x) = x \ln(1 + \frac{1}{x^2})$. Pour déterminer la limite de u en $+\infty$, on écrit :

$$u(x) = x \frac{\ln(1 + \frac{1}{x^2})}{\frac{1}{x^2}} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x} \frac{\ln(1 + \frac{1}{x^2})}{\frac{1}{x^2}}.$$

Ainsi, d'après la limite clé ci-dessus, $\lim_{x\to+\infty} u(x) = 0$ (produit d'une fonction qui tend vers 0 et d'une fonction qui tend vers 1). Comme exp est continue en 0,

$$\lim_{x\to+\infty} \exp(u(x)) = \exp(0) = 1.$$

Finalement, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

Passons à g. Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on a

$$g(x) = \exp\left(x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})\right) = \exp(v(x)),$$

avec $v(x) = x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})$. Pour déterminer la limite de v en $+\infty$, on écrit :

$$v(x) = x^2 \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} \frac{1}{x} = x \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}.$$

Ainsi, d'après la limite clé ci-dessus, $\lim_{x\to+\infty} v(x) = +\infty$. Comme $\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \exp(v(x)) = +\infty.$$

Finalement, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

Remarque Plutôt que la « limite-clé » utilisée à deux reprises ci-dessus, on peut employer deux inégalités :

- celle qui traduit la concavité de ln, i.e.

$$\forall u \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad \ln(u) \leq u - 1,$$

- la majoration

$$\forall u \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad \frac{u-1}{u} \leq \ln(u).$$

La première inégalité suffit pour étudier f, la seconde pour étudier g.

En fait, en combinant ces deux inégalités et le théorème des gendarmes, on obtient une démonstration de la « limite-clé ».

Notons enfin que la seconde inégalité, due à Neper, se laisse démontrer en utilisant l'intégration. en effet, pour $x \in [1; +\infty[$,

$$\forall t \in [1; +\infty[, \quad \frac{1}{t} \geq \frac{1}{t^2},$$

donc

$$\int_1^x \frac{dt}{t^2} \leq \int_1^x \frac{dt}{t},$$

d'où

$$\frac{x-1}{x} \leq \ln(x).$$

EXERCICE 219 (③) par Tristan Hottier [*]

Trouver la limite quand x tend vers $+\infty$ de

$$f(x) = \frac{\ln(x)^x}{x^{\ln(x)}}$$

On commence par réécrire $f(x)$ sous forme exponentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f(x) = \exp\left(x \ln(\ln(x)) - \ln(x)^2\right)$$

On pose ensuite $X = \ln(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

D'où

$$f(x) = \exp\left(e^X \ln(X) - X^2\right) = f(x) = \exp\left(e^X\left(\ln(X) - \frac{X^2}{e^X}\right)\right).$$

Par croissance comparée, $\dfrac{X^2}{e^X} \xrightarrow[X \to +\infty]{} 0$ et $e^X\left(\ln(X) - \dfrac{X^2}{e^X}\right) \xrightarrow[X \to +\infty]{} +\infty$. Alors

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x)) = +\infty.$$

EXERCICE 220 (④) par Tristan Hottier [*]

a) Montrer que x^x tend vers 1 lorsque x tend vers 0^+.
b) Indiquer un exemple de fonction u de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ tendant vers 0 en 0 et telle que $u(x)^x$ ne tende pas vers 1 lorsque x tend vers 0^+.
c) Indiquer un exemple de fonction v de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ tendant vers 0 en 0 et telle que $x^{v(x)}$ ne tende pas vers 1 lorsque x tend vers 0^+.

a) On réécrit $f(x) = x^x$ sous forme exponentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f(x) = e^{x\ln(x)}$$

Par croissance comparée, $x\ln(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$ donc $e^{x\ln(x)} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 1$ d'où $\lim_{x \to 0^+}(x^x) = 1$.

b) Soit

$$u : x \in]0,1] \longmapsto e^{\frac{\ln(x)}{x}}.$$

Alors on a bien $\lim\limits_{x \to 0}(u(x)) = 0$ et :

$$u(x)^x = \exp(x \ln(u(x))) = \exp\left(\frac{x\ln(x)}{x}\right) = x.$$

Ainsi,

$$\lim_{x \to 0^+}(u(x)^x) = 0^+ \neq 1$$

c) Soit

$$v\ :x\in]0,1[\ \underset{]0,1[\to\mathbb{R}^{+*}}{\longmapsto}\ -\frac{1}{\ln(x)}.$$

Alors on a bien $\lim\limits_{x\to 0}(v(x))=0$ et :

$$x^{v(x)}=\exp(-v(x)\ln(x))=\exp\left(\frac{\ln(x)}{\ln(x)}\right)=e.$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x^{v(x)}\right)=e\neq 1.$$

Exercice 221 (④) par Tristan Hottier [*]

Soient a et b deux éléments de $\mathbb{R}^{+*}$, f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}.$$

Déterminer la limite de f en 0.

On commence par réécrire la fonction :

$$f(x)=\exp\left(\frac{1}{x}\ \ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)\right)=\exp\left(\frac{\ln(a^x+b^x)-\ln(2)}{x}\right).$$

On reconnaît ici le taux d'accroissement de la fonction $g(x)=\ln(a^x+b^x)$ en 0. Comme il s'agit d'une fonction dérivable car composée de fonctions dérivables, la limite de f en 0 est $\exp(g'(0))$. Or

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad g'(x)=\frac{a^x\ \ln(a)+b^x\ \ln(b)}{a^x+b^x},$$

donc

$$\exp(g'(0))=\exp\left(\frac{\ln(a)+\ln(b)}{2}\right)=\exp\left(\ln\left(\sqrt{ab}\right)\right)=\sqrt{ab}$$

d'où

$$\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\sqrt{ab}.$$

Remarque. Cet exercice peut également être l'occasion de s'initier aux développements limités (abrégés en DL), qui seront étudiés au cours de l'année de sup. Il n'est donc pas nécessaire de comprendre cette deuxième correction, même si elle permet de traiter le problème dans des cas plus généraux que celui-ci.

On réécrit l'expression de $\dfrac{a^x+b^x}{2}$ grâce aux DL :

$$\begin{aligned}\frac{a^x+b^x}{2}&=\frac{e^{x\ln(a)}+e^{x\ln(b)}}{2}\\&\underset{x\to 0}{=}\frac{1+x\ln(a)+1+x\ln(b)+o(x)}{2}\\&\underset{x\to 0}{=}1+x\frac{\ln(a)+\ln(b)}{2}+o(x)\end{aligned}$$

Ainsi toujours par DL,

$$\begin{aligned}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}&\underset{x\to 0}{=}\exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(1+x\frac{\ln(a)+\ln(b)}{2}+o(x)\right)\right)\\&\underset{x\to 0}{=}\exp\left(\frac{1}{2x}(x(\ln(a)+\ln(b))+o(x))\right)\\&\underset{x\to 0}{=}\exp\left(\frac{1}{2}\ln(ab)+o(1)\right)\\&\underset{x\to 0}{=}e^{\ln\left(\sqrt{ab}\right)+o(1)}\end{aligned}$$

donc

$$\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x} \xrightarrow[x\to 0]{} \sqrt{ab}.$$

8 Intégration

8.1 Calculs d'intégrales et de primitives

Exercice 222 (②) par Matilde Cruz [*]

Calculer les primitives des fonctions suivantes :

— $a : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(3x) + 2\sin(5x)$

— $b : x \in \mathbb{R} \mapsto 6\exp(-4x)$

— $c : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(x)\sin(x)$

— $d : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2\exp(-x^3)$

— $e : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{x}{x^2+1}$

— $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \exp(x)\exp(\exp(x))$

— $g : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \sqrt{x}$

— $h : x]-1,1[\mapsto \frac{3x}{\sqrt{(1-x^2)}}$

— $i : x \in \mathbb{R} \mapsto (1-2x)^5$

— $j : x]-\infty,1[\mapsto \frac{x^2}{x^3-1}$

— $k : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{1+2\exp(-x)}$

— $l : x]1,+\infty[\mapsto \frac{(\ln(x))^\alpha}{x}$

— $m : x]-1,+\infty[\mapsto \frac{1}{(x+1)^n}$

— $n : x]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\mapsto \tan(x)$

— $p : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \frac{\sin(x) - x\cos(x)}{x^2}$

Voici une primitive de chacune des fonctions ; dans chaque cas, les primitives sur l'intervalle considéré s'obtiennent en ajoutant une constante.

— $A(x) = \frac{1}{3}\sin(3x) - \frac{2}{5}\cos(5x)$

— $B(x) = \frac{-3}{2}\exp(-4x)$

— $C(x) = \frac{-1}{4}\cos(2x)$

— $D(x) = \frac{-1}{3}\exp(-x^3)$

— $E(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$

— $F(x) = \exp\left(\exp(x)\right)$

— $G(x) = \frac{2}{3}(\sqrt{x})^3$

— $H(x) = -3\sqrt{1-x^2}$

— $I(x) = \frac{-1}{12}(1-2x)^6$

— $J(x) = \frac{1}{3}\ln(x^3-1)$

— $K(x) = \ln(\exp(x)+2)$

— $L(x) = \frac{\ln(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$

— $M(x) = \frac{-1}{(x+1)^{n-1}}$

— $N(x) = -\ln(\cos(x))$

— $P(x) = -\frac{\sin(x)}{x}$

Exercice 223 (②) par Matilde Cruz [*]

En utilisant les relations obtenues dans l'exemple de **2.3** et dans l'exercice 46, calculer :

$$I = \int_1^3 \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)}, \quad J = \int_2^5 \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)(t+2)}$$

Trouvons d'abord une primitive H de la fonction $h : t \mapsto \dfrac{1}{t(t+1)}$:

$$h(t) = \frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}, \qquad H(t) = \ln(t) - \ln(t+1) = \ln\left(\frac{t}{t+1}\right).$$

Utilisons-la pour le calcul de l'intégrale :

$$I=\int_1^3 \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)}=H(3)-H(1)=\ln\left(\frac{3}{4}\right)-\ln\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\left(\frac{3}{2}\right).$$

Trouvons d'abord une primitive F de la fonction $f: t\mapsto \dfrac{1}{t(t+1)(t+2)}$:

$$f(t)=\frac{1}{t(t+1)(t+2)}=\frac{1}{2t}-\frac{1}{(t+1)}+\frac{1}{2(t+2)},\qquad F(t)=\frac{1}{2}\ln(t)-\ln(t+1)+\frac{1}{2}\ln(t+2).$$

Utilisons-la pour le calcul de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
J&=\int_2^5 \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)(t+2)}=F(5)-F(2)\\
&=\frac{1}{2}\ln(5)-\ln(6)+\frac{1}{2}\ln(7)-\frac{1}{2}\ln(2)+\ln(3)-\frac{1}{2}\ln(4)\\
&=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{6^2}\times\frac{7}{2}\times\frac{3^2}{4}\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{5\times 7}{2^6}\right)
\end{aligned}$$

Exercice 224 (2) par Antonin Demairé

Pour p et q dans $\mathbb{N}^*$, calculer :

$$\int_0^{2\pi}\cos(pt)\cos(qt)\mathrm{d}t,\qquad \int_0^{2\pi}\sin(pt)\sin(qt)\mathrm{d}t.$$

Rappel : Pour a et b dans $\mathbb{R}$,

$$\cos(a)\cos(b)=\frac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2}$$

$$\sin(a)\sin(b)=\frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$$

Par ailleurs, pour $n\in\mathbb{Z}^*$

$$\int_0^{2\pi}\cos(nt)=\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{2\pi}=0\quad \int_0^{2\pi}\sin(nt)=\left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{2\pi}=0.$$

Si p=q

$$\int_0^{2\pi}\cos(pt)^2dt=\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos(2pt)}{2}dt=\pi$$

Si p≠q

$$\int_0^{2\pi}\cos(pt)\cos(qt)dt=\int_0^{2\pi}\frac{\cos(pt-qt)+\cos(pt+qt)}{2}dt=0$$

Si p=q

$$\int_0^{2\pi}\sin(pt)^2dt=\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos(2pt)}{2}dt=\pi$$

Si p≠q

$$\int_0^{2\pi}\sin(pt)\sin(qt)dt=\int_0^{2\pi}\frac{\cos(pt-qt)-\cos(pt+qt)}{2}dt=0$$

Exercice 225 (③) Par Alexandre Camelin

Pour $n \in \mathbb{N}$, f_n désigne la fonction de $]0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall t \in]0, \pi], \quad f_n(t) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer, en utilisant le fait que $\frac{\sin(u)}{u}$ tend vers 1 lorsque u tend vers 0, que la fonction f_n admet une limite que l'on précisera en 0. Ceci permet de prolonger f_n en une fonction continue sur $[0, \pi]$, encore notée f_n et de poser

$$\int_0^{\pi} f_n(t)dt.$$

2. Si $n \in \mathbb{N}$, calculer $I_{n+1} - I_n$, puis I_n.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme

$$\begin{cases} t/2 \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \\ \left(n+\dfrac{1}{2}\right)t \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \end{cases}$$

on a

$$\frac{\sin(t/2)}{t/2} \xrightarrow[t\to 0]{} 1 \quad \text{et} \quad \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\left(n+\frac{1}{2}\right)t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1 \quad \text{(par composition des limites)}$$

d'où

$$\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)t/2}{\sin(t/2)\left(n+\frac{1}{2}\right)t} = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin(t/2)(2n+1)} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$$

donc

$$\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin(t/2)} \xrightarrow[t\to 0]{(} 2n+1)$$

donc $f_n(t)$ tend vers $2n+1$ quand t tend vers 0.

2. On a :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(\left(n+1+\frac{1}{2}\right)t\right) - \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin(t/2)}dt.$$

On rappelle que :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{R}^2, \quad \sin(p) - \sin(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

d'où

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi} \frac{2\cos((n+1)t)\cancel{\sin(t/2)}}{\cancel{\sin(t/2)}}dt = \int_0^{\pi} 2\ \cos((n+1)t)dt = \left[\frac{\sin((n+1)t)}{n+1}\right]_0^{\pi} = 0.$$

On en déduit, par une récurrence ilmmédiate, que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = I_0 = \int_0^{\pi} dt = \pi.$$

Exercice 226 (③) par Matilde Cruz [*]

Pour $x \in [0, 1[$, calculer :

$$F(x) = \int_0^x \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) \mathrm{d}t.$$

Quelle est la limite de la fonction F lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures ?

Trouvons d'abord une primitive de

$$f \ : t \in]-1,1[\longmapsto \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) = \ln(1+t) - \ln(1-t).$$

Comme ln admet pour primitive

$$t \in \mathbb{R}^{+*} \longmapsto t\ln(t) - t,$$

f admet pour primitive

$$F \ : t \in]-1,1[\longmapsto (1+t)\ln(1+t) + (1-t)\ln(1-t)$$

On en déduit que, pour $x \in [0,1[$ (et même $]-1,1[$) :

$$F(x) = (1+x)\ln(1+x) + (1-x)\ln(1-x)$$

La limite de $F(x)$ en 1^- est donc $\ln(2)$.

EXERCICE 227 (①) par Alexandre Camelin[*]

Soient a et b deux réels tels que $a < b$, f une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. La valeur moyenne d'une fonction est le réel

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

a) Quelle est la valeur moyenne d'une fonction constante sur $[a,b]$? Montrer que, si f est une fonction affine, sa valeur moyenne sur $[a,b]$ est $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.
b) Montrer que la valeur moyenne de f sur $[a,b]$ appartient à l'intervalle $[m;M]$ où m (resp. M) est le minimum (resp. maximum) de f sur $[a,b]$.

a) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que f est constante égale à $C \in \mathbb{R}$ sur $[a,b]$. Alors la valeur moyenne de f sur $[a,b]$ est :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{b-1}\int_a^b C\mathrm{d}t = \frac{1}{b-a} \times (b-a) \times C = C$$

b) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction affine. On dispose de $(c,d) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall t \in [a,b], \qquad f(t) = ct + d.$$

Alors la valeur moyenne de f sur $[a,b]$ vaut

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t &= \frac{1}{b-a}\int_a^b (ct+d)\mathrm{d}t = \frac{1}{b-a}\left(\left[\frac{ct^2}{2} + dt\right]_a^b\right) \\ &= \frac{1}{b-a}\left(\frac{cb^2}{2} + db - \frac{ca^2}{2} - da\right),\end{aligned}$$

soit encore

$$c\left(\frac{a+b}{2}\right) + d = f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Remarque : ce résultat est évident géométriquement.

c) Supposons que
$$\forall t \in [a,b], \quad m \leq f(t) \leq M.$$
En intégrant cette inégalité entre a et b on obtient :
$$m(b-a) = \int_a^b m\mathrm{d}t \leq \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leq \int_a^b M\mathrm{d}t = M(b-a)$$
d'où
$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leq M.$$

8.2 Intégration des inégalités

Exercice 228 (②) par Mathieu Chebib [*]

Soit f une fonction continue de $[1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que
$$\forall t \in [1,+\infty[, \qquad f(t) \geq \frac{1}{t}.$$
Montrer que
$$\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

Sur l'intervalle $[1,+\infty[$,
$$f(t) \geq \frac{1}{t}.$$
Pour $x \geq 1$, on intégre l'inégalité
$$\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t \geq \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln(x).$$
Étant donné que $\ln(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, on trouve finalement par comparaison que
$$\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

Exercice 229 (④) par Octave Koenig [*]

Soient f et g deux fonctions continues et croissantes de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

a) Pour $(x,y) \in [0,1]^2$, quel est le signe de $(f(y)-f(x))(g(y)-g(x))$?

b) En déduire que
$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \times \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

c) Donner une version discrète (i.e. portant sur des sommes) de cette inégalité.

a) On procède par disjonction de cas
Si $y < x$, alors $(f(y)-f(x)) \leq 0$ et $(g(y)-g(x)) \leq$ car f et g deux fonctions croissantes sur $[0,1[$. Donc $(f(y)-f(x))(g(y)-g(x)) \geq 0$.
Par raisonnement analogue, si $y \geqslant x$, alors $(f(y)-f(x))(g(y)-g(x)) \geqslant 0$. Ainsi
$$\forall (x,y) \in [0,1[^2, \quad (f(y)-f(x))(g(y)-g(x)) \geqslant 0.$$

b) On remarque que, si on intègre selon x (resp. y), les fonctions de y (resp. x) sont constantes, et intégrer une constante de 0 à 1 revient à la multiplier par 1. Or, si $(x,y) \in [0,1]^2$,
$$(f(y)-f(x))(g(y)-g(x)) \geqslant 0 \quad \text{donc} \quad f(y)\,g(y) - f(y)\,g(x) - f(x)\,f(y) + f(x)\,g(x) \geqslant 0$$

et

$$f(y)\,g(y)+f(x)\,g(x)\geqslant f(y)\,g(x)+f(x)\,f(y).$$

En intégrant par rapport à x, on obtient que, pour $y\in[0,1]$,

$$\int_0^1 f(x)g(x)\ \mathrm{d}x+f(y)g(y)\geqslant g(y)\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x+f(y)\int_0^1 g(x)\ \mathrm{d}x.$$

En intégrant maintenant par rapport à y,

$$\int_0^1 f(x)g(x)\ \mathrm{d}x+\int_0^1 f(y)g(y)\ \mathrm{d}y\geqslant 2\left(\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x\int_0^1 g(y)\ \mathrm{d}y\right)$$

et

$$\int_0^1 f(t)g(t)\ \mathrm{d}t\geqslant\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\times\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque : plus généralement, par le même argument, si a et b sont deux nombres réels tels que $a<b$ et f et g deux fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$,

$$(b-a)\ \int_a^b f(t)g(t)dt\geqslant\int_a^b f(t)dt\ \int_a^b g(t)dt.$$

c) Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ deux suites réelles croissantes. On a

$$\forall(i,j)\in(\mathbb{N}^*)2,\quad (u_i-u_j)(v_i-v_j)\geqslant 0,\qquad u_iv_i+u_jv_j\geqslant u_iv_j+u_jv_i.$$

En sommant successivement sur i, puis sur j,

$$\sum_{i=1}^n u_iv_i+nu_jv_j\geqslant v_j\sum_{i=1}^n u_i+u_j\sum_{i=1}^n v_i\quad\text{donc}\quad n\sum_{i=1}^n u_iv_i\geqslant\sum_{i=1}^n u_i\times\sum_{i=1}^n v_i.$$

EXERCICE 230 (④) par Octave Koenig [*]

Soient a et b deux réels tels que $a<b$, f et g deux fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On se propose d'établir l'inégalité :

$$\left|\int_a^b f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t\right|\leq\sqrt{\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t}\,.$$

Pour x réel on pose :

$$S(x)=\int_a^b (f(t)+xg(t))^2\,\mathrm{d}t\,.$$

Vérifier que la fonction S est polynomiale de degré ≤ 2 et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Conclure en considérant le discriminant de ce trinôme.

Pour tout réel x, on a

$$\begin{aligned}S(x)&=\int_a^b (f(t)+xg(t))^2\,\mathrm{d}t=\int_a^b\left(f(t)^2+2f(t)\,g(t)x+g(t)^2x^2\right)\ \mathrm{d}t\\&=x^2\int_a^b g(t)^2\,\mathrm{d}t\ +2x\int_a^b f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t\ +\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Le discriminant de S vaut

$$\Delta=4\left(\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right)^2-4\int_a^b g(t)^2\,\mathrm{d}t\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t\,.$$

Or $\Delta\leq 0$, car S est positive et ne possède donc qu'une seule racine au maximum, alors

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right)^2\leq\int_a^b g(t)^2\,\mathrm{d}t\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t$$

et enfin
$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t}\,.$$

Exercice 231 (⑤) par Octave Koenig [*]

Les notations p, q sont celles de l'exercice 209 de **7.1** (inégalité de Young), dont on utilise également le résultat. Soient a et b deux réels tels que $a < b$, f et g deux fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On se propose de démontrer l'inégalité de Hölder :
$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{1/p}\left(\int_a^b |g(t)|^q\,\mathrm{d}t\right)^{1/q}.$$

On remarquera que, pour $p = 2$, on obtient l'inégalité de Cauchy-Schwarz (exercice précédent).

a) En utilisant l'inégalité de Young, montrer que, pour λ dans $\mathbb{R}^{+*}$:
$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{\lambda^p}{p}\int_a^b |f(t)|^p\,\mathrm{d}t + \frac{1}{q\lambda^q}\int_a^b |g(t)|^q\,\mathrm{d}t\,.$$

b) Déterminer le minimum de la fonction :
$$\psi : \lambda \in \mathbb{R}^{+*} \longmapsto \frac{\lambda^p}{p}\int_a^b |f(t)|^p\,\mathrm{d}t + \frac{1}{q\lambda^q}\int_a^b |g(t)|^q\,\mathrm{d}t\,.$$

Conclure.

a) On obtient l'inégalité voulue en posant $x = \lambda|f(t)|$ et $y = \dfrac{|g(t)|}{\lambda}$, puis en intégrant les deux membres de a à b.

b) Commençons par établir une égalité qui sera utile pour la suite :
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \;\Rightarrow\; 1 + \frac{p}{q} = p \;\Rightarrow\; p + q = pq\,. \tag{1}$$

La fonction ψ est dérivable et de dérivée continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ en tant que somme de fonctions dérivables et de dérivées continues sur cet intervalle.
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^{+*} \qquad \psi'(\lambda) = \lambda^{p-1}\int_a^b |f(t)|^p\,\mathrm{d}t - \frac{1}{\lambda^{q+1}}\int_a^b |g(t)|^q\,\mathrm{d}t\,.$$

On remarque que
$$\psi'(\lambda) \underset{\lambda\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty \qquad \text{et} \qquad \psi'(\lambda) \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty\,.$$

Par continuité de ψ' sur $\mathbb{R}^{+*}$, on déduit, grâce au théorème des valeurs intermédiaires, que ψ' s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}^{+*}$. Soit $\lambda_0 \in \mathbb{R}^{+*}$. On a
$$\begin{aligned}
\psi'(\lambda_0) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad {\lambda_0}^{p-1}\int_a^b |f(t)|^p\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda_0^{q+1}}\int_a^b |g(t)|^q\,\mathrm{d}t \\
&\Leftrightarrow \quad {\lambda_0}^{p+q} = \frac{\int_a^b |g(t)|^q\,\mathrm{d}t}{\int_a^b |f(t)|^p\,\mathrm{d}t} \\
&\Leftrightarrow \quad \lambda_0 = \left(\frac{\int_a^b |g(t)|^q\,\mathrm{d}t}{\int_a^b |f(t)|^p\,\mathrm{d}t}\right)^{\frac{1}{pq}} \qquad \text{(d'après (1)).}
\end{aligned}$$

Ainsi, ψ' ne s'annule qu'en un unique λ_0, et les limites de ψ' en 0 et $+\infty$ permettent de déduire que ψ admet un minimum global en λ_0. De plus :

$$\begin{aligned}
\psi(\lambda_0) &= \frac{1}{p}\left(\frac{\int_a^b |g(t)|^q \,\mathrm{d}t}{\int_a^b |f(t)|^p \,\mathrm{d}t}\right)^{1/q} \int_a^b |f(t)|^p \,\mathrm{d}t + \frac{1}{q}\left(\frac{\int_a^b |f(t)|^p \,\mathrm{d}t}{\int_a^b |g(t)|^q \,\mathrm{d}t}\right)^{1/p} \int_a^b |g(t)|^q \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{p}\left(\int_a^b |g(t)|^q \,\mathrm{d}t\right)^{1/q} \left(\int_a^b |f(t)|^p \,\mathrm{d}t\right)^{1/p} + \frac{1}{q}\left(\int_a^b |g(t)|^q \,\mathrm{d}t\right)^{1/q} \left(\int_a^b |f(t)|^p \,\mathrm{d}t\right)^{1/p} \\
&= \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)\left(\int_a^b |g(t)|^q \,\mathrm{d}t\right)^{1/q} \left(\int_a^b |f(t)|^p \,\mathrm{d}t\right)^{1/p} \\
&= \left(\int_a^b |g(t)|^q \,\mathrm{d}t\right)^{1/q} \left(\int_a^b |f(t)|^p \,\mathrm{d}t\right)^{1/p}
\end{aligned}$$

En utilisant le résultat de la question a), on peut conclure que

$$\forall t \in [a,b], \qquad \left|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p \,\mathrm{d}t\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(t)|^q \,\mathrm{d}t\right)^{1/q}.$$

8.3 Intégrale fonction de sa borne supérieure

EXERCICE 232 (③) Par Alexandre Paresy[*]

Soient f une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, G la fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par $G(0) = f(0)$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad G(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt.$$

1. Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, donner une expression de $G'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$.
2. Montrer que G est continue en 0. On pourra reconnaitre en $G(x)$ un taux d'accroissement

1. La fonction
$$x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \int_0^x f(t)dt$$
est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et de dérivée f d'après le théorème fondamental de l'analyse. la fonction
$$x \in \mathbb{R}^{+*} \longmapsto \frac{1}{x}$$
est usuellement dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et de dérivée la fonction
$$x \in \mathbb{R}^{+*} \longmapsto -\frac{1}{x^2}.$$
Donc leur produit, G, est bien dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. En outre, grâce à la formule donnant a dérivée d'un produit,
$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad G'(x) = \frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)dt.$$
2. En notant F la fonction
$$x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \int_0^x f(t)dt,$$
F est dérivable de dérivée f (théorème fondamental de l'analyse) et $F(0) = 0$. En outre,
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad G(x) = \frac{F(x) - F(0)}{x - 0},$$
ce qui correspond au taux d'accroissement de F entre 0 et x. Par définition du nombre dérivée,
$$G(x) \xrightarrow[x \to 0]{} F'(0) = f(0) = G(0),$$
ce qui traduit bien la continuité de G en 0.

Exercice 233 (②) par Léo Baciocchi [*]

Soient f une fonction continue de l'intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, u et v deux fonctions dérivables définies sur un intervalle J à valeurs dans l'intervalle I. Calculer la dérivée de la fonction G définie sur J par :

$$\forall x \in J, \quad G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\mathrm{d}t$$

On notera que, si F est une primitive de f, alors

$$\forall x \in J, \quad G(x) = F(v(x)) - F(u(x)).$$

On a $G'(x) = v'(x) \cdot F'(v(x)) - u'(x) \cdot F'(u(x))$. Or puisque F est une primitive de f, on a $F'(x) = f(x)$, donc finalement :

$$G'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x)).$$

Exercice 234 (③) Par Lancelot Achour [*]

Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \int_{1/x}^{x} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt = 0.$$

On pose,

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad G(x) = \int_{1/x}^{x} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad F(x) = \int_{0}^{x} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad G(x) = F(x) - F(1/x).$$

On va montrer que G est constante. Par définition, F est une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{1+x^2}$, donc F est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et de dérivée la fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{1+x^2}$. Par somme et composée, G est dérivable, et on calcule :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad G'(x) = F'(x) + \frac{1}{x^2}F'(1/x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2} + \frac{1}{x^2}\frac{\ln(1/x)}{1+1/x^2} = \frac{\ln(x)}{1+x^2} - \frac{\ln(x)}{1+x^2} = 0.$$

Donc G est constante. En particulier :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad G(x) = G(1) = \int_{1}^{1} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t = 0,$$

ce qu'il fallait montrer.

Exercice 235 (③) par Lancelot Achour[*]

Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on pose :

$$f(x) = \int_{x}^{2x} e^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \ 0 \leq f(x) \leq xe^{-x^2}.$$
En déduire la limite de f en $+\infty$.

1. On pose :
$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad g(x) = \int_0^x e^{-t^2} \mathrm{d}t,$$
de sorte que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad f(x) = g(2x) - g(x).$$
Observons que g est une primitive de la fonction $t \longmapsto e^{-t^2}$. Par conséquent, g est dérivable et a pour dérivée la fonction $t \longmapsto e^{-t^2}$. Par suite, f est dérivable, de dérivée donnée par
$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad f'(x) = 2g'(2x) - g(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2} = 2(e^{-x^2})^4 - e^{-x^2},$$
qui est un polynôme en $X := e^{-x^2}$. On étudie donc le signe de :
$$P(X) := 2X^4 - X = X(2X^3 - 1),$$
dont les racines sont 0 et $\sqrt[3]{1/2}$. On se demande alors si $\sqrt[3]{1/2}$ admet un antécédent par la fonction $x \longmapsto e^{-x^2}$. Et en effet :
$$e^{-x^2} = \sqrt[3]{1/2} \Longleftrightarrow x = \sqrt{1/3\ln(2)} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{1/3\ln(2)}.$$
Seule la première solution est positive. On déduit finalement que, sur $[0; \sqrt{1/3\ln(2)}]$ (resp. $[\sqrt{1/3\ln(2)}; +\infty[$) f' est positive (resp. négative). Il s'ensuit que f est croissante (resp. décroissante) sur $[0; \sqrt{1/3\ln(2)}]$ (resp. $[\sqrt{1/3\ln(2)}; +\infty[$).
2. Il est clair que la fonction $x \longmapsto e^{-x^2}$ est décroissante et positive sur $\mathbb{R}_+$. On fixe alors $x \in \mathbb{R}_+$ pour aboutir à l'inégalité :
$$\forall t \in [x, 2x], \qquad 0 \leq e^{-t^2} \leq e^{-x^2}.$$
Puis par croissance de l'intégrale, il vient que :
$$0 \leq \int_x^{2x} e^{-t^2} dt \leq \int_x^{2x} e^{-x^2} dt = xe^{-x^2}.$$
Observons que xe^{-x^2} tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. En vertu du théorème de convergence par encadrement, on déduit que :
$$\int_x^{2x} e^{-t^2} dt \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.$$

EXERCICE 236 (④) Par Jean Maltère[*]

Pour x $\in \mathbb{R}^*$, on pose :
$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt.$$
a) Étudier les variations de f sur chacun des deux intervalles $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$.
b) Trouver $A \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que
$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad f(x) \geq Ae^x.$$
En déduire la limite de f en $+\infty$.
c) Montrer, à l'aide d'un encadrement, que $f(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $-\infty$.
d) Trouver une constante C $>$ 0 telle que
$$\forall t \in [-1, 1], \quad |e^t - 1| \leq C|t|.$$
On pourra utiliser l'exercice 179.
e) Déduire de d) la limite de f en 0.

a) Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$ par
$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad G(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt.$$

On a

$$\forall x \in]-\infty;0[\cup]0;+\infty[, \qquad f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}dt = G(2x) - G(x).$$

Il s'ensuit que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, de dérivée donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad f'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = \frac{e^{2x}}{x} - \frac{e^x}{x} = \frac{e^{2x} - e^x}{x}.$$

On montre de même que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{-*}$, de dérivée donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}^{-*}, \qquad f'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = \frac{e^{2x}}{x} - \frac{e^x}{x} = \frac{e^{2x} - e^x}{x}.$$

Il suffit de reprendre la démonstration précédente en définissant ici G par

$$\forall x \in \mathbb{R}^{-*}, \qquad G(x) = \int_{-1}^{x} \frac{e^t}{t}dt.$$

Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f'(x)$ est du signe de $e^{2x} - e^x$. Or, comme la fonction exponentielle est strictement croissante, $e^{2x} - e^x > 0$ pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$. La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Pour $x \in \mathbb{R}^{-*}$, $e^{2x} - e^x < 0$ et $f'(x) > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}^{-*}$.

b) Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$ et $t \in [x, 2x]$, on a

$$e^x \leq e^t \leq e^{2x} \quad \text{donc} \quad \frac{e^x}{t} \leq \frac{e^t}{t} \leq \frac{e^{2x}}{t}.$$

En intégrant par rapport à t, on obtient :

$$\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}dt \geq \int_x^{2x} \frac{e^x}{t}dt.$$

Or,

$$\int_x^{2x} \frac{e^x}{t}dt = [e^x \cdot \ln(|t|)]_x^{2x} = e^x \ln(2x) - e^x \ln(x) = e^x \ln(2).$$

Donc :

$$f(x) \geq e^x \ln(2).$$

Par comparaison avec $\ln(2e^x$, on en déduit que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

c) Pour $x \in \mathbb{R}^{-*}$, $2x < x$ et $t \in [2x, x]$, on a

$$e^x \geq e^t \geq e^{2x} \quad \text{donc} \quad \frac{e^x}{t} \leq \frac{e^t}{t} \leq \frac{e^{2x}}{t}.$$

Donc :

$$\int_x^{2x} \frac{e^x}{t}dt \geq f(x) \geq \int_x^{2x} \frac{e^{2x}}{t}dt.$$

Or :

$$\int_x^{2x} \frac{e^x}{t}dt = e^x \ln(2).$$

Et :

$$\int_x^{2x} \frac{e^{2x}}{t}dt = [e^{2x} \cdot \ln(|t|)]_x^{2x} = e^{2x} \ln(2).$$

Ainsi :

$$e^x \ln(2) \geq f(x) \geq e^{2x} \ln(2).$$

On en déduit, d'après le théorème d'encadrement, que $f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} 0$.

d) La dérivée de $x \mapsto e^x - 1$ est bornée par $e - 1$. L'exercice 179 montre que $C = e - 1$ convient.

e) L'idée est que, pour x près de 0, e^t est près de 1 pour tout t de $[x, 2x]$. On doit donc pouvoir remplacer $\frac{e^t}{t}$ par $\frac{1}{t}$ dans l'intégrale sans erreur appréciable. La question précédente est là pour formaliser cette approche.

Pour $x > 0$, on a $x < 2x$ et

$$\forall t \in [x, 2x], \qquad \frac{e^t}{t} = \frac{1}{t} + \frac{e^t - 1}{t},$$

donc, si $x \leq \dfrac{1}{2}$

$$\forall t \in [x, 2x], \qquad \frac{1}{t} - C \leq \frac{e^t}{t} \leq \frac{1}{t} + C.$$

En intégrant cet encadrement entre x et $2x$, il vient

$$\ln(2) - Cx \leq f(x) \leq \ln(2) + Cx.$$

Ainsi, lorsque $x$tend vers 0^+, $f(x)$ tend vers $\ln(2)$ Une démonstration tout à fait analogue montre que $f(x)$ tend vers $\ln(2)$ lorsque x tend vers 0^-.

8.4 L'intégration par parties

EXERCICE 237 (①) par Loïse Launay [*]

Calculer, pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$\int_1^x t^2 \ln(t)\mathrm{d}t, \qquad \int_1^x (\ln(t))^2 \mathrm{d}t.$$

Calculons $\displaystyle\int_1^x t^2 \ln(t)\mathrm{d}t$. On pose ici, pour tout t dans $\mathbb{R}^{+*}$:

$$u(t) = \ln(t) \quad \text{ et } \quad v(t) = \frac{1}{3}t^3.$$

Il vient :

$$u'(t) = \frac{1}{t}, \qquad v'(t) = t^2.$$

Les conditions de dérivabilité et de continuité des fonctions sont vérifiées sur l'intervalle d'étude. L'intégration par parties donne :

$$\int_1^x t^2 \ln(t)\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{3}\ln(t)t^3\right]_1^x - \int_1^x \frac{1}{3}t^2 dt.$$

On a

$$\left[\frac{1}{3}\ln(t)t^3\right]_1^x = \frac{1}{3}\ln(x)x^3, \quad \int_1^x \frac{1}{3}t^2\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{9}t^3\right]_1^x = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{9}.$$

Soit

$$\int_1^x t^2 \ln(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\ln(x)x^3 - \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{9}.$$

Calculons $\displaystyle\int_1^x (\ln(t))^2\mathrm{d}t$. On pose ici, pour tout t dans $\mathbb{R}^{+*}$:

$$u(t) = (\ln(t))^2 \quad \text{ et } \quad v(t) = t.$$

Il vient :

$$u'(t) = \frac{2}{t}\ln(t), \qquad v'(t) = 1.$$

Les conditions de dérivabilité et de continuité des fonctions sont vérifiées sur l'intervalle d'étude. L'intégration par partie donne :

$$\int_1^x (\ln(t))^2\mathrm{d}t = \left[t(\ln(t))^2\right]_1^x - \int_1^x 2\ln(t)\mathrm{d}t.$$

On a
$$\left[t(\ln(t))^2\right]_1^x = x(\ln(x))^2, \quad \int_1^x 2\ln(t)\mathrm{d}t = 2\left[t\ln(t) - t\right]_1^x = 2x\ln(x) - 2x + 2.$$
Remarque : On suppose connue l'expression d'une primitive de $ln(x)$ ou on se reportera à l'intégration par parties de l'exemple 2. Soit
$$\int_1^x (\ln(t))^2\mathrm{d}t = x(\ln(x))^2 - 2x\ln(x) + 2x - 2.$$

EXERCICE 238 (②) par Lancelot Achour [*]

Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^{+*}$,
$$\int_1^x t^n \ln(t)\mathrm{d}t.$$

La fonction $t \longmapsto t^n \ln(t)$ est continûment dérivable car produit de fonctions qui le sont. Une intégration par parties donne :
$$\begin{aligned}
\int_1^x t^n \ln(t)\mathrm{d}t &= \left[\frac{t^{n+1}\ln(t)}{n+1}\right]_1^x - \frac{1}{n+1}\int_1^x t^n\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{t^{n+1}\ln(t)}{n+1}\right]_1^x - \frac{1}{n+1}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_1^x \\
&= \frac{x^{n+1}\ln(x)}{n+1} - \frac{x^{n+1}-1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)x^{n+1}\ln(x) - x^{n+1} + 1}{(n+1)^2}.
\end{aligned}$$

EXERCICE 239 (②) Par Lancelot Achour [*]

Calculer :
$$\int_0^x t^2 \sin(t)\mathrm{d}t.$$
Plus généralement, donner une méthode permettant de calculer les primitives de fonctions de la forme $x \mapsto p(x)\sin(x)$ ou $x \mapsto p(x)\cos(x)$ où p est un polynôme.

La fonction $t \mapsto t^2\sin(t)$ est continûment dérivable car produit de fonctions qui le sont. Une intégration par parties donne que :
$$\int_0^x t^2\sin(t)\mathrm{d}t = \left[-t^2\cos(t)\right]_0^x + \int_0^x 2t\cos(t)\mathrm{d}t = -x^2\cos(x) + \int_0^x 2t\cos(t)\mathrm{d}t.$$
Il nous reste à calculer l'intégrale $\int_0^x 2t\cos(t)\mathrm{d}t$. Observons que la fonction $t \mapsto 2t\cos(t)$ est continûment dérivable car produit de fonctions qui le sont. Une intégration par parties donne :
$$\int_0^x 2t\cos(t)\mathrm{d}t = [2t\sin(t)]_0^x - 2\int_0^x \sin(t)\mathrm{d}t = 2x\sin(x) + 2\cos(x) - 2.$$
Finalement :
$$\int_0^x t^2\sin(t)\mathrm{d}t = -x^2\cos(x) + 2x\sin(x) + 2\cos(x) - 2.$$
De manière générale, pour calculer les primitives de fonctions de la forme $x \mapsto p(x)\sin(x)$ ou de la forme $x \mapsto p(x)\cos(x)$ où p est un polynôme, en supposant que p est de degré n, il faut intégrer successivement par parties n fois.

EXERCICE 240 (②) Par Lancelot Achour[*]

Calculer :
$$\int_0^x te^t dt, \quad \int_0^x t^2 e^t.$$

La fonction $t \longmapsto te^t$ est continûment dérivable en tant que produit de fonctions qui le sont. Une intégration par parties fournit alors que :

$$\int_0^x te^t dt = [te^t]_0^x - \int_0^x e^t dt = xe^x - (e^x - 1) = (x-1)e^x + 1.$$

La fonction $t \mapsto t^2e^t$ est continûment dérivable en tant que produit de fonctions qui le son. En utilisant une intégration par parties on obtient que :

$$\int_0^x t^2e^t dt = [t^2e^t]_0^x - 2\int_0^x te^t dt,$$

ce qui est, grâce à l'intégrale déjà calculée :

$$x^2e^x - 2(x-1)e^x - 2 = e^x(x^2 - 2x + 2) - 2.$$

On comprend alors que pour intégrer les fonctions de la forme $x \longmapsto p(x)e^x$, avec p un polynôme de degré n, on intègre n fois par parties en dérivant le polynôme.

Exercice 241 (②) par Loïse Launay [*]

Calculer, si a et b sont deux réels non nuls et x un réel :

$$f(x) = \int_0^x e^{at}\cos(bt)\mathrm{d}t.$$

On intégrera successivement deux fois par parties.

Dans toute la résolution de l'exercice, a et b sont deux réels non nuls. Calculons $\int_0^x e^{at}\cos(bt)\mathrm{d}t$. On pose ici, pour tout t dans $\mathbb{R}$:

$$u(t) = \cos(bt) \quad \text{et} \quad v(t) = \frac{1}{a}e^{at}.$$

Il vient :

$$u'(t) = -\sin(bt), \quad v'(t) = e^{at}.$$

Les conditions de dérivabilité et de continuité des fonctions sont vérifiées sur l'intervalle d'étude. L'intégration par parties donne :

$$\int_0^x e^{at}\cos(bt)\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{a}e^{at}\cos(bt)\right]_0^x - \int_0^x -\sin(bt)\frac{b}{a}e^{at}\mathrm{d}t.$$

Par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^x e^{at}\cos(bt)\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{a}e^{at}\cos(bt)\right]_0^x + \frac{b}{a}\int_0^x \sin(bt)e^{at}\mathrm{d}t.$$

Pour une nouvelle intégration par parties, on pose pour tout t dans $\mathbb{R}$:

$$g(t) = \sin(bt) \quad \text{et} \quad h(t) = \frac{1}{a}e^{at}.$$

Il vient :

$$g'(t) = b\cos(bt), \quad h'(t) = e^{at}.$$

Les conditions de dérivabilité et de continuité des fonctions sont vérifiées sur l'intervalle d'étude. La seconde intégration par parties donne :

$$\int_0^x \sin(bt)e^{at}\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{a}\sin(bt)e^{at}\right]_0^x - \int_0^x \frac{b}{a}\cos(bt)e^{at}\mathrm{d}t.$$

Ainsi, on en déduit pour le calcul de $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{a}e^{ax}\cos(bx) - \frac{1}{a} + \frac{b}{a^2}\sin(bx)e^{ax} - \frac{b^2}{a^2}f(x).$$

D'où :

$$\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)f(x)=\frac{e^{ax}\cos(bx)-1}{a}+\frac{b}{a^2}\sin(bx)e^{ax}.$$

Après simplification du membre de droite :

$$\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)f(x)=\frac{ae^{ax}\cos(bx)-a+be^{ax}\sin(bx)}{a^2}.$$

Ainsi :

$$f(x)=\frac{e^{ax}(a\cos(bx)+b\sin(bx))-a}{a^2+b^2}.$$

EXERCICE 242 (③) par Lancelot Achour [*]

Pour p et q dans $\mathbb{N}^*$, on pose

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x.$$

a) On suppose que $q\geq p\geq 1$. Exprimer $B(p,q)$ en fonction de $B(p-1,q+1)$, p et q.

b) Exprimer $B(p,q)$, en fonction de p et q, d'abord si $q\geq p$, puis si $q\leq p$.

a) La fonction $x\longmapsto x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ est continûment dérivable, car produit de fonctions qui le sont. Une intégration par partie donne alors que :

$$\begin{aligned}B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x&=\left[-x^{p-1}\frac{(1-x)^q}{q}\right]_0^1+\frac{p-1}{q}\int_0^1 x^{p-2}(1-x)^q\mathrm{d}x\\&=\frac{p-1}{q}B(p-1,q+1).\end{aligned}$$

b) On répétant des intégrations par parties (dont tous les crochets sont nuls, les fonctions considérées s'annulant en 0 et 1), on obtient que :

$$B(p,q)=\frac{(p-1)!(q-1)!}{(q+p-2)!}B(1,p+q-1).$$

Il reste à calculer :

$$B(1,p+q-1)=\int_0^1(1-x)^{p+q-2}\mathrm{d}x=\left[-\frac{(1-x)^{p+q-1}}{p+q-1}\right]_0^1\frac{1}{p+q-1},$$

soit finalement que :

$$B(p,q)=\frac{(p-1)!\,(q-1)!}{(p+q-1)!}.$$

Remarquons que le rôle joué par chacune des variables est identique. Par conséquent aucune des conditions $p\geq q\geq 1$ ou $q\geq p\geq 1$ n'a d'influence sur le résultat.

Remarque : L'intégrale étudiée ici peut se définir comme une fonction. Cette dernière est dénommée fonction bêta d'Euler. Remarquons que pour p et q dans $\mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{B(p,q)}=\frac{(p+q-1)!}{(p-1)!(q-1)!}=\binom{p+q-1}{p-1}=\binom{p+q-1}{q-1},$$

ce qui permet une généralisation des coefficients binomiaux lorsque p et q cessent des entiers. Le lecteur curieux pourra se renseigner sur la fonction Gamma d'Euler qui produit une généralisation similaire pour la factorielle.

Exercice 243 (④) par Léo Baciocchi [*]

Soient a et b deux réels tels que $a < b$, f une application définie sur $[a, b]$, à valeurs réelles, dérivable et à dérivée continue. Pour λ dans $\mathbb{R}^{+*}$, démontrer :

$$\left|\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{\lambda}\left(|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t\right).$$

En déduire que

$$\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En intégrant par parties et en utilisant l'inégalité triangulaire, on a :

$$\left|\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\left[-\frac{\cos(\lambda t)\cdot f(t)}{\lambda}\right]_a^b + \frac{1}{\lambda}\cdot\left(\int_a^b f'(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right)\right|$$

$$\left|\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\left[-\frac{\cos(\lambda t)\cdot f(t)}{\lambda}\right]_a^b\right| + \left|\frac{1}{\lambda}\cdot\left(\int_a^b f'(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right)\right|$$

$$\left|\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{\lambda}\cdot\left(|f(b)\cos(\lambda b) - f(a)\cos(\lambda a)| + \left|\int_a^b f'(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right|\right)$$

$$\left|\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{\lambda}\cdot\left(|f(a)\cos(\lambda a)| + |f(b)\cos(\lambda b)| + \int_a^b |f'(t)\cos(\lambda t)|\,\mathrm{d}t\right)$$

$$\left|\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{\lambda}\left(|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t\right) \quad \text{car } |\cos(t)| \leqslant 1$$

De plus, une valeur absolue étant toujours positive, on a l'encadrement :

$$0 \leqslant \left|\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{\lambda}\left(|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t\right).$$

Enfin, puisque $\frac{1}{\lambda}\left(|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t\right) \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, d'après le théorème des gendarmes :

$$\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

8.5 Suites d'intégrales

Exercice 244 (②) par Wéline Pujol [*]

Soit f une fonction continue dans $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}^+$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^1 f(t) \times t^n \mathrm{d}t$$

Déterminer le signe de I_n, puis le sens de variation de la suite $(I_n)_{n\geq 0}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $t \in [0, 1]$, $f(t)$ et t^n sont dans $\mathbb{R}^+$, donc leur produit $t^n f(t)$ aussi. Or, l'intégrale d'une fonction positive est positive, donc $I_n \geq 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $t \in [0, 1]$,

$$t^n f(t) - t^{n+1} f(t) = (1 - t)t^n f(t) \geq 0,$$

car les trois facteurs $(1-t)$, t^n, $f(t)$ sont positifs. Ainsi

$$\forall t \in [0,1], \qquad t^n f(t) \geq t^{n+1} f(t).$$

En intégrant cette inégalité sur $[0,1]$, on obtient $I_n \geq I_{n+1}$.

La suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est donc décroissante.

Exercice 245 (③) par Wéline Pujol [*]

Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^1 f(t) t^n \mathrm{d}t.$$

On admet qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall t \in [0,1], \quad |f(t)| \leq M$$

Majorer $|I_n|$ et montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

Pour $t \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $t^n \geq 0$, donc

$$\forall t \in [0,1] \qquad |f(t)\ t^n| = |f(t)| \times t^n \leq M \times t^n.$$

D'après les propriétés de l'intégrale :

$$\left| \int_0^1 f(t) \times t^n \mathrm{d}t \right| \leq \int_0^1 |f(t) \times t^n| \, \mathrm{d}t \leq \int_0^1 M \times t^n \mathrm{d}t$$

On peut donc déduire que :

$$|I_n| = \left| \int_0^1 f(t) \times t^n \mathrm{d}t \right| \leq \int_0^1 M \times t^n \mathrm{d}t.$$

D'autre part,

$$\int_0^1 M \times t^n \mathrm{d}t = \left[\frac{M t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{M}{n+1}.$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leq |I_n| \leq \frac{M}{n+1}.$$

La suite $\left(\dfrac{M}{n+1} \right)_{n\geq 0}$ tend vers 0. Par théorème de majoration, $(I_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

Exercice 246 (③) par Lancelot Achour et Adrien Rezzouk [*]

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{e^{nt}}{1+e^t} \mathrm{d}t.$$

a) Calculer I_1.

b) Déterminer le minimum de $\dfrac{1}{1+e^t}$ pour $t \in [0,1]$. En déduire une minoration de I_n et la limite de $(I_n)_{n\geq 0}$.

c) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $I_n + I_{n+1}$.

d) Calculer I_0 et I_2.

e) Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est croissante.

f) Déduire des questions c) et e) la limite de la suite $(n e^{-n} I_n)_{n\geq 0}$

a) On calcule :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t}\mathrm{d}t = \left[\ln(e^t+1)\right]_0^1 = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right).$$

b) Remarquons que la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1+e^t}$ est strictement décroissante sur $[0,1]$ car composée d'une fonction strictement croissante et strictement positive sur $[0,1]$ (fonction $t \mapsto e^t+1$) par la fonction inverse. Par conséquent :

$$\forall t \in [0,1], \qquad \frac{1}{1+e^t} \geq \frac{1}{1+e}.$$

Il s'ensuit alors que, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 \frac{e^{nt}}{1+e^t}\mathrm{d}t \geq \frac{1}{1+e}\int_0^1 e^{nt}\mathrm{d}t = \frac{1}{1+e}\left[\frac{e^{nt}}{n}\right]_0^1 = \frac{e^n-1}{n(1+e)},$$

c'est-à-dire :

$$I_n \geq \frac{e^n-1}{n(1+e)}.$$

Remarquons que par croissance comparée,

$$\frac{e^n-1}{n(1+e)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Par le théorème de comparaison, on déduit alors que :

$$I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On calcule :

$$I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{nt}}{1+e^t}\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{e^{(n+1)t}}{1+e^t}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{e^{nt}+e^{(n+1)t}}{1+e^t}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{e^{nt}(1+e^t)}{1+e^t}\mathrm{d}t,$$

ce qui est :

$$\int_0^1 e^{nt}\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{nt}}{n}\right]_0^1 = \frac{e^n-1}{n}.$$

Soit finalement que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n + I_{n+1} = \frac{e^n-1}{n}.$$

(Le cas $n=0$ est particulier et traité à la question suivante)

d) On calcule :

$$I_0 + I_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+e^t}\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1+e^t}{1+e^t}\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{d}t = 1,$$

donc :

$$I_0 = 1 - I_1 = 1 - \ln\left(\frac{e+1}{2}\right) = \ln(e) + \ln\left(\frac{2}{e+1}\right) = \ln\left(\frac{2e}{e+1}\right).$$

En utilisant la formule obtenue à la question précédente, on a que :

$$I_1 + I_2 = e - 1$$

donc :

$$I_2 = e - 1 - I_1 = e - 1 - \ln\left(\frac{e+1}{2}\right) = e - \ln(e) - \ln\left(\frac{e+1}{2}\right) = e + \ln\left(\frac{2}{e(e+1)}\right).$$

e) Remarquons que :

$$\forall t \in [0,1], \quad 1 \leq e^t,$$

d'où il suit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall t \in [0,1], \quad e^{nt} \leq e^{(n+1)t},$$

c'est-à-dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall t \in [0,1], \quad \frac{e^{nt}}{1+e^t} \leq \frac{e^{(n+1)t}}{1+e^t},$$

et en utilisant la monotonie de l'intégrale, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 \frac{e^{nt}}{1+e^t} \mathrm{d}t \leq \int_0^1 \frac{e^{(n+1)t}}{1+e^t} \mathrm{d}t$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a que $I_n \leq I_{n+1}$, donc la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est croissante.

f) On pose (u_n) la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = ne^{-n} I_n$$

On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n + I_{n+1} = \dfrac{e^n - 1}{n}$ donc $ne^{-n} I_n + ne^{-n} I_{n+1} = 1 - e^{-n}$. Ainsi, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 1 - e^{-n} - ne^{-n} I_{n+1} = 1 - e^{-n} - \frac{en}{n+1}(n+1)e^{-(n+1)} I_{n+1} = 1 - e^{-n} - \frac{en}{n+1} u_{n+1}$$

.

Par ailleurs, on a établi dans la question b. que pour tout entier naturel n,

$$I_n \geq \frac{e^n - 1}{n(1+e)}$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq \frac{1 - e^{-n}}{1+e}.$$

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1 - e^{-n}}{1+e} + \frac{en}{n+1} u_{n+1} \leq u_n + \frac{en}{n+1} u_{n+1} = 1 - e^{-n}$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} \leq (1 - e^{-n}) \left(1 - \frac{1}{1+e}\right) \frac{n+1}{en}$$

On a enfin pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1 - e^{-(n+1)}}{1+e} \leq u_{n+1} \leq \frac{(1 - e^{-n})(n+1)}{(1+e)n}$$

(u_{n+1}) est encadré par deux suites qui convergent vers $\dfrac{1}{1+e}$ donc d'après le théorème d'encadrement (u_{n+1}) converge vers $\dfrac{1}{1+e}$. La limite de $(ne^{-n} I_n)$ est donc $\dfrac{1}{1+e}$

Exercice 247 (③) par Lancelot Achour [*]

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n = \int_1^e (\ln(t))^n \mathrm{d}t.$$

a) Calculer I_1.

b) Si $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer le signe de I_n.

c) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_{n+1} = e - (n+1) I_n.$$

d) Déduire des questions b) et c) la limite de la suite $(I_n)_{n \geq 1}$.

e) Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 1}$ est décroissante

f) Déterminer la limite de la suite $(nI_n)_{n \geq 1}$. On pourra déduire des questions précédentes un encadrement judicieux de I_n.

a) On calcule :
$$I_1 = \int_1^e \ln(t)\mathrm{d}t = [t\ln(t) - t]_1^e = 1$$

b) Remarquons que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [1,e], \qquad \ln(t)^n \geq 0,$$
par positivité de l'intégrale, on déduit que la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ est positive.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Observons que :
$$I_n = \int_1^e 1 \times (\ln(t))^n \mathrm{d}t,$$
dont il est clair que les facteurs que forment l'intégrande sont continÜment dérivable. Une intégration par partie donne que :
$$I_{n+1} = [t\ln(t)^{n+1}]_1^e - (n+1)I_n = e - I_n,$$
ce qu'il fallait obtenir.

d) On a par positivité que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad I_{n+1} \geq 0,$$
soit que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad e - (n+1)I_n \geq 0,$$
c'est-à-dire :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{e}{n+1} \geq I_n \geq 0.$$
Remarquons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e}{n+1} = 0$. Le théorème de convergence par encadrement permet de conclure que :
$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.$$

e) Observons que :
$$\forall t \in [1,e], \quad 0 \leq \ln(t) \leq 1,$$
d'où il suit que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\forall t \in [1,e], \quad (\ln(t))^{n+1} \leq (\ln(t))^n,$$
et par monotonie de l'intégrale (comme l'exercice précédent), on déduit que la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

f) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a, en utilisant la relation de la question c) et la croissance de $(I_n)_{n\geq 1}$,
$$e = (n+1)I_n + I_{n+1} \leq (n+2)I_n \quad \text{et} \quad e = (n+1)I_n + I_{n+1} \geq (n+2)I_{n+1}.$$
Ainsi, pour tout $n \geq 3$,
$$\frac{e}{n-2} \leq I_n \leq \frac{e}{n-1} \quad \text{et} \quad \frac{n\,e}{n-2} \leq n\,I_n \leq \frac{n\,e}{n-1}.$$
Chacune des deux suites $\left(\dfrac{ne}{n-2}\right)_{n\geq 3}$ et $\left(\dfrac{ne}{n-1}\right)_{n\geq 3}$ converge vers e. Grâce au théorème d'encadrement,
$$nI_n \longrightarrow e.$$

8.6 Complément : intégrales de Wallis

EXERCICE 248 (④) par Mathieu Chebib [∗]

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$,
$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t\mathrm{d}t.$$

a) Montrer, pour n dans $\mathbb{N}$:
$$W_{n+1} \leq W_n.$$

b) En utilisant la relation de récurrence obtenue dans l'exemple 3 ci-dessus, déduire de a) :

$$\frac{n+1}{n+2}W_n \leq W_{n+1}.$$

c) Déterminer la limite de $\left(\dfrac{W_{n+1}}{W_n}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

d) Conclure que :

$$\left(\frac{2.4.6.....(2k)}{3.5.7.....(2k-1)}\right)^2 \times \frac{1}{2k+1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}.$$

puis que :

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{4k^2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{\pi} \quad \text{et que} \quad \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{(2k+1)^2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{4}$$

a) Pour n dans $\mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} W_{n+1} - W_n &= \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1}(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)(\cos(t)-1)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\cos(t) \geq 0$ donc $\cos^n(t) \geq 0$. De plus, pour tout réel t, $\cos(t) \leq 1$, soit $\cos(t)-1 \leq 0$. On en déduit que sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\cos^n(t)(\cos(t)-1) \leq 0$. On trouve ainsi, en intégrant l'inégalité, $W_{n+1} - W_n \leq 0$.

b) D'après le résultat de la question a), pour tout entier naturel n, $W_{n+2} \leq W_{n+1}$. Or, $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}W_n$. Donc

$$\frac{n+1}{n+2}W_n \leq W_{n+1}.$$

c) On déduit l'encadrement suivant des résultats précédents :

$$\frac{n+1}{n+2}W_n \leq W_{n+1} \leq W_n.$$

Ayant, pour tout entier naturel n, $W_n > 0$, on peut donc diviser les membres de l'inégalité par W_n. On a alors :

$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1.$$

Puisque $\dfrac{n+1}{n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, on peut conclure par le théorème des gendarmes que

$$\frac{W_{n+1}}{W_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

d) i) On a :

$$\frac{W_{2k+1}}{W_{2k}} = \frac{2.4.6.....(2k)}{3.5.7.....(2k-1)(2k+1)} \times \frac{2.4.6.....(2k)}{3.5.7.....(2k-1)} \times \frac{2}{\pi}$$

Soit :

$$\frac{\pi}{2} \times \frac{W_{2k+1}}{W_{2k}} = \left(\frac{2.4.6.....(2k)}{3.5.7.....(2k-1)}\right)^2 \times \frac{1}{2k+1}$$

Or $\dfrac{W_{2k+1}}{W_{2k}} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 1$, donc :

$$\left(\frac{2.4.6.....(2k)}{3.5.7.....(2k-1)}\right)^2 \times \frac{1}{2k+1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}.$$

ii) Puisque $W_{2n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \times \frac{\pi}{2}$ et $W_{2n+1} = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}$, on a alors :

$$\begin{aligned}
\frac{W_{2n+1}}{W_{2n}} = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k \times 2k}{(2k+1)(2k-1)} \times \frac{2}{\pi} \quad &\iff \quad \frac{\pi}{2} \times \frac{W_{2n+1}}{W_{2n}} = \prod_{k=1}^{n} \frac{4k^2}{4k^2-1} \\
&\iff \quad \frac{2}{\pi} \times \frac{W_{2n}}{W_{2n+1}} = \prod_{k=1}^{n} \frac{4k^2-1}{4k^2} \\
&\iff \quad \frac{2}{\pi} \times \frac{W_{2n}}{W_{2n+1}} = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right)
\end{aligned}$$

Ayant $\frac{W_{2n}}{W_{2n+1}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$, on peut conclure que :

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{2}{\pi}.$$

iii) D'une part $W_{2n+1} = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}$, et d'autre part :

$$\begin{aligned}
W_{2n} &= \frac{(2n-1)(2n-3) \times ... \times 3 \times 1}{(2n)(2n-2) \times ... \times 4 \times 2} \times \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2n+1)(2n-1)(2n-3) \times ... \times 3}{(2n+2)(2n)(2n-2) \times ... \times 4} \times \frac{\pi}{4} \times \frac{2n+2}{2n+1} \\
&= \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{2k+1}{2k+2}\right) \times \frac{\pi}{4} \times \frac{2n+2}{2n+1}.
\end{aligned}$$

D'où :

$$\frac{W_{2n+1}}{W_{2n}} = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{2k \times (2k+2)}{(2k+1)^2}\right) \times \frac{4}{\pi} \times \frac{2n+1}{2n+2},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\pi}{4} \times \frac{2n+2}{2n+1} \times \frac{W_{2n+1}}{W_{2n}} = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{2k \times (2k+2)}{(2k+1)^2}\right).$$

On remarque que

$$\frac{2k \times (2k+2)}{(2k+1)^2} = \frac{(2k+1)^2 - 1}{(2k+1)^2} = 1 - \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

De plus

$$\frac{W_{2n+1}}{W_{2n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad \frac{2n+2}{2n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1.$$

On peut donc finalement conclure que

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{(2k+1)^2}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\pi}{4}.$$

EXERCICE 249 (③) par Mathieu Chebib [∗]

Déduire de l'exercice précédent la relation

$$\sqrt{n}\,\frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Commençons par noter que $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ et que

$$\begin{aligned}W_{2n} &= \frac{(2n-1)(2n-3)\times ... \times 3\times 1}{(2n)(2n-2)\times ... \times 4\times 2}\times \frac{\pi}{2}\\ &= \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)\times ... \times 3\times 2\times 1}{(2n)^2(2n-2)^2\times ... \times 4^2\times 2^2}\times \frac{\pi}{2}\\ &= \frac{(2n)!}{4^n\times (n!)^2}\times \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Et de manière analogue, $W_{2n+1} = \dfrac{4^n\times (n!)^2}{(2n+1)!}$. De là, il vient que

$$\frac{W_{2n+1}}{W_{2n}} = \frac{4^n\times (n!)^2}{(2n+1)!}\times \frac{4^n\times (n!)^2}{(2n)!}\times \frac{2}{\pi},$$

que l'on peut écrire

$$\pi\frac{W_{2n+1}}{W_{2n}} = \left(\frac{4^n\times (n!)^2}{(2n)!}\right)^2\times \frac{2}{2n+1}.$$

En passant à l'inverse et à la racine (les deux membres de l'égalité étant strictement positifs), on obtient

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{W_{2n}}{W_{2n+1}}} = \frac{(2n)!}{4^n\times (n!)^2}\times \sqrt{n+\frac{1}{2}},$$

soit

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{W_{2n}}{W_{2n+1}}} = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}\times \sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{2n}}.$$

On sait que $\sqrt{\dfrac{W_{2n}}{W_{2n+1}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. De plus, $\sqrt{1+\dfrac{1}{2n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

On peut ainsi conclure que

$$\sqrt{n}\,\frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

8.7 Complément : développement en série de l'exponentielle

Exercice 250 (②) par Samy Clementz [*]

Compléter les détails de la preuve du cas $x \leq 0$.

Soit $x \leq 0$. On a

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}e^t\mathrm{d}t = -\int_x^0 \frac{(x-t)^n}{n!}e^t\mathrm{d}t.$$

Donc

$$|R_n(x)| = \left|\int_x^0 \frac{(x-t)^n}{n!}e^t\mathrm{d}t\right| \leq \int_x^0 \frac{|x-t|^n}{n!}e^t\mathrm{d}t = \int_x^0 \frac{(t-x)^n}{n!}e^t\mathrm{d}t.$$

Tous les facteurs constituant l'intégrande sont positifs ou nuls. De plus, $e^t \leq 1$ pour $t \in [x,0]$. Par conséquent,

$$|R_n(x)| \leq \int_x^0 \frac{(t-x)^n}{n!}\mathrm{d}t = \frac{1}{n!}\left[\frac{(t-x)^{n+1}}{n+1}\right]_x^0 = \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!},$$

tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Exercice 251 (③) par Daniel Caby [*]

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

a) Pour $n \in \mathbb{N}$, justifier l'encadrement :

$$0 < e - u_n < \frac{e}{(n+1)!}$$

b) On raisonne par l'absurde et on suppose e rationnel. On peut donc écrire :

$$e = \frac{p}{q}\,, \qquad (p, q) \in \mathbb{N}^{*2}\,.$$

Vérifier que, pour $n \geq q$, le réel

$$n!(e - u_n)$$

est un entier appartenant à $\left]0, \dfrac{e}{n+1}\right[$. Obtenir alors une contradiction.

a) On part de la propriété

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \,\mathrm{d}t\,.$$

En substituant $x = 1$, on a donc

$$e = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}}_{u_n} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t \,\mathrm{d}t\,.$$

Donc

$$e - u_n = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t \,\mathrm{d}t.$$

La fonction exponentielle est majorée par e sur $[0, 1]$ et, pour tout $t \in [0, 1]$, $0 \leq (1 - t)^n$. On a donc

$$\forall t \in [0, 1],\ 0 \leq \frac{(1-t)^n}{n!} e^t \leq \frac{(1-t)^n}{n!} e.$$

En intégrant, on obtient

$$0 \leq e - u_n \leq \frac{e}{(n+1)!}.$$

On peut même écrire $0 < e - u_n < \dfrac{e}{(n+1)!}$ car il existe des valeurs de t telles que $\dfrac{(1-t)^n}{n!} e^t$ est différent de 0 et de $\dfrac{(1-t)^n}{n!} e$.

b) L'inégalité ci-dessus est équivalente à $0 < n!(e - u_n) < \dfrac{e}{n+1}$, soit

$$0 < n!\left(\frac{p}{q} - u_n\right) < \frac{e}{n+1}$$

d'après l'hypothèse de la question.
Pour $n \geq q$, q divise $n!$ et, pour $k \in [\![0, n]\!]$, $k!$ divise $n!$ donc $n!\,u_n$ et $n!(e - u_n)$ sont des entiers.
On a donc, pour tout n supérieur à q, un entier appartenant à $\left]0, \dfrac{e}{n+1}\right[$, ce qui est impossible, car, si $n + 1 > e$, l'intervalle précédent est contenu dans $]0, 1[$ et ne contient donc pas d'entier.

Exercice 252 (④) par Daniel Caby [*]

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant des dérivées de tous ordres. Montrer que, pour n dans $\mathbb{N}$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \,\mathrm{d}t.$$

On note $\mathcal{P}_n$ la propriété

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

On raisonne par récurrence.
Pour $n = 0$, l'expression vaut $f(0) + \displaystyle\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t = f(x)$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie, c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2}$$

Fixons $x \in \mathbb{R}$. Posons, pour t dans $\mathbb{R}$,

$$u(t) = \frac{-(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}, \qquad v(t) = f^{(n+1)}(t).$$

On a alors, pour t dans $\mathbb{R}$,

$$u'(t) = \frac{(x-t)^n}{n!}, \qquad v'(t) = f^{(n+2)}(t).$$

D'après la formule de l'intégration par parties, on a donc

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{-(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_0^x + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t. \qquad (3)\end{aligned}$$

En combinant (1) et (2), on obtient bien

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

c'est-à-dire $\mathcal{P}_{n+1}$.
Remarque :
Ce résultat sera redémontré en sup.

Exercice 253 (④) par Antoine Charki [*]

a) Montrer que, pour $t \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$,

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k = \frac{1}{1+t} + \frac{(-1)^n t^{n+1}}{1+t}.$$

b) En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t.$$

c) Montrer que

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n+2}.$$

d) Conclure :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(2).$$

e) Plus généralement, montrer que, si $0 \leq x \leq 1$, alors

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(1+x).$$

Donner une estimation de la « vitesse de convergence », c'est-à dire de l'erreur :

$$\left| \ln(x+1) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} \right|.$$

f) Étendre ce résultat au cas $-1 < x \leq 0$.

a) Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k = \sum_{k=0}^{n} (-t)^k.$$

Par la formule des sommes géométriques, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} (-t)^k = \frac{1-t^{n+1}}{1+t} = \frac{1}{1+t} - \frac{(-1)^{n+1} t^{n+1}}{1+t} = \frac{1}{1+t} + \frac{(-1)^n t^{n+1}}{1+t}.$$

b) On intègre entre 0 et 1 l'égalité précédente :

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-t)^k \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-t)^k \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

et

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t} \mathrm{d}t = \ln(1+1) - \ln(1+0) = \ln(2).$$

De plus,

$$\int_0^1 \frac{(-1)^n t^{n+1}}{1+t} \mathrm{d}t = (-1)^n \times \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} \mathrm{d}t.$$

D'où

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-t)^k \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{1+t} + \int_0^1 \frac{(-1)^n t^{n+1}}{1+t} = \ln(2) + (-1)^n \times \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} \mathrm{d}t.$$

c) Si $t \in [0,1]$,

$$0 \leq \frac{1}{1+t} \leq 1 \quad \text{donc} \quad 0 \leq \frac{t^{n+1}}{1+t} \leq t^{n+1}.$$

D'où, en intégrant, sachant que $\displaystyle\int_0^1 t^{n+1} = \frac{1}{n+2}$:

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} \leq \frac{1}{n+2}.$$

d) Comme $\displaystyle\frac{1}{n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors par le théorème des gendarmes,

$$(-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Sachant que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) + (-1)^n \times \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} \mathrm{d}t$, on en conclut que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(2).$$

e) On repart de la question a) et on reprend les question b) et c), mais en intégrant cette fois entre 0 et x. On obtient :

$$\forall x \in [0,1], \qquad \left|\ln(1+x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}\right| = \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} \leq \frac{x^{n+2}}{n+2}.$$

Comme $x^{n+2} \leq 1$, on a l'encadrement :

$$0 \leq \left|\ln(1+x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}\right| \leq \frac{1}{n+2}.$$

Avec les gendarmes, on conclut que la différence tend vers 0 et donc

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(1+x).$$

f) Si $-1 < x \leq 0$ on reprend le raisonnement précédent, on intègre entre 0 et x. Pour reproduire l'inégalité de la question c), on remarque que :

$$\forall t \in [x,0], \quad 0 \leq \frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{1+x}.$$

On majore donc par

$$\left|\frac{1}{1+x}\int_0^x t^{n+1}dt\right| = \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)(1+x)}$$

On obtient

$$\left|\ln(1+x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}\right| \leq \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)(1+x)}.$$

Ce qui, par le théorème des gendarmes, tend vers 0 et amène à nouveau à l'égalité voulue.

Exercice 254 (④) par Daniel Caby et Octave Koenig [*]

a) Montrer que

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \qquad \int_0^{\tan(x)} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = x.$$

En particulier :

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

b) Pour n dans $\mathbb{N}$, établir :

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

c) Conclure :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{4}.$$

a) On note :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \qquad f(x) = \int_0^{\tan(x)} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

Soit $g : x \in \mathbb{R} \longmapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}.$ Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a donc $f(x) = g(\tan(x))$.
Calculons $f'(x)$:

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \qquad f'(x) = \tan'(x)g'(\tan(x)) = (1+\tan^2(x))\frac{1}{1+\tan^2(x)} = 1.$$

Donc $f(x) = x + c$ avec $c \in \mathbb{R}$. Or $f(0) = 0$ donc $f(x) = x$. En particulier,

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int_0^{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.$$

b) On raisonne par récurrence. Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété à démontrer.
Initialisation.

$$\sum_{k=0}^{0} \frac{(-1)^k}{2k+1} - \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t = 1 - \int_0^1 1\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}.$$

Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vérifiée.
Hérédité. On fixe n dans $\mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. On a

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{2k+1} + (-1)^{n+2} \int_0^1 \frac{t^{2n+4}}{1+t^2}\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{2k+1} + (-1)^{n+2} \left[\int_0^1 \frac{t^{2n+4}+t^{2n+2}}{1+t^2} - \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\right]. \end{aligned}$$

En distribuant, on obtient

$$S_{n+1} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t}_{\frac{\pi}{4} \text{ d'après l'hypothèse de récurrence}} + \frac{(-1)^{n+1}}{2n+3} + (-1)^{n+2} \int_0^1 t^{2n+2}\mathrm{d}t.$$

On remarque que $-\int_0^1 t^{2n+2}\mathrm{d}t = -\frac{1}{2n+3}$. Donc

$$\frac{(-1)^{n+1}}{2n+3} + (-1)^{n+2} \int_0^1 t^{2n+2}\mathrm{d}t = (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+3}\right) = 0.$$

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4},$$

ce qui montre $\mathcal{P}_{n+1}$

c) On a

$$\forall t \in [0,1], \quad 0 \leq \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \leq t^{2n+2}.$$

Donc, en intégrant entre 0 et 1,

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^{2n+2}\mathrm{d}t.$$

Soit

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{2n+3}.$$

Par le théorème des gendarmes,

$$\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{4}.$$

8.8 Complément : séries

Exercice 255 (③) Par Lancelot Achour [*]

La suite de Fibonacci $(F_n)_{n\geq 0}$ est définie en **1.3**. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F_n}{2^n} = 2.$$

On reprend les notations du paragraphes **1.3**. En utilisant la forme explicite de la suite de Fibonacci, on obtient que :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{F_k}{2^k} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^k - \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\beta}{2}\right)^k \right).$$

Observons alors que $\alpha/2 < 1$ et $\beta/2 > -1$, donc les sommes ci-dessus convergent (cf Exercice 39). Il en découle que :

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\beta}{2}\right)^n \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{2}{2-\alpha} - \frac{2}{2-\beta} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{2(\alpha-\beta)}{(2-\alpha)(2-\beta)}.$$

Un rapide calcul donne que $\alpha - \beta = \sqrt{5}$ et $(2-\alpha)(2-\beta) = 1$. D'où :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F_n}{2^n} = 2.$$

Remarque. On peut procéder autrement : plutôt que l'expression exacte de u_n, on utilise un télescopage et une majoration. Voici comment. Posons

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{F_n}{2^n}.$$

Alors, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$4u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n, \quad 4(u_{n+2} - u_{n+1}) = -2u_{n+1} + u_n = -2(u_{n+2} - u_n) - u_n.$$

C'est-à-dire

$$u_n = -2(u_{n+2} - u_n) - 4(u_{n+2} - u_{n+1}).$$

Donc, en sommant de $n = 0$ à $n = N$:

$$\sum_{k=0}^{N} u_n = -2(u_{N+2} - u_0) - 4(u_{N+2} - u_1) = 2u_0 + 4u_1 - 6u_{N+2} = 2 - 6u_{N+2}.$$

Si on sait que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0, on retrouve le résultat désiré. Or, il est facile d'établir par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leq F_n \leq \beta^n,$$

d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad O \leq u_n \leq \left(\frac{\beta}{2}\right)^n,$$

et, puisque $\frac{\beta}{2} \in]0,1[$, la limite désirée.

Exercice 256 (③) par Ylan Marx [*]

Montrer que, pour tout $x \in]-1;1[$,

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

Soit $x \in]-1,1[$. Soit $N \in \mathbb{N}$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
2\sum_{k=0}^{N} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} &= \sum_{\substack{p=0 \\ p=2k}}^{2N} \frac{x^{p+1}}{p+1}\left[(-1)^p+1\right] \\
&= \sum_{p=0}^{2N} \frac{x^{p+1}}{p+1}\left[(-1)^p+1\right] \\
&= \sum_{p=0}^{2N} \frac{(-1)^p x^{p+1}}{p+1} + \sum_{p=0}^{2N} \frac{(-1)^{p+1}(-x)^{p+1}}{p+1} \\
&= \sum_{p=0}^{2N} \frac{(-1)^p x^{p+1}}{p+1} - \sum_{p=0}^{2N} \frac{(-1)^{p}(-x)^{p+1}}{p+1}
\end{aligned}$$

Nous avons $-1 < x < 1$, donc on a également $-1 < -x < 1$, et donc d'après l'exercice 253 :

$$\sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p x^{p+1}}{p+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(1+x) \quad \text{et} \quad \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p(-x)^p+1}{p+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(1-x).$$

Nous avons donc également :

$$\sum_{p=0}^{2N} \frac{(-1)^p x^{p+1}}{p+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \ln(1+x) \quad \text{et} \quad \sum_{p=0}^{2N} \frac{(-1)^p(-x)^p+1}{p+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \ln(1-x).$$

Par sommation des limites, nous avons donc :

$$2\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(1+x) - \ln(1-x),$$

D'où

$$2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Finalement

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{k+1}.$$

Exercice 257 (③) Par Lancelot Achour [*]

Pour $x \in \mathbb{R}$, établir les formules :

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2k} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

On commence par le cosinus. Observons que cos admet des dérivées de tout ordre et que (exercice 147) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \cos^{(2k+1)}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \cos^{(2k)}(0) = (-1)^k.$$

On utilise alors la formule de Taylor avec reste intégral de l'exercice 252, en fixant $n \in \mathbb{N}^*$, pour obtenir :

$$\left|\cos(x) - \sum_{k=0}^{2n} \frac{\cos^{(k)}(0)}{k!} x^k\right| = \left|\cos(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}\right| = \left|\int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} \cos^{(2n+1)}(t)\mathrm{d}t\right|.$$

Il reste alors à montrer que l'intégrale obtenue tend vers 0. Remarquons que la dérivée $(2n+1)$-ième est un sinus au signe près qui est borné par 1. Il s'ensuit que :

$$\left|\int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} \cos^{(2n+1)}(t)dt\right| \leq \left|\int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} dt\right| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

le théorème 3 et le théorème de convergence par encadrement donnent alors que :

$$\left|\int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}\cos^{(2n+1)}(t)\mathrm{d}t\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

et donc :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \cos(x).$$

Pour le sinus, on obtient des égalités similaires pour les dérivées successives :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \sin^{(2k+1)}(0) = (-1)^k \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \sin^{(2k)}(0) = 0.$$

En effectuant le même raisonnement, on obtient que :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sin(x),$$

ce qui achève la résolution de l'exercice.

Remarque :
Ces deux nouvelles expressions pour cos et sin, combinées à la série entière de exp démontrée au début du paragraphe, permettent de démontrer que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

En effet, si on place $i\theta$ dans la somme partielle de la série de entière de exp, on doit distinguer les cas pair et impair, simplifiant i^k. On remarque que $i^{2q} = (-1)^q$ et que $i^{2q+1} = i(i)^{2q} = i(-1)^k$. En séparant la somme partielle selon la parité de k on obtient alors les sommes partielles des deux séries obtenues dans l'exercice.

8.9 Complément : méthodes des rectangles et estimation de sommes

Exercice 258 (②) par Martin Lambotte [*]

Déduire de (4) un encadrement du nombre de chiffres de 100!.

De (4) on déduit directement l'encadrement suivant :

$$e\left(\frac{100}{e}\right)^{100} \leq 100! \leq 100\, e\left(\frac{100}{e}\right)^{100}$$

Or,

$$\left\lfloor \log\left(e\left(\frac{100}{e}\right)^{100}\right)\right\rfloor + 1 = 158 \quad \text{et} \quad \left\lfloor (\log 100)\ e\left(\left(\frac{100}{e}\right)^{100}\right)\right\rfloor + 1 = 160.$$

Par conséquent, 100! comporte entre 158 et 160 chiffres.

Exercice 259 (③) par Martin Lambotte [*]

Soit α dans $\mathbb{R}^{+*}$. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} k^\alpha.$$

Encadrer S_n par la méthode des rectangles et en déduire que

$$\frac{S_n}{n^{\alpha+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\alpha+1}.$$

Soit α dans $\mathbb{R}^{+*}$. Posons $f : x \mapsto x^\alpha$. La fonction f est croissante sur $[1, +\infty[$ car sa dérivée est strictement positive sur cet intervalle (α étant strictement positif). Encadrons alors S_n par la méthode des rectangles.

Pour k dans $\mathbb{N}^*$ et pour t dans $[k, k+1]$, on a $f(k) \leq f(t) \leq f(k+1)$ ce qui implique

$$f(k) \leq \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(k+1)$$

En sommant k dans $\{1, \ldots, n-1\}$ et après réorganisation, on obtient :

$$\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t + f(1) \leq S_n \leq \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t + f(n).$$

Or, $F : x \mapsto \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ est une primitive de f. Par conséquent, on a :

$$[F(t)]_1^n + f(1) \leq S_n \leq [F(t)]_1^n + f(n) \quad \iff \quad \frac{n^{\alpha+1}+\alpha}{\alpha+1} \leq S_n \leq \frac{n^{\alpha+1}-1}{\alpha+1} + n^\alpha.$$

En divisant les trois membres de l'inégalité par $n^{\alpha+1}$, on obtient finalement :

$$\frac{1}{\alpha+1} + \frac{\alpha}{(\alpha+1)(n^{\alpha+1})} \leq \frac{S_n}{n^{\alpha+1}} \leq \frac{1}{\alpha+1} - \frac{\alpha}{(\alpha+1)(n^{\alpha+1})} + \frac{1}{n}.$$

Par encadrement, on en déduit le résultat cherché :

$$\frac{S_n}{n^{\alpha+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\alpha+1}.$$

EXERCICE 260 (④) par Octave Koenig [*]

Soit $\alpha \in]1, +\infty[$. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}.$$

a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}.$$

b) Montrer que la suite $(S_n)_{n\geq1}$ est convergente et que sa limite appartient à l'intervalle

$$\left[\frac{1}{\alpha-1}, \frac{\alpha}{\alpha-1}\right].$$

En utilisant le vocabulaire l'exercice précédent : la série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$ converge.

c) En utilisant l'exemple 1 ou une comparaison somme-intégrale, montrer que, si $\alpha \in]0, 1]$,

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

---

a) Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$. Pour $\alpha > 1$, la fonction f est décroissante sur $[1, +\infty[$. On a donc

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k^\alpha}.$$

En sommant pour k entre 1 et $n-1$, où $n \geq 2$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} - 1 \leqslant \int_1^n \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha},$$

donc
$$\int_1^n \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x + 1 \geqslant \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \geqslant \int_1^n \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x - \frac{1}{n^\alpha}$$
et
$$-\frac{1}{n^{\alpha-1}(\alpha-1)} + \frac{1}{\alpha-1} + 1 \geqslant S_n \geqslant -\frac{1}{n^{\alpha-1}(\alpha-1)} + \frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{n^\alpha}.$$
On a donc
$$(1) \qquad \frac{\alpha}{\alpha-1} \geqslant S_n \geqslant -\frac{1}{n^{\alpha-1}(\alpha-1)} + \frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{n^\alpha}.$$
En particulier, on a bien $S_n \leqslant \dfrac{\alpha}{\alpha-1}$.

b) La suite $(S_n)_{n\geq 2}$ est croissante et majorée, donc convergente. Soit ℓ sa limite. Par ailleurs, on a, si $n \geq 2$,
$$-\frac{1}{n^{\alpha-1}(\alpha-1)} - \frac{1}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$
Par passage à la limite de l'encadrement (1) de la question précédente, on a
$$\frac{\alpha}{\alpha-1} \geqslant \ell \geqslant \frac{1}{\alpha-1}.$$

c) En utilisant l'exemple 1, et en remarquant que, si $\alpha \in]0,1]$, $S_n \geqslant H_n$. Comme $H_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, alors, par théorème de comparaison $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

EXERCICE 261 (④) par Elliot Gampel

On pose, pour $n \geq 2$ entier, $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^n \frac{1}{k\ln(k)}$. Encadrer S_n et en déduire que
$$\frac{S_n}{\ln(\ln(x))} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Soit $f(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$, on a, par la méthode des rectangles : $f(k) \geqslant \displaystyle\int_k^{k+1} f(t)dt \geqslant f(k+1)$

D'où,
$$\sum_{k=2}^{n-1} f(k) \geqslant \int_2^n f(t)dt \geqslant \sum_{k=3}^n f(k) \implies S_n - f(n) \geqslant \int_2^n f(t)dt \geqslant S_n - f(2)$$
$$\implies \int_2^n f(t)dt + f(n) \leqslant S_n \leqslant \int_2^n f(t)dt + f(2)$$

Or, $\displaystyle\int_2^n \frac{1}{t\ln(t)}dt = \int_2^n \frac{\frac{1}{t}}{\ln(t)}dt = \int_2^n \frac{u'}{u} = [\ln(u)]_{u(2)}^{u(n)} = \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2))$

Donc, $\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \dfrac{1}{n\ln(n)} \leqslant S_n \leqslant \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \dfrac{1}{2\ln(2)}$.

Donc $1 - \dfrac{\ln(\ln(2))}{\ln(\ln(n))} + \dfrac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))} \leqslant \dfrac{S_n}{\ln(\ln(n))} \leqslant 1 - \dfrac{\ln(\ln(2))}{\ln(\ln(n))} + \dfrac{1}{2\ln(2)\ln(\ln(n))}$

Or, puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(\ln(n)) = \lim_{n\to+\infty} n\ln(n) = +\infty$, donc par passage à l'inverse, on a :
$$\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{\ln(\ln(2))}{\ln(\ln(n))} + \frac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))} = \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{\ln(\ln(2))}{\ln(\ln(n))} + \frac{1}{2\ln(2)\ln(\ln(n))} = 1$$
Finalement, d'après le théorème des gendarmes, on a :
$$\frac{S_n}{\ln(\ln(n))} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Exercice 262 (④) Par Lancelot Achour

a) On suppose f croissante sur $[1;+\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$. Établir l'implication

$$\frac{f(n)}{\int_1^n f(t)dt} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \implies \frac{\sum_{k=1}^n f(k)}{\int_1^n f(t)dt} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

b) On prend $f=\exp$. Calculer

$$\sum_{k=1}^n f(k) \quad \text{et} \quad \int_1^n f(t)dt.$$

Le résultat de a) s'applique-t-il ?

a) Supposons que :

$$\frac{f(n)}{\int_1^n f(t)dt} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a immédiatement que :

$$\int_1^n f(t)dt > 0, \quad \text{et} \quad \frac{f(1)}{\int_1^n f(t)dt} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

En reprenant l'inégalité obtenue par la méthode des rectangles :

$$\int_1^n f(t)dt + f(1) \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq \int_1^n f(t)dt + f(n),$$

on obtient que :

$$1+\frac{f(1)}{\int_1^n f(t)dt} \leq \frac{\sum_{k=1}^n f(k)}{\int_1^n f(t)dt} \leq 1+\frac{f(n)}{\int_1^n f(t)dt}.$$

Un passage à la limite dans l'inégalité ci-dessus et le Théorème de convergence par encadrement entraînent aussitôt que :

$$\frac{\sum_{k=1}^n f(k)}{\int_1^n f(t)dt} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

b) On calcule :

$$\sum_{k=1}^n \exp(k) = e\frac{1-e^n}{1-e}, \quad \text{et} \quad \int_1^n \exp(t)dt = e^n - e.$$

Le résultat de a) ne peut pas s'appliquer. En effet, la quantité :

$$\frac{\exp(n)}{\int_1^n \exp(t)dt} = \frac{e^n}{e^n-e}$$

tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$ et non 0. Par conséquent, le terme d'erreur en e^n ne peut pas disparaître lors du passage à la limite.

Remarque. Soit f une fonction croissante de $[1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}^+$ La méthode des rectangles donne une bonne estimation de $\displaystyle\sum_{k=1}^n f(k)$ si f ne varie pas trop vite, au sens où

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} \longrightarrow 1$$

c'est-à-dire si l'aire du n-ième rectangle est équivalente à celle du $n+1$-ème lorsque n tend vers $+\infty$. Tel n'est pas le cas pour la fonction exponentielle.

EXERCICE 263 (③) par Lancelot Achour [*]

Montrer que la suite $(H_n - \ln(n))_{n\geq 1}$ est décroissante. En déduire que cette suite est convergente.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a que :

$$H_{n+1} - \ln(n+1) - H_n + \ln(n) = \frac{1}{n+1} + \ln(\frac{n}{n+1}) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right).$$

Or, d'après le paragraphe **6.3.2**,

$$\forall y \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \ln(y) \leq y - 1.$$

En prenant $y = 1 - \dfrac{1}{n+1}$, on obtient que :

$$\frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leq 0,$$

d'où la décroissance de la suite $(H_n - \ln(n))_{n\geq 1}$. En reprenant l'encadrement de $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ du début de paragraphe, il vient que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(n) \leq H_n \leq \ln(n) + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq H_n - \ln(n) \leq 1.$$

La suite $(H_n - \ln(n))_{n\geq 1}$ est en particulier minorée. Comme elle est décroissante, elle converge vers un réel γ. Par passage à la limite dans l'encadrement précédent, $\gamma \in [0, 1]$.

Remarque. En fait, les trois premières décimales de γ sont $0,577$.

8.10 Problème : un premier calcul de $\zeta(2)$

PROBLÈME 1 (⑤) par Octave Koenig [*]

1. a) Pour n dans $\mathbb{N}^*$, calculer :

$$\int_0^\pi t\cos(nt)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^\pi t^2\cos(nt)\mathrm{d}t.$$

   b) Déterminer deux constantes réelles a et b telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \int_0^\pi (at^2 + bt)\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}.$$

2. Pour n dans $\mathbb{N}^*$ et t dans $\mathbb{R}$, soit :

$$C_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \cos(kt).$$

   Montrer que, pour n dans $\mathbb{N}^*$ et t dans $\mathbb{R}$ non multiple entier de 2π :

$$C_n(t) = -\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\dfrac{2n+1}{2}t\right)}{2\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}.$$

3. Déduire de ce qui précède que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi \varphi(t)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t.$$

   où φ est une fonction définie et continue sur $[0, \pi]$ que l'on précisera.
4. On admet que φ est dérivable sur $[0, \pi]$ et que sa dérivée est continue. Montrer, en utilisant l'exercice 243 de **8.4** (lemme de Riemann-Lebesgue), que

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

1. a) En intégrant par parties (voir exercice 209), on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^\pi t\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \int_0^\pi t^2\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{2\pi(-1)^n}{n^2}.$$

b) On déduit de la question précédente, sachant que

$$\int_0^\pi (at^2+bt)\cos(nt)\mathrm{d}t = a\left(\frac{2\pi(-1)^n}{n^2}\right) + b\left(\frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

que le choix $(a,b) = \left(\dfrac{1}{2\pi}, -1\right)$ convient.

2. On procède par récurrence. Soit $\mathcal{P}_n$:

$$\text{« pour } t \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}, \quad C_n(t) = -\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.\text{ »}$$

Initialisation.

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{3t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} &= -\frac{1}{2} + \frac{\sin(t)\cos\left(\frac{t}{2}\right) + \cos(t)\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \\
&= \frac{\left[2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]\cos\left(\frac{t}{2}\right) + \left[1-2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right]\sin\left(\frac{t}{2}\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \\
&= \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) = \cos(t).
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}_1$ est vérifiée.
Hérédité. Fixons n dans $\mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Soit $t \in \mathbb{R}$ non multiple entier de 2π. On veut montrer que

$$\frac{\sin\left(\frac{2(n+1)+1}{2}t\right) - \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \cos((n+1)t).$$

D'une part :

$$\sin\left(\frac{2(n+1)+1}{2}t\right) = \cos\left((n+1)t\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right) + \sin\left((n+1)t\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right),$$

d'autre part :

$$\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) = \sin\left(\frac{2(n+1)-1}{2}t\right) = -\cos((n+1)t)\sin\left(\frac{t}{2}\right) + \sin((n+1)t)\cos\left(\frac{t}{2}\right),$$

ce qui entraîne :

$$\begin{gathered}
\sin\left(\frac{2(n+1)+1}{2}t\right) - \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) = 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left((n+1)t\right), \\
\frac{\sin\left(\frac{2(n+1)+1}{2}t\right) - \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \cos((n+1)t).
\end{gathered}$$

Ce qui achève la récurrence.
Remarque. Les nombres complexes permettent de donner une démonstration plus naturelle et plus agréable, en ramenant ce calcul à celui d'une somme trigonométrique ; voir **10.9**.

3. Soient n dans $\mathbb{N}^*$ et φ une fonction définie par :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & [0,\pi] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} -1 & \text{si } x=0 \\ \dfrac{1}{2\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}\left(\dfrac{x^2}{2\pi}-x\right) & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

La fonction φ est continue sur $]0,\pi]$ en tant que produit de fonctions continues sur cet intervalle.
Montrons que φ est continue en 0. On a

$$\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \quad \text{donc, par composition} \quad \frac{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\dfrac{x}{2}} \xrightarrow[x\to 0]{} 1, \quad \text{i.e.} \quad \frac{x}{2\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)} \xrightarrow[x\to 0]{} 1.$$

Comme $\dfrac{x}{2\pi} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, on en déduit que

$$\frac{x^2}{4\pi\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)} \xrightarrow[x\to 0]{} 0, \quad \text{et donc que} \quad \left(\frac{x^2}{2\pi}-x\right)\times\frac{1}{2\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)} \xrightarrow[x\to 0]{} -1.$$

La fonction φ est bien continue sur $[0,\pi]$.
Montrons que, pour t dans $[0,\pi]$,

$$\varphi(t)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) = \left(C_n(t)+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right).$$

Si $t=0$, $\quad \sin\left(\dfrac{2n+1}{2}t\right)=0$ et $\left(\dfrac{t^2}{2\pi}-t\right)=0$ donc l'égalité est vérifiée.
Sinon, on remarque que :

$$\begin{aligned} \varphi(t)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) &= \frac{\left(\dfrac{t^2}{2\pi}-t\right)}{2\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) = \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\left(\frac{\sin\left(\dfrac{2n+1}{2}t\right)}{2\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) \\ &= \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\left(C_n(t)+\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

On déduit de 1.b) :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} &= \sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(nt)\mathrm{d}t. \\ &= \int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\left(C_n(t)-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\mathrm{d}t+\int_0^{\pi}\left(C_n(t)+\frac{1}{2}\right)\left(\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{\pi^2}{6}+\int_0^{\pi}\varphi(t)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

4. D'après le lemme de Riemann-Lebesgue, on a, si f est dérivable sur $[a,b]$ à dérivée continue,

$$\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0.$$

On applique ce résultat à $f=\varphi$ sur $[0,\pi]$. On pose, pour $n\in\mathbb{N}$, $\lambda_n=\dfrac{2n+1}{2}$. La suite (λ_n) tend vers $+\infty$ donc, par composition,

$$\int_0^{\pi}\varphi(t)\sin(\lambda_n t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

D'où

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}.$$

9 Probabilités

9.1 Exercices introductifs

Exercice 264 (①) par Victor Llorca [*]

On lance deux dés non pipés. Est-il plus probable que la somme soit égale à 9 où à 10 ?

Les deux lancers sont indépendants et les dés non pipés. Il y a 36 issues possibles, de même probabilité $\frac{1}{36}$. Il y a 4 couples donnant une somme de 9, à savoir $(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)$, et 3 donnant une somme de 10, à savoir $(4,6),(5,5),(6,4)$. L'événement « la somme est 9 » a pour probabilité $\frac{1}{9}$ et est donc plus probable que l'événement « la somme est 10 », de probabilité $\frac{1}{12}$.

Exercice 265 (①) par Victor Llorca [*]

On lance six dés non pipés. Quelle est la probabilité d'obtenir tout les nombres de 1 à 6 ?

Il y a 6^6 issues possibles, équiprobables ; il y a $6!$ issues favorables (6 choix pour le premier dé, 5 pour le 2ème...). La probabilité cherchée est $\frac{6!}{6^6} \simeq 0,0154$.

Exercice 266 (①) par Victor Llorca [*]

On lance un dé non pipé. On répète n fois l'opération, les lancers successifs étant supposés indépendants. Quelle est la probabilité p_n pour que l'on obtienne au moins un 6 ? Déterminer la limite de $(p_n)_{n\geq 1}$.

On étudie l'évènement contraire, i.e. ne jamais obtenir de 6 après n lancers. La probabilité de ne pas obtenir un 6 sur un lancer est de $\frac{5}{6}$, les lancers sont indépendants. La probabilité de l'événement contraire est donc

$$q_n = \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

Par suite

$$p_n = 1 - q_n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

Comme $\left(\frac{5}{6}\right)^n$ est une suite géométrique de raison $\frac{5}{6}$ où $-1 < \frac{5}{6} < 1$, on a $\left(\frac{5}{6}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Et

$$p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1,$$

ce qui est conforme à l'intuition.

Exercice 267 (②) par Victor Llorca [*]

a) On considère un dé non pipé. La probabilité qu'en 4 lancers, le dé amène au moins un 6 est-elle supérieure à $\frac{1}{2}$?

b) On considère deux dés non pipés. La probabilité qu'en 24 lancers, les dés amènent au moins un double 6 est-elle supérieure à $\frac{1}{2}$?

a) Le raisonnement de l'exercice précédent montre que la probabilité de l'événement contraire est

$$\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296} < \frac{1}{2}.$$

Donc la probabilité d'obtenir au moins un 6 est strictement supérieure à $\frac{1}{2}$.

b) Sur un lancer, la probabilité d'avoir un double 6 est de $\frac{1}{36}$ (en supposant les deux dés indépendants). La probabilité de ne jamais avoir de double 6 sur 24 lancers est donc de $\left(\frac{35}{36}\right)^{24} > \frac{1}{2}$

Donc la probabilité d'obtenir au moins un 6 est strictement inférieure à $\frac{1}{2}$.

EXERCICE 268 (③) par Victor Llorca [*]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n dés non pipés, que l'on jette simultanément 4.6^{n-1} fois.

a) Déterminer la probabilité p_n d'obtenir au moins une fois n six.

b) Déterminer la limite de la suite $(p_n)_{n\geq 1}$

a) Pour un dé donné, la probabilité d'obtenir six est de $\frac{1}{6}$. On suppose les jets indépendants. Pour un lancer, la probabilité d'obtenir n six sur les n dés est donc de $\left(\frac{1}{6}\right)^n$

Ainsi, la probabilité de ne jamais obtenir n six sur les 4.6^{n-1} lancers est de

$$\left(1-\left(\frac{1}{6}\right)^n\right)^{4.6^{n-1}}.$$

La probabilité d'obtenir au moins une fois n six est donc

$$p_n = 1-\left(1-\left(\frac{1}{6}\right)^n\right)^{4.6^{n-1}}.$$

b) On étudie

$$\left(1-\left(\frac{1}{6}\right)^n\right)^{4.6^{n-1}} = e^{4.6^{n-1}\ln\left(1-\left(\frac{1}{6}\right)^n\right)}.$$

On étudie le terme $4.6^{n-1}\ln\left(1-\left(\frac{1}{6}\right)^n\right)$.

La clé est que

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1.$$

On en déduit que

$$6^n \ln\left(1-\frac{1}{6^n}\right) \longrightarrow -1 \quad \text{et} \quad 4.6^{n-1}\ln\left(1-\frac{1}{6^n}\right) \longrightarrow -\frac{2}{3}.$$

Par continuité de exp,

$$\left(1-\left(\frac{1}{6}\right)^n\right)^{4.6^{n-1}} \longrightarrow e^{-2/3} \quad \text{et} \quad p_n \longrightarrow 1-e^{-2/3} \simeq 0,48.$$

Remarque. On peut voir cet exercice comme une suite du précédent.

EXERCICE 269 (③) par Victor Llorca [*]

On lance 3 dés non pipés. Montrer que la probabilité d'amener un total inférieur ou égal à 10 est $\frac{1}{2}$. On essaiera de donner un argument ne nécessitant aucun calcul.

On utilise un argument de symétrie, en notant que, si x décrit l'ensemble des entiers entre 1 et 6, il en est de même de $7-x$.

Or, si le lancer (a, b, c) donne la somme $s = a + b + c$ le lancer $(7 - a, 7 - b, 7 - c)$ donne la somme $21 - s$. Comme $s \leq 10$ équivaut à $21 - s \geq 11$, i.e. $21 - s > 10$, la probabilité d'amener une somme inférieure ou égale à 10 est donc la même que celle de l'événement contraire (amener une somme strictement supérieure à 10). Ces deux événement ont donc pour probabilité commune $\frac{1}{2}$.

EXERCICE 270 (②) par Victor Llorca [*]

Un joueur de tennis A en affronte deux autres, B et C. On suppose que C est meilleur que B. Le joueur A gagne s'il gagne au moins deux matchs consécutifs. Quel est l'ordre qui maximise sa chance de gagner entre BCB et CBC ?

On note b_i (resp. c_i) l'évènement correspondant à une victoire contre B (resp. C) au $i$ème match.

La probabilité de gagner en jouant les matchs BCB est :

$$\begin{aligned} P\left((b_1 \cap c_2) \cup (c_2 \cap b_3)\right) &= P(b_1 \cap c_2) + P(c_2 \cap b_3) - P(b_1 \cap c_2 \cap c_2 \cap b_3) \\ &= 2p_b p_c - p_b^2 p_c = p_b p_c (2 - p_b) \end{aligned}$$

La probabilité de gagner en jouant les matchs CBC est :

$$\begin{aligned} P\left((c_1 \cap b_2) \cup (b_2 \cap c_3)\right) &= P(c_1 \cap b_2) + P(b_2 \cap c_3) - P(c_1 \cap b_2 \cap b_2 \cap c_3) \\ &= 2p_b p_c - p_b p_c^2 = p_b p_c (2 - p_c) \end{aligned}$$

Puisque $p_c < p_b$. On a $p_b p_c(2 - p_b) < p_b p_c(2 - p_c)$
Donc CBC est plus favorable.

Remarque. Le résultat est compréhensible. En intercalant un match que l'on a davantage de chances de gagner, on a plus de chance d'en gagner deux de suite.

EXERCICE 271 (②) par Victor Llorca [*]

Un jury comprend trois membres A, B, C. Les deux premiers prennent une décision juste avec probabilité p, le troisième avec probabilité $\frac{1}{2}$. Quelle est la probabilité qu'une décision juste soit prise en appliquant la règle de la majorité ?

On note a (resp. b et c) l'événement correspondant à une décision juste de A (resp. B et C). On suppose que les décisions de A, B, C sont indépendantes.

La probabiité que A, B, C prennent une décision juste est :

$$P(a \cap b \cap c) = P(a) \times P(b) \times P(c) = \frac{p^2}{2}.$$

La probabilité qu'exactement deux des trois membres prennent une décision juste d'obtient en décomposant selon le membre qui prend une décision erronée. Elle vaut

$$P\left(a \cap b \cap \overline{c}\right) + P\left(a \cap \overline{b} \cap c\right) + P\left(\overline{a} \cap b \cap c\right) = p \times p \times \frac{1}{2} + p \times (1-p) \times \frac{1}{2} + (1-p) \times p \times \frac{1}{2} = \frac{p^2}{2} + p(1-p).$$

La probabilité d'avoir une décision juste est : $p^2 + p(1 - p) = p$.

EXERCICE 272 (②) par Wéline Pujol [*]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient 10 boules noires et n boules blanches. Un joueur tire 20 fois successivement et avec remise une boule de l'urne, les tirages étant indépendants. Quelle est la probabilité p_n d'obtenir au moins une boule blanche au cours de ces 20 tirages. Quels sont les n tels que $p_n \geq \frac{1}{2}$?

La probabilité d'obtenir une boule blanche lors d'un tirage est

$$p = \frac{n}{n+10}.$$

Ceci correspond au succès d'une épreuve de Bernoulli. En supposant les 20 tirages indépendants, la probabilité de n'obtenir aucune boule blanche est donc

$$(1-p)^{20} = \left(\frac{10}{10+n}\right)^{20}.$$

La probabilité d'obtenir au moins une boule blanche est donc

$$1 - \left(\frac{10}{10+n}\right)^{20}.$$

On a

$$1 - \left(\frac{10}{10+n}\right)^{20} \geq \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{10}{10+n}\right)^{20} \leq \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad n \geq 10\,(\exp\left(\frac{\ln(2)}{20}\right) - 1).$$

La calculatrice montre que ceci est vrai pour tout $n \geq 1$.

Exercice 273 (③) par Wéline Pujol [*]

Un message binaire est transmis à travers des canaux successifs. La probabilité que le message soit transmis correctement d'un opérateur à un autre est p, avec $0 < p < 1$. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, soit π_n la probabilité pour que le n-ième opérateur reçoive un message correct. On a donc $\pi_1 = 1$.

a) Justifier, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la formule

$$\pi_{n+1} = p\pi_n + (1-p)(1-\pi_n).$$

b) En utilisant le protocole d'étude des suites arithmético-géométriques (1.2, exercice 3), exprimer π_n en fonction de p et n. Déterminer la limite de $(\pi_n)_{n\geq 1}$.

---

a) On fait l'hypothèse que les canaux sont indépendants.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculons π_{n+1} en fonction de π_n. Le $n+1$-ième opérateur reçoit un message correct si et seulement si :
- le n-ième opérateur reçoit un message correct et la transmission du n-ième opérateur vers le $n+1$-ième est correcte : probabilité $\pi_n \times p$;
- le n-ième opérateur reçoit un message incorrect et la transmission du n-ième opérateur vers le $n+1$-ième est incorrecte : probabilité $(1-\pi_n) \times (1-p)$.
On obtient bien la formule : $\pi_{n+1} = p\pi_n + (1-p)(1-\pi_n)$.

b) On réécrit la relation précédente comme une récurrene arithmético-géométrique :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \pi_{n+1} = (2p-1)\pi_n + 1 - p.$$

Le point fixe de l'application

$$f\ ; x \in \mathbb{R} \longmapsto (2p-1)x + (1-p)$$

est $\frac{1}{2}$. L'étude des suites arithmético-géométriques montre que la suite $\left(\pi_n - \frac{1}{2}\right)_{n\geq 1}$ est géométrique de raison $2p-1$. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \pi_n = \frac{1}{2} + (2p-1)^{n-1}(\pi_1 - 1).$$

Comme $p \in]0,1[$, $2p-1 \in]-1,1[$ et $((2p-1)^n)_{n\geq 0}$ converge vers 0. Par suite

$$\pi_n \longrightarrow \frac{1}{2}.$$

Exercice 274 (③) par Wéline Pujol [*]

On considère une assemblée de m personnes. Quelle est la probabilité que deux d'entre elles aient même anniversaire (on ne tient pas compte des années bissextiles) ? Pour quels m cette probabilité est-elle supérieure à $\frac{1}{2}$?

Notons p_m la probabilité cherchée.

On calcule la probabilité $1 - p_m$ de l'événement contraire, c'est-à-dire la probabilité que les m personnes de l'assemblée aient des anniversaires distincts.

Si $m \geq 366$, il existe nécessairement deux personnes ayant même anniversaire. Ainsi $1 - p_m = 0$ et $p_m = 1$.

On a clairement $p_1 = 0$.

Supposons $2 \leq m \leq 365$. Il y a 365^m possibilités pour les dates d'anniversaires des membres de l'assemblée. Pour que ces dates soient distinctes, il y a

$$\prod_{k=0}^{m-1} (365 - k)$$

possibilités (numérotant les membres de l'assemblée de 1 à m, il y a 365 choix pour l'anniversaire de la première personne, 364 pour celui de la deuxième, 363 pour celui de la troisième, ...,$366 - m$ pour celui de la m-ième). Ainsi

$$p_m = 1 - \frac{\prod_{k=0}^{m-1} 365^m(365 - k)}{=} 1 - \prod_{k=0}^{m-1} \left(1 - \frac{k}{365}\right).$$

Ainsi,

$$p_m \geq \frac{1}{2} \quad \iff \quad \prod_{k=0}^{m-1} \left(1 - \frac{k}{365}\right) \leq \frac{1}{2}.$$

Notons que, si $1 \leq m \leq 364$,

$$p_{m+1} = \left(1 - \frac{m}{365}\right) \, p_m.$$

La calculatrice permet de voir que la condition est satisfaite si et seulement si $m \geq 23$.

Exercice 275 (③) par Antoine Charki[*]

Soit m et n deux éléments de $\mathbb{N}^*$ tels que $m \leq n$. On se donne une population de n personnes dans laquelle chaque personne admet exactement m amis. On choisit deux individus. Quelle est la probabilité qu'ils aient au moins un ami en commun ?

Application numérique : $n = 10^5$, $m = 200$.

Si $n < 2m$, les deux groupes d'amis ont une intersection non vide, la probabilité est 1.

Supposons que $n \geq 2m$. La probabilité que les deux groupes d'amis n'aient aucun élément commun est :

$$\frac{\binom{n-m}{m}}{\binom{n}{m}} = \frac{((n-m)!)^2}{n! \, (n-2m)!}.$$

La probabilité que les deux groupes d'amis aient au moins un ami en commun est donc

$$1 - \frac{((n-m)!)^2}{n! \, (n-2m)!}.$$

L'application numérique donne environ 0.33.

Exercice 276 (③) par Antoine Charki[*]

Un gène possède deux allèles notés a et A. Les trois génotypes possibles sont aa, aA, AA, avec des probabilités respectives $x_1, 2y_1, z_1$. Chaque allèle a et A a une probabilité $\frac{1}{2}$ d'être transmis. Les parents sont sélectionnés indépendamment.

a) On note $x_2, 2y_2, z_2$ les probabilités respectives des génotypes aa, aA, AA à la seconde génération. Montrer que :

$$x_2 = (x_1 + y_1)^2, \quad y_2 = (x_1 + y_1)(y_1 + z_1), \quad z_2 = (y_1 + z_1)^2.$$

b) Montrer que la probabilité de chaque génotype est constante à partir de la seconde génération, c'est à dire que si l'on note $x_n, 2y_n, z_n$ les probabilités respectives des génotypes aa, aA, AA à la n-ième génération, on a, pour tout entier $n \geqslant 2$

$$x_n = x_2, \quad y_n = y_2, \quad z_n = z_2.$$

a) Pour obtenir aa à la deuxième génération, les possibilités sont les suivantes :

- chaque parent est aa, de probabilité ${x_1}^2$;

- le premier parent est aa, le deuxième aA, de probabilité $\frac{x_1 \times 2y_1}{2} = x_1 y_1$;

- le premier parent est aA, le deuxième aa, également de probabilité $x_1 y_1$;

- chaque parent est aA, de probabilité $\frac{(2y_1)^2}{4} = {y_1}^2$.

Soit au total

$$x_2 = x_1^2 + 2x_1 y_1 + y_1^2 = (x_1 + y_1)^2;$$

Les raisonnements sont analogues pour y_2 et z_2.

Remarque. On vérifie que $x_2 + 2y_2 + z_2 = 1$, ce qui est rassurant. En effet, comme $x_1 + 2y_1 + z_1 = 1$,

$$x_2 + 2y_2 + z_2 = ((x_1 + y_1) + (y_1 + z_1))^2 = 1^2 = 1.$$

b) Un raisonnement par récurrence laissé au lecteur montre qu'il suffit d'établit que

$$(x_3, y_3, z_3) = (x_2, y_2, z_2).$$

Faisons le calcul pour x_3, les autres étant analogues. On utilise à nouveau l'égalité $x_1 + 2y_1 + z_1 = 1$. On a

$$x_3 = (x_2 + y_2)^2 = \left((x_1 + y_1)^2 + (x_1 + y_1)(x_1 + z_1)\right)^2 = ((x_1 + y_1)\ (x_1 + y_1 + y_1 + z_1))^2$$

Exercice 277 (②) par Antoine Charki[*]

Lors d'un examen, un étudiant a le choix entre m réponses. Il connaît la réponse à la question avec probabilité p. S'il ignore la réponse, il choisit au hasard et de façon équiprobable la réponse parmi les m possibles. Sachant que l'étudiant a bien répondu, quelle est la probabilité qu'il ait connu la réponse ?

Soit J (juste) et C (réponse connue), d'après l'arbre de probabilités, on a :

$$\begin{aligned} P(J) &= P(C \cap J) + P(\overline{C} \cap J) \\ &= 1 \cdot p + \frac{1}{m} \cdot (1 - p) \\ &= \frac{(1 - p) + mp}{m} \end{aligned}$$

et on retrouve : $P_J(C) = \dfrac{P(C\cap J)}{P(J)} = \dfrac{pm}{(1-p)+pm}$.

Plus formellement, on peut utiliser la formule de Bayes.

Exercice 278 (②) par Maxime Coat [*]

Un test médical est réalisé sur une population contenant une proportion p de malades. Le test n'étant pas parfait, il est positif avec probabilité p_1 (proche de 1) sur les malades et p_2 (proche de 0) sur les individus sains. Déterminer la probabilité qu'un individu sur lequel le test est positif soit effectivement malade.

On note T l'événement « être positif »et M l'événement « être malade ». Alors,

$$P(T) = P(T\cap M) + P(T\cap \overline{M}) = P_M(T)P(M) + P_{\overline{M}}(T)P(\overline{M}) = p_1p + p_2(1-p).$$

Donc

$$P_T(M) = \frac{P(M\cap T)}{\mathbb{P}(T)} = \frac{P_M(T)\,P(M)}{\mathbb{P}(T)} = \frac{pp_1}{pp_1+(1-p)p_2}.$$

Si p est fixé, cette probabilité tend vers 1 lorsque p_1 tend vers 1 et p_2 tend vers 0.

Exercice 279 (④) Par Lancelot Achour

a) Soient $m\in\mathbb{N}$ et $n\in\mathbb{N}^*$. On considère $m+1$ urnes $U_0,\ldots,U_m$ telles que, pour tout $k\in\{0,\ldots,m\}$, U_k contienne k boules bleues et $m-k$ boules rouges. Choisissons au hasard, avec équiprobabilité, une des urnes et effectuons-y $(n+1)$ tirages avec remise. Pour $1\le k\le n+1$, notons $A_{k,m}$ l'évènement « pour chacun des k premiers tirages, on a obtenu une boule bleue ». Exprimer $p_{n,m} = \mathbb{P}\left(A_{n+1,m}|A_{n,m}\right)$.
b) On fixe n. Déterminer la limite de $(p_{m,n})_{m\ge 1}$ lorsque m tend vers $+\infty$. On pourra utiliser la méthode des rectangles (**8.9**).

a) On notera (abusivement), pour tout $k\in[\![0,m]\!]$, U_k l'évènement « tirer aléatoirement l'urne k » et $B_{n,k}$ l'évènement « tirer n boules bleues de suite dans l'urne k ». On cherche d'abord à exprimer $\mathbb{P}(A_{n,m})$. Par hypothèse :

$$\forall k\in[\![0,m]\!],\qquad \mathbb{P}(U_k) = \frac{1}{m+1}.$$

On fixe alors $k\in[\![0,m]\!]$. Observons que dans l'urne k, on a :

$$\mathbb{P}(B_{1,k}) = \frac{k}{m},$$

et donc, pour $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}(B_{n,k}) = \left(\frac{k}{m}\right)^n.$$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Si B_n est l'événement « tirer n boules bleues de suite en n lancers, la formule des probabilités totales donne que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_{n,m}) &= \sum_{k=0}^{m}\mathbb{P}(B_n\cap U_k)\\ &= \sum_{k=0}^{m}\mathbb{P}(U_k)\mathbb{P}(B_n|U_k)\\ &= \sum_{k=0}^{m}\mathbb{P}(U_k)\mathbb{P}(B_{n,k}) = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{k}{m}\right)^n.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$p_{n,m} = \frac{\mathbb{P}(A_{n+1,m} \cap A_{n,m})}{\mathbb{P}(A_{n,m})}.$$

Mais on a clairement que $A_{n+1,m} \subseteq A_{n,m}$, donc $A_{n+1,m} \cap A_{n,m} = A_{n+1,m}$. Par suite :

$$\frac{\mathbb{P}(A_{n+1,m} \cap A_{n,m})}{\mathbb{P}(A_{n,m})} = \frac{\mathbb{P}(A_{n+1,m})}{\mathbb{P}(A_{n,m})}.$$

D'où la formule suivante :

$$p_{n,m} = \frac{\frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} \left(\frac{k}{m}\right)^{n+1}}{\frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} \left(\frac{k}{m}\right)^{n}}.$$

(on ne simplifie pas volontairement)

b) On utilise la méthode des rectangles. La fonction $x \longmapsto \left(\frac{x}{m}\right)^n$ est naturellement croissante. On a donc pour $k \in [\![0; m]\!]$:

$$\forall t \in [k; k+1], \quad \left(\frac{k}{m}\right)^n \leq \left(\frac{t}{m}\right)^n \leq \left(\frac{k+1}{m}\right)^n.$$

Puis, par croissance de l'intégrale, on obtient que :

$$\left(\frac{k}{m}\right)^n \leq \int_k^{k+1} \left(\frac{t}{m}\right)^n dt \leq \left(\frac{k+1}{m}\right)^n,$$

et en sommant k sur $[\![0; m]\!]$:

$$\sum_{k=1}^{m} \left(\frac{k}{m}\right)^n - 1 \leq \int_0^m \left(\frac{t}{m}\right)^n dt \leq \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{k}{m}\right)^n,$$

ce qui est également :

$$\int_0^m \left(\frac{t}{m}\right)^n dt + 1 \geq \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{m}\right)^n \geq \int_0^m \left(\frac{t}{m}\right)^n dt,$$

d'où :

$$\frac{1}{m+1} \int_0^m \left(\frac{t}{m}\right)^n dt + \frac{1}{m+1} \geq \frac{1}{m+1} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{m}\right)^n \geq \int_0^m \left(\frac{t}{m}\right)^n dt.$$

Il nous reste à calculer l'intégrale qui apparait dans les membres extérieurs de l'inégalité. En utilisant les primitives usuelles on a que :

$$\frac{1}{m+1} \int_0^m \left(\frac{t}{m}\right)^n dt = \frac{1}{m+1} \left[\frac{m \left(\frac{t}{m}\right)^{n+1}}{n+1}\right]_0^m = \frac{m}{m+1} \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi l'encadrement devient :

$$\frac{m}{m+1} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{m+1} \geq \frac{1}{m+1} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{m}\right)^n \geq \frac{m}{m+1} \frac{1}{n+1}.$$

Enfin, en laissant m tendre vers $+\infty$, on obtient, par le théorème de convergence par encadrement que :

$$\frac{1}{m+1} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{m}\right)^n \xrightarrow[m \to +\infty]{} \frac{1}{n+1}.$$

En changeant n en $n+1$, il vient :

$$\frac{1}{m+1} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{m}\right)^{n+1} \xrightarrow[m \to +\infty]{} \frac{1}{n+2}.$$

Par conséquent :

$$p_{n,m} \xrightarrow[m \to +\infty]{} \frac{n+1}{n+2}.$$

Exercice 280 (⑤) par Tristan Hottier [*]

Le jeu de Monty Hall se présente de la façon suivante. Trois portes sont fermées ; derrière l'une d'entre elles se trouve une voiture, derrière chacune des deux autres un porte-clés. Le candidat se place devant l'une des portes. Le présentateur, qui sait quelle est la porte cachant la voiture, ouvre alors l'une des deux portes non choisies par le candidat, derrière laquelle, bien sûr, se trouve un porte-clés. Que doit faire le candidat : garder son choix ou le modifier ?

On commence par poser les évènements suivants :

C : « la porte choisie cache un porte clé »,

V : « la porte choisie cache la voiture »,

E : « gagner en changeant de porte »,

G : « gagner en gardant sa porte ».

Comme deux des trois portes cachent des porte-clés, on a $\mathbf{P}(C) = \dfrac{2}{3}$ et $\mathbf{P}(V) = \dfrac{1}{3}$.

Supposons que le candidat se place devant une porte avec un porte-clé. Alors le présentateur ouvrira l'autre porte cachant un porte clé et la porte restante cache évidemment la voiture , donc le candidat gagnera s'il change et ne gagnera pas s'il ne change pas.

Alors $\mathbf{P}(E|C) = 1$ et $\mathbf{P}(G|C) = 0$.

Supposons maintenant que le candidat se soit placé devant la porte cachant la voiture. Alors le présentateur ouvre une des deux portes restantes cachant un porte clé et le candidat gagnera la voiture s'il garde sa porte, la perdra s'il change.

Alors $\mathbf{P}(G|V) = 1$ et $\mathbf{P}(E|V) = 0$.

On peut alors calculer les probabilités $\mathbf{P}(E)$ et $\mathbf{P}(G)$, ce qui donne :

$$\mathbf{P}(E) = \mathbf{P}(E|C) \times \mathbf{P}(C) + \mathbf{P}(E|V) \times \mathbf{P}(V) = 1 \times \frac{2}{3} + 0 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

$$\mathbf{P}(G) = \mathbf{P}(G|C) \times \mathbf{P}(C) + \mathbf{P}(G|V) \times \mathbf{P}(V) = 0 \times \frac{2}{3} + 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

On remarque alors que la probabilité de gagner en changeant de porte est deux fois supérieure à celle de gagner sans changer, ce qui répond au problème.

Remarque. Pour rendre ce phénomène plus évident, on peut s'intéresser à la généralisation suivante du problème de Monty Hall.

Pour $n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$, on considère n portes. Derrière une de ces portes se cache la voiture et derrière chacune des autres il y a un porte-clé. Le candidat choisi une porte parmi les n, au hasard, puis le présentateur de l'émission ouvre toutes les autres portes sauf une. Évidemment, toutes les portes ouvertes par le présentateur ne cachent que des porte-clés. Le candidat a alors le choix entre garder sa porte ou changer et prendre l'autre porte.

On reprend les évènements définis un peu plus haut et on écrit alors $\mathbf{P}(C) = \dfrac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$ et $\mathbf{P}(V) = \dfrac{1}{n}$. Par un raisonnement analogue, on trouve

$$\mathbf{P}(E) = \frac{n-1}{n} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(G) = \frac{1}{n}.$$

La probabilité de gagner en changeant de porte est toujours plus grande que celle de gagner sans changer.

Plus le nombre de portes est grand, plus la probabilité de gagner en changeant de porte se rapproche de 1 et celle de gagner sans changer, de 0.

Exercice 281 (①) par Maxime Coat [∗]

Que dire de deux événements A et B indépendants et incompatibles ?

Si A et B sont indépendants alors

$$\mathbf{P}(A\cap B)=\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B).$$

Si A et B sont incompatibles alors

$$\mathbb{P}(A\cap B)=0.$$

Donc, A et B sont indépendants et incompatibles si et seulement si au moins l'un des deux est de probabilité nulle.

Exercice 282 (②) par Loïse Launay [∗]

Soient A et B deux évènements de probabilités respectives $\dfrac{5}{10}$ et $\dfrac{7}{10}$. On suppose que la probabilité que A et B se produisent est $\dfrac{3}{10}$. Quelle est la probabilité que ni A ni B ne se produise ?

L'évènement contraire de « ni A ni B ne se produit »est « A ou B se produit ». D'après les propriétés des évènements contraires, on a donc :

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=1-P(A\cup B).$$

Or :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B).$$

Soit :

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B).$$

Le calcul donne :

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=1-\frac{5}{10}-\frac{7}{10}+\frac{3}{10}=\frac{1}{10}.$$

Exercice 283 (③) par Elliot Gampel [∗]

Soient A et B deux évènements. Comparer $\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(A\cup B)\,\mathbb{P}(A\cap B)$.

On va montrer que $P(A\cup B)P(A\cap B)\leqslant P(A)P(B)$.

On note A' et B' les complémentaires respectifs de $A\cap B$ dans A et B. Alors $A\cup B$ est réunion **disjointe** de $A\cap B, A', B'$, donc

$$P(A\cup B)=P(A\cap B)+P(A')+P(B'),\qquad P(A\cup B)\ P(A\cap B)=P(A\cap B)^2+P(A\cap B)\ P(A')+P(A\cap B)\ P(B').$$

De même, A (resp. B) est réunion **disjointe** de $A\cap B$ et A' (resp. $A\cap B$ et B', donc

$$P(A)\ P(B)=P(A\cap B)^2+P(A\cap B)P(A')+P(A\cap B)P(B')+P(A')P(B').$$

Il en résulte que

$$P(A)\ P(B)-P(A\cup B)\ P(A\cap B)=P(A')\ P(B')\geq 0.$$

Exercice 284 (④) par Samy Clementz [*]

Soient A et B deux événements avec $P(B)>0$. Montrer que

$$|P(A\cap B)-P(A|B)|\leq \frac{1}{P(B)}-1, \quad |P(A)-P(A\cap B)|\leq 1-P(B).$$

En déduire que

$$|P(A)-P(A|B)|\leq \frac{1}{P(B)}-P(B).$$

Première inégalité :

$$|P(A\cap B)-P(A|B)|=|P(A\cap B)-\frac{P(A\cap B)}{P(B)}|=P(A\cap B)\left|1-\frac{1}{P(B)}\right|\leq \left|1-\frac{1}{P(B)}\right|.$$

Comme $P(B)$ est compris entre 0 et 1, on a

$$\left|1-\frac{1}{P(B)}\right|=\frac{1}{P(B)}-1,$$

ce qui prouve l'inégalité.

Deuxième inégalité : remarquons que, puisque A est union disjointe de $A\cap B$ et de $A\cap B^c$, on a

$$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B}).$$

Par conséquent,

$$|P(A)-P(A\cap B)|=P(A\cap\overline{B})\leq P(\overline{B})=1-P(B).$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\begin{aligned}|P(A)-P(A|B)|&=|P(A)-P(A\cap B)+P(A\cap B)-P(A|B)|\\&\leq |P(A)-P(A\cap B)|+|P(A\cap B)-P(A|B)|\\&\leq 1-P(B)+\frac{1}{P(B)}-1\\&=\frac{1}{P(B)}-P(B).\end{aligned}$$

Remarque. Si $P(B)$ est proche de 1, les probabilités $P(A)$ et $P_B(A)=P(A|B)$ sont proches, ce qui est intuitif.

Exercice 285 (③) par Ylan Marx [*]

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On se donne n événements indépendants de probabilités respectives $p_1,...,p_n$.

a) Calculer la probabilité π_n qu'aucun de ces événements de ne se réalise.

b) Montrer que :

$$\pi_n\leq \exp\left(-\sum_{i=1}^n p_i\right)$$

a) On note ces n événements $A_1,...,A_n$. Nous avons donc :

$$\forall i\in\{1,...,n\},\quad p_i=P(A_i).$$

La probabilité qu'aucun de ces évènements ne se réalise est $P\left(\bigcap_{i=1}^n\overline{A_i}\right)$.

Or, les $A_1,...,A_n$ sont 2 à 2 indépendants, donc les $\overline{A_1},...,\overline{A_n}$ le sont également, et donc :

$$\pi_n=P\left(\bigcap_{i=1}^n\overline{A_i}\right)=\prod_{i=1}^n P\left(\overline{A_i}\right)=\prod_{i=1}^n(1-P\left(A_i\right))=\prod_{i=1}^n(1-p_i).$$

b) Supposons que les p_i ne sont pas tous différents de 1. Nous avons alors :

$$\pi_n = \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i) = 0$$

et comme exp est à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$,

$$\pi_n \leq \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} p_i\right).$$

On suppose désormais tous les p_i différents de 1. Nous avons alors, comme une probabilité est comprise entre 0 et 1 : $\forall i \in \{1, ..., n\}, \quad 1 - p_i > 0$. Et donc

$$\pi_n = \exp\left(\ln\left(\pi_n\right)\right) = \exp\left(\ln\left(\prod_{i=1}^{n}(1-p_i)\right)\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1-p_i\right)\right).$$

Or, nous avons $0 \leq p_i < 1$, donc : $-1 < -p_i \leq 0$, et, d'après l'exemple du paragraphe 6.3.2 : $\ln(1 - p_i) \leq -p_i$ puis en sommant les inégalités, il vient :

$$\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1-p_i\right) \leq -\sum_{i=1}^{n} p_i,$$

puis par croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$, il vient :

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1-p_i\right)\right) \leq \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} p_i\right),$$

d'où :

$$\pi_n \leq \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} p_i\right).$$

Exercice 286 (③) par Loïse Launay [*]

Soit p un élément de $]0;1[$. Une expérience aléatoire réussit avec la probabilité p. On la répète une infinité de fois, avec indépendance. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n la probabilité que l'expérience ait réussi au moins une fois lors des n premières répétitions.

a) On note N_p le plus petit n tel que $p_n \geq \dfrac{1}{2}$. Exprimer N_p.

b) Quelle est la limite de $p \mapsto pN_p$ lorsque p tend vers 0 ?

a) Par définition p_n est la probabilité que l'expérience ait réussi au moins une fois lors des n premières répétitions. Or, l'évènement contraire de « L'expérience a réussi au moins une fois lors des n premières répétitions »est « L'expérience n'a jamais réussi lors des n premières répétitions ». La probabilité de l'échec de l'expérience est égale à $1-p$. Comme les n expériences sont indépendantes, il vient :

$$p_n = 1 - (1-p)^n.$$

On cherche le plus petit entier N_p tel que $p_n \geq \dfrac{1}{2}$. On veut :

$$1 - (1-p)^n \geq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -(1-p)^n \geq -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad (1-p)^n \leq \frac{1}{2}.$$

Par composition par la fonction logarithme népérien strictement croissante sur $]0, +\infty[$, il vient :

$$\ln((1-p)^n) \leq \ln\left(\frac{1}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad n\ln(1-p) \leq -\ln(2).$$

Or p est un élément de $]0, 1[$, d'où :

$$1 - p < 1,$$

et par composition par la fonction logarithme népérien strictement croissante sur $]0,+\infty[$;

$$\ln(1-p) < 0.$$

La condition est donc :

$$n \geq -\frac{\ln(2)}{\ln(1-p)}.$$

Le plus petit entier vérifiant cette condition est :

$$N_p = \left\lceil -\frac{\ln(2)}{\ln(1-p)} \right\rceil,$$

où, pour $x \in \mathbb{R}$, $\lceil x \rceil$ est la partie entière supérieure de x, c'est-à-dire le plus petit entier supérieur ou égal à x.

b) On a

$$-\frac{\ln(2)}{\ln(1-p)} \leq N_p \leq \frac{\ln(2)}{\ln(1-p)} + 1,$$

donc

$$-p\frac{\ln(2)}{\ln(1-p)} \leq pN_p \leq -p\frac{\ln(2)}{\ln(1-p)} + p \tag{*}$$

On a

$$\forall p \in]0,1[, \quad \frac{p}{\ln(1-p)} = \frac{1}{\dfrac{\ln(1-p)-\ln(1)}{-p}}$$

On reconnaît au dénominateur l'expression du taux d'accroissement de la fonction logarithme népérien en 1. Or la fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0,+\infty[$ et donc en 1. D'où :

$$\lim_{p\to 0} \frac{\ln(1-p)-\ln(1)}{-p} = \ln'(1) = 1.$$

Par passage à l'inverse :

$$\lim_{p\to 0} \frac{1}{\dfrac{\ln(1-p)-\ln(1)}{-p}} = 1.$$

Les termes de gauche et de droite de l'encadrement $(*)$ tendent donc vers $\ln(2)$ lorsque $p \to 0$. D'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{p\to 0} pN_p = \ln(2).$$

Remarque : Si p est « proche » de 0, N_p est donc approximativement

$$\frac{\ln(2)}{p} \simeq \frac{0,693}{p}.$$

Exercice 287 (③) par Maorine Pereira [*]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une expérience aléatoire peut produire n résultats distincts notés $1, ..., n$, de probabilités respectives $p_1, ..., p_n$. On la répète deux fois de manière indépendante. On note p la probabilité que les deux résultats soient égaux.

a) Exprimer p en fonction des p_i, $1 \leq i \leq n$.

b) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz de **3.4**, montrer que $p \geq \dfrac{1}{n}$. Caractériser le cas d'égalité.

a) Si $1 \leq i \leq n$, soit q_i la probabilité d'obtenir deux fois i. Par indépendance, $q_i = {p_i}^2$. Par incompatibilité,
la probabilité d'obtenir deux fois le même résultat est

$$p = \sum_{i=1}^{n} q_i = \sum_{i=1}^{n} {p_i}^2.$$

b) Voir le paragraphe **3.4** pour l'inégalité de Cauchy-Schwarz et son cas d'égalité.

On applique l'inégalité avec les p_i et $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{1}{\sqrt{n}}\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2}$$

$$\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\right|\left|\sum_{i=1}^{n} p_i\right| \leq \sqrt{p}\sqrt{n \times \frac{1}{n}}$$

La somme des p_i vaut 1. On passe l'inégalité au carré et obtient le résultat voulu :

$$\frac{1}{n} \times 1 \leq p.$$

Grâce au cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il y a égalité si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall i \in \{1, ..., n\}, \quad p_i = \lambda \times \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

De plus, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \quad \text{donc} \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda}{\sqrt{n}} = 1 \quad \text{donc} \quad \sqrt{n}\,\lambda = 1.$$

Ainsi, $p = \dfrac{1}{n}$ si et seulement si toutes les p_i valent $\dfrac{1}{n}$.

Exercice 288 (①) par Loïse Launay [*]

On lance deux dés non pipés, on note X la variable aléatoire donnant la somme des deux résultats. Donner la loi de X.

Notons X_1 et X_2 les variables aléatoires donnant les résultats des deux lancers, toutes deux uniformes sur $\{1, \ldots, 6\}$, que l'on suppose indépendantes. Alors $X = X_1 + X_2$. La variable aléatoire X est à valeurs dans $\{2, \ldots, 12\}$ et, si $2 \leq k \leq 12$, $P(X = k)$ est le quotient du nombre de couples (i, j) de $\{1, \ldots, 6\}^2$ tels que $i + j = k$ par 36.

La loi de probabilité de X est donnée par le tableau :

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

Exercice 289 (②) par Esteban Carbonnier

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $d \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$. Soit R la variable aléatoire égale au reste de la division euclidienne de X par d. Donner la loi de R.

Écrivons la division euclidienne de n par d : $n = qd + r$ où $q \in \mathbb{N}$, $r \in \{0, \ldots, d-1\}$.

La variable aléatoire R est à valeurs dans $\{0, \ldots, n-1\}$. Si $k \in \{0, \ldots, d-1\}$, l'événement $(R = k)$ est réunion **disjointe** :

- des événements $(X = \ell d + k)$, $0 \leq \ell \leq q$ si $k \leq r$;

- des événements $(X = \ell d + k)$, $0 \leq \ell \leq q - 1$ si $k > r$.

Ainsi

$$k \leq r \Rightarrow P(R = k) = \frac{q+1}{n} \quad \text{et} \quad k > r \Rightarrow P(R = k) = \frac{q}{n}.$$

Exercice 290 (③) par Samy Clementz [*]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se donne n variables aléatoires indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ suivant chacune la loi uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$. On note E_n l'événement «il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $X_i = 1$». Déterminer la probabilité p_n de E_n. Quelle est la limite de $(p_n)_{n \geq 1}$?

L'événement contraire de E_n est

$$\overline{E_n} = \bigcap_{i=1}^{n} (X_i \neq 1) .$$

On a donc, par indépendance des X_i,

$$\begin{aligned} P\left(\overline{E_n}\right) &= P(X_1 \neq 1, \ldots, X_n \neq 1) = P(X_1 \neq 1) \times \ldots \times P(X_n \neq 1) \\ &= P(X_1 \neq 1)^n = P(X_1 \in \{2, \ldots, n\})^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n . \end{aligned}$$

Puis :

$$p_n = P(E_n) = 1 - P(\overline{E_n}) = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n ,$$

qui tend vers $1 - e^{-1}$ quand n tend vers l'infini. En effet, classiquement (poly, **5.2**)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \longrightarrow e^x.$$

Exercice 291 (②) par Samy Clementz [*]

a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{1, \ldots, n\}$, $S = \max(X, Y)$. Pour $1 \leq k \leq n$, exprimer $P(S \leq k)$ en fonction de $P(X \leq k)$ et $P(Y \leq k)$. En déduire la loi de S.

b) Expliciter la loi de S si X et Y suivent toutes deux la loi uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$.

a) La variable aléatoire S est à valeurs dans $\{1, \ldots, n\}$. L'observation fondamentale est la suivante. Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$.

$$S \leq k \qquad \Leftrightarrow \quad \max(X, Y) \leq k \quad \Leftrightarrow \quad X \leq k \text{ et } Y \leq k.$$

D'où, puisque X et Y sont indépendantes,

$$P(S \leq k) = P(X \leq k \cap Y \leq k) = P(X \leq k)\, P(Y \leq k).$$

Notons que cette relation est vraie aussi pour $k = 0$. Remarquons que

$$(S = k) = (S \leq k) \setminus (S \leq k - 1).$$

La loi de S est donc donnée par les égalités :

$$\begin{aligned} P(S = k) &= P(S \leq k) - P(S \leq k - 1) \\ &= P(X \leq k)P(Y \leq k) - P(X \leq k - 1)P(Y \leq k - 1). \end{aligned}$$

b) Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on a :

$$P(X \leq k) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n} = \frac{k}{n}.$$

Notons que cette égalité est aussi vraie pour $k = 0$. Donc

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}, \qquad P(S = k) = \left(\frac{k}{n}\right)^2 - \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 = \frac{2k - 1}{n^2}.$$

Exercice 292 (③) par Samy Clementz [*]

Soient n, n' et m trois éléments de $\mathbb{N}^*$ tels que $n' \leq n$ et $m \leq n$. On pose $E = \{1, \ldots, n\}$ et $E' = \{1, \ldots, n'\}$; du point de vue de la modélisation, E représente une population de n individus, E' une sous-population de n' individus. On choisit aléatoirement une partie F de E de cardinal m. On note X la variable aléatoire égale au cardinal de $F \cap E'$. Déterminer la loi de X.

Précisons les modalités du tirage. Quand l'énoncé dit que l'on choisit « aléatoirement »une partie de E de cardinal m, on supposera que cela sous-entend que les parties de E de cardinal m ont toutes autant de chances d'être tirées. Autrement dit, on munit l'ensemble des parties de E de cardinal m de la probabilité uniforme.

Tout découle du raisonnement suivant. Déjà, il est clair que X est compris entre 0 et m. Soit $k \in \{0, \ldots, m\}$. Choisir une partie F de E de cardinal m, et dont l'intersection avec E' est de cardinal k, revient à :

– choisir une partie de E' de cardinal k,

– puis choisir une partie de $E \setminus E'$ de cardinal $m - k$.

Il y a $\dbinom{n'}{k}$ parties de E' de cardinal k, et $\dbinom{n-n'}{m-k}$ parties de $E \setminus E'$ de cardinal $m - k$. Donc il y a

$$\binom{n'}{k}\binom{n-n'}{m-k}$$

choix différents pour F. Le nombre total de parties de E de cardinal m est $\binom{n}{m}$, donc la probabilité cherchée est :

$$P(X = k) = \frac{\binom{n'}{k}\binom{n-n'}{m-k}}{\binom{n}{m}}.$$

On remarque a posteriori que $X \in [\![\max(0, m - n + n'), \ldots, \min(n', m)]\!]$.

Exercice 293 (④) par Matilde Cruz (Problème des boîtes d'allumettes de Banach)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, ..., n\}$. Un mathématicien a deux boîtes de n allumettes, une dans chaque poche. Chaque fois qu'il fume, il choisit au hasard une poche avec probabilité $\frac{1}{2}$, jusqu'à se rendre compte que l'une des deux boîtes est vide. On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'allumettes restant dans l'autre boîte à cet instant. Déterminer la loi de X.

Notons P la variable aléatoire donnant la poche dans laquelle le mathématicien fait le dernier tirage (celui de la boîte vide). On suppose les triages indépendants. Dire que l'événement $(X = k, P = G)$ est réalisé, c'est donc dire :

- qu'il y a eu $2n - k + 1$ tirages, le dernier étant celui de la boîte vide (donc dans la poche gauche) ;

- que, parmi les $2n - k$ premiers tirages, n ont eu lieu dans la poche gauche, $n - k$ dans la poche droite.

Ainsi

$$P(X = k, P = G) = \frac{\binom{2n-k}{n}}{2^{2n-k+1}}.$$

La formule donnant $P(X = k, P = D)$ est analogue. Donc

$$P(X = k) = \frac{\binom{2n-k}{n}}{2^{2n-k}}.$$

Exercice 294 (④) par Tristan Hottier [*]

On se donne deux dés. Pour $1 \leq i \leq 6$, on note p_i (resp. q_i) la probabilité d'obtenir i en lançant le premier dé (resp. le second). Les lancers sont supposés indépendants. On note S la variable aléatoire donnant la somme des deux lancers.

a) Exprimer $\mathbb{P}(S=2)$ et $\mathbb{P}(S=12)$ en fonction de p_1, q_1, p_6 et q_6.

b) Exprimer $\mathbb{P}(S=7)$ en fonction de $p_1, \ldots, p_6$ et $q_1, \ldots, q_6$, puis montrer que

$$\mathbb{P}(S=7) \geq 2\sqrt{\mathbb{P}(S=1)\,\mathbb{P}(S=12)}$$

c) Montrer que S ne suit pas la loi uniforme sur $\{2, \ldots, 12\}$.

a) On a $S=2$ si et seulement si l'on obtient le chiffre 1 au premier et au deuxième lancer. Ainsi, par indépendance, $\mathbb{P}(S=2) = p_1 q_1$.
On a $S=12$ si et seulement si l'on obtient le chiffre 6 au premier et au deuxième lancer. Ainsi, par indépendance, $\mathbb{P}(S=12) = p_6 q_6$.

b) On note D_1 la valeur prise par le premier dé et D_2 celle prise par le second. On a alors $S = D_1 + D_2$ et

$$\begin{aligned}(S=7) = &((D_1=1)\cap(D_2=6)) \cup ((D_1=2)\cap(D_2=5)) \cup ((D_1=3)\cap(D_2=4)) \\ &\cup ((D_1=4)\cap(D_2=3)) \cup ((D_1=5)\cap(D_2=2)) \cup ((D_1=6)\cap(D_2=1))\end{aligned}$$

donc

$$\mathbb{P}(S=7) = p_1q_6 + p_2q_5 + p_3q_4 + p_4q_3 + p_5q_2 + p_6q_1$$

D'après les expressions de $\mathbb{P}(S=2)$ et $\mathbb{P}(S=12)$ obtenues ci-dessus, on établit que

$$\begin{aligned}2\sqrt{\mathbb{P}(S=2)\,\mathbb{P}(S=12)} &= 2\sqrt{p_1q_1p_6q_6} \\ &= 2\sqrt{p_1q_6}\sqrt{p_6q_1} \\ &\leq p_1q_6 + p_6q_1\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbb{P}(S=7) - 2\sqrt{\mathbb{P}(S=2)\,\mathbb{P}(S=12)} \geq p_2q_5 + p_3q_4 + p_4q_3 + p_5q_2 \geq 0$, et en particulier,

$$\mathbb{P}(S=7) \geq 2\sqrt{\mathbb{P}(S=2)\,\mathbb{P}(S=12)}$$

c) Si S suit la loi uniforme sur $\{2, \ldots, 12\}$ alors $\forall i \in \{2, \ldots, 12\}$, $\mathbb{P}(S=i) = \dfrac{1}{11}$.

Ceci contredit l'inégalité $\mathbb{P}(S=7) \geq 2\sqrt{\mathbb{P}(S=2)\,\mathbb{P}(S=12)}$, ce qui achève la démonstration.

9.2 Schéma binomial

Exercice 295 (②) par Loïse Launay [*]

Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 fois six en lançant 6 fois un dé équilibré ?

Chaque lancer de dé est une expérience aléatoire à deux issues formant une partition de l'univers dont le succès est « Obtenir un 6 » de probabilité égale à $\dfrac{1}{6}$. C'est une expérience de Bernoulli que l'on répète 6 fois de manière identique et indépendante. On reconnaît un schéma de Bernoulli. Le nombre X de succès suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(6, \dfrac{1}{6}\right)$.

La probabilité d'obtenir exactement 3 fois six en lançant 6 fois un dé équilibré s'écrit donc :

$$P(X=3) = \binom{6}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{4 \cdot 5^4}{6^6}.$$

On peut donner une valeur approchée arrondie au millième : $P(X=3) \approx 0{,}054$.

Exercice 296 (②) par Loïse Launay [*]

Un tireur a une chance sur deux d'atteindre une cible. Quelle est la probabilité de l'atteindre au moins trois fois en dix coups ?

Chaque tir est une expérience aléatoire à deux issues formant une partition de l'univers dont le succès est « La flèche atteint la cible » de probabilité égale à $\frac{1}{2}$. C'est une expérience de Bernoulli que l'on répète 10 fois de manière identique et indépendante. On reconnaît un schéma binomial. La loi de probabilité X qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(10,\ \frac{1}{2}\right)$.

La probabilité d'atteindre la cible au moins trois fois en dix coups s'écrit (à l'aide des évènements contraires pour simplifier l'expression) :

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2).$$

Soit :

$$P(X \geq 3) = 1 - \binom{10}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^8 - \binom{10}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^9 - \binom{10}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^{10}.$$

Soit :

$$P(X \geq 3) = 1 - \frac{90}{2^{11}} - \frac{10}{2^{10}} - \frac{1}{2^{10}}$$

On peut donner une valeur approchée arrondie au millième : $P(X \geq 3) \approx 0,945$.

Exercice 297 (②) par Loïse Launay [*]

Un comité de 9 personnes se réunit. Chaque participant est présent avec probabilité de $\frac{1}{2}$. Quelle est la probabilité qu'au moins 6 membres soient présents ?

Numérotons les personnes de 1 à 9. Si $1 \leq i \leq 9$. Soit X_i la variable de Bernoulli égale à 1 si la personne i est présente. Alors $X_1, \ldots, X_9$ sont des variables de Beroulli de paramètre $\frac{1}{2}$, qu'il est raisonnable de supposer indépendantes. Si $X = X_1 + \cdots + X_9$, X est le nombre de membres présents. La variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(9,\ \frac{1}{2}\right)$. La probabilité qu'au moins 6 membres soient présents s'écrit :

$$P(X \geq 6) = \sum_{k=6}^{9}\binom{9}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{9-k} = \frac{1}{2^9}(1+9+36+84) = \frac{130}{512},$$

dont une valeur approchée arrondie au millième est $0,254$.

Exercice 298 (②) par Loïse Launay [*]

On lance n fois un dé équilibré. On note X le nombre de 6 obtenu. Exprimer simplement $P(X \geq 2)$. On demande une expression ne faisant pas intervenir le symbole $\sum$.

Chaque lancer est une expérience aléatoire à deux issues formant une partition de l'univers dont le succès est « Obtenir un 6 » de probabilité égale à $\frac{1}{6}$. Les lancers étant indépendants, on reconnaît un schéma de Bernoulli. La loi de probabilité X qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n,\ \frac{1}{6}\right)$. On peut donc écrire :

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1).$$

Or,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \binom{n}{0} = 1 \quad et \quad \binom{n}{1} = n.$$

On en déduit donc

$$P(X \geq 2) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n - \frac{n}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}.$$

EXERCICE 299 (②) par Macéo Pereira [*]

Un livre de 500 pages contient 50 fautes d'impression réparties aléatoirement. Quelle est la probabilité qu'une page donnée comporte au moins deux erreurs ?

On cherche la probabilité qu'une page donnée, la page $k \in \{1, ..., 500\}$, comporte au moins deux erreurs. Chaque faute est répartie aléatoirement sur les 500 pages, de manière indépendante des autres fautes. Ainsi, la probabilité qu'une erreur donnée se trouve sur la k-ième page est de $p = \frac{1}{500}$. Soit X_k la variable aléatoire qui donne le nombre d'erreurs se trouvant sur la k-ième page. Alors X_k suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = \frac{1}{500}$. On a donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_k \geq 2) &= 1 - \mathbb{P}(Y = 0) - \mathbb{P}(Y = 1) \\ &= 1 - \binom{50}{0}\left(\frac{499}{500}\right)^{50} - \binom{50}{1}\frac{1}{500}\left(\frac{499}{500}\right)^{49} \\ &= \frac{500^{50} - 499^{50} - 50 \times 499^{49}}{500^{50}}.\end{aligned}$$

EXERCICE 300 (②) par Macéo Pereira [*]

Soit $p \in]0,1[$. On lance une pièce pipée, ayant la probabilité p de donner pile. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 3 piles en 5 lancers ? Au moins 5 piles en 8 lancers ?

Soit Y_n la variable aléatoire qui donne le nombre de piles après n lancers, $n \in \mathbb{N}^*$. Les lancers sont indépendants donc Y_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Donc la probabilité d'obtenir au moins 3 piles en $n = 5$ lancers est :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_5 \geq 3) &= \mathbb{P}(Y_5 = 3) + \mathbb{P}(Y_5 = 4) + \mathbb{P}(Y_5 = 5) \\ &= \binom{5}{3}p^3(1-p)^2 + \binom{5}{4}p^4(1-p) + \binom{5}{5}p^5,\end{aligned}$$

et la probabilité d'obtenir au moins 5 piles en $n = 8$ lancers est :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_8 \geq 5) &= \mathbb{P}(Y_8 = 5) + \mathbb{P}(Y_8 = 6) + \mathbb{P}(Y_8 = 7) + \mathbb{P}(Y_8 = 8) \\ &= \binom{8}{5}p^5(1-p)^3 + \binom{8}{6}p^6(1-p)^2 + \binom{8}{7}p^7(1-p) + \binom{8}{8}p^8.\end{aligned}$$

EXERCICE 301 (③) par Wéline Pujol [*]

Soient n et n' deux éléments de $\mathbb{N}^*$ tels que $n' \leq n$. On note $E = \{1, ..., n\}$, $E' = \{1, ..., n'\}$. Effectuons n tirages dans E avec remise, de sorte que chaque élément de E ait la probabilité $\frac{1}{n}$ d'être tiré et que les tirages soient indépendants. Soit X le nombre de tirages ayant donné un élément de E'. Quelle est la loi de X ?

Soit, si $1 \leq i \leq n$, X_i la variable de Bernoulli égale à 1 si le i-ème tirage donne un élément de E'. Les variables aléatoires X_i sont indépendantes, et, si $1 \leq i \leq n$,

$$P(X_i = 1) = \frac{|E'|}{|E|} = \frac{n'}{n}.$$

On a $X = X_1 + \cdots + X_n$. La variable aléatoire X suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{n'}{n}\right)$.

EXERCICE 302 (③) par Wéline Pujol [*]

Une population de n élèves passe un examen constitué de deux épreuves indépendantes. La probabilité de réussite à la première (resp. deuxième) est p_1 (resp. p_2). Les deux épreuves donnent des résultats indépendants. Quelle est la loi de la variable aléatoire X donnant le nombre de candidats ayant réussi les deux épreuves ? On pourra écrire X comme somme de variables de Bernoulli indépendantes.

Numérotons les élèves de 1 à n. Si $1 \leq i \leq n$, soit X_i la variable de Bernoulli égale à 1 si l'élève i a réussi les deux épreuves. Puisque les résultats des deux épreuves sont indépendants, X_i a pour paramètre p_1p_2. Par définition, $X = X_1 + \cdots + X_n$, donc X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_1p_2)$.

EXERCICE 303 (③) par Loïse Launay [*]

Soit $p \in [0, 1]$. Un système de communication comporte un certain nombre n de composants. Chaque composant fonctionne avec la probabilité p, indépendamment des autres. Le système fonctionne si au moins la moitié des composants sont opérationnels.

a) Quelle est la loi du nombre de composants opérationnels ?
b) Si $k \in \mathbb{N}^*$, on note π_k la probabilité pour qu'un système ayant exactement $2k-1$ composants fonctionne. Exprimer $\pi_{k+1} - \pi_k$.
c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. À quelle condition sur p a-t-on $\pi_{k+1} \geq \pi_k$?

a) Numérotons les composants de 1 à n. Si $1 \leq i \leq n$, soit X_i la variable de Bernoulli égale à 1 si le $i$ème composant fonctionne. Le nombre de composants opérationnels est $X = X_1 + \cdots + X_n$. C'est une somme de variables de Bernoulli de paramètre p indépendantes, elle suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.
b) On cherche à exprimer $\pi_{k+1} - \pi_k$. Après quelques recherches, on comprend aisément qu'une écriture avec une différence de sommes n'est pas l'idéal :

$$\pi_{k+1} - \pi_k = \sum_{i=k+1}^{2k+1} \binom{2k+1}{i} p^i (1-p)^{(2k+1-i)} - \sum_{i=k}^{2k-1} \binom{2k-1}{i} p^i (1-p)^{(2k-1-i)}.$$

Raisonnons alors par disjonction des cas pour connaître π_{k+1}, la probabilité qu'un système ayant exactement $2k+1$ composants fonctionne. On scinde ce système en 2 (comme les probabilités sont indépendantes) : un système de 2 composants et un système de $2k-1$ composants. Ce choix est expliqué par la définition de π_k. On écarte le cas où le système de $2k-1$ composants admet strictement moins de $k-1$ composants fonctionnels qui ne permettrait pas d'atteindre la moitié des $2k+1$ composants opérationnels. Trois cas sont alors possibles :

(1) Le système de $2k-1$ composants possède au moins $k+1$ composants opérationnels. Ainsi, l'état des deux autres composants n'a pas d'importance. La probabilité de cet évènement est donc égale à $P(X_{2k-1} \geq k+1)$.
(2) Le système de $2k-1$ composants possède exactement k composants opérationnels. Dans le système de 2 composants, au moins un des deux doit être fonctionnel. La probabilité de cet évènement est donc égale à $P(X_{2k-1} = k)(2p(1-p) + p^2)$.
(3) Le système de $2k-1$ composants possède exactement $k-1$ composants opérationnels. Dans le système de 2 composants, les deux composants doivent être fonctionnels. La probabilité de cet évènement est donc égale à $P(X_{2k-1} = k-1)(p^2)$.

D'après le principe additif, on en déduit la probabilité π_{k+1} :

$$\pi_{k+1} = P(X_{2k-1} \geq k+1) + P(X_{2k-1} = k)(2p(1-p) + p^2) + P(X_{2k-1} = k-1)(p^2).$$

Par définition de π_k, on sait que

$$\pi_k = P(X_{2k-1} \geq k) = P(X_{2k-1} = k) + P(X_{2k-1} \geq k+1).$$

Ainsi :

$$\pi_{k+1} = (\pi_k - P(X_{2k-1} = k)) + P(X_{2k-1} = k)(2p(1-p) + p^2) + P(X_{2k-1} = k-1)(p^2)$$

Soit :

$$\pi_{k+1} = \pi_k - P(X_{2k-1} = k)(1-p)^2 + P(X_{2k-1} = k-1)(p^2).$$

Ensuite, comme X suit une loi binomiale, il vient :

$$\pi_{k+1} = \pi_k - \binom{2k-1}{k} p^k (1-p)^{k-1}(1-p)^2 + \binom{2k-1}{k-1} p^{k-1}(1-p)^k p^2.$$

Soit :

$$\pi_{k+1} = \pi_k - \binom{2k-1}{k} p^k (1-p)^{k+1} + \binom{2k-1}{k-1} p^{k+1}(1-p)^k.$$

D'après la propriété de symétrie des coefficients binomiaux, on a :

$$\binom{2k-1}{k-1} = \binom{2k-1}{k},$$

d'où, après factorisation, il vient :

$$\pi_{k+1} = \pi_k + \binom{2k-1}{k} p^k (1-p)^k (p - (1-p)) = \pi_k + \binom{2k-1}{k} p^k (1-p)^k (2p-1).$$

D'où

$$\pi_{k+1} - \pi_k = \binom{2k-1}{k} p^k (1-p)^k (2p-1).$$

c) Soit $k \in \mathbb{N}$, on cherche une condition sur $p \in]0,1[$, pour que $\pi_{k+1} \geq \pi_k$. On a

$$\pi_{k+1} \geq \pi_k \quad \Leftrightarrow \binom{}{2k-1} k p^k (1-p)^k (2p-1) \geq 0.$$

Or, par définition, un coefficient binomial est un entier positif, d'où

$$\binom{2k-1}{k} > 0.$$

Cette condition est vérifiée si $p = 0$ ou si $p \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

EXERCICE 304 (③) par Matilde Cruz
On reprend les notations de l'exercice précédent. On considère deux appareils, l'un ayant deux composants, l'autre quatre. On suppose que les deux appareils ont la même probabilité de fonctionner. Déterminer p, puis la probabilité commune de fonctionnement.

Commençons par le premier appareil.
Comme l'on a vu lors de l'exercice précédent, la loi du nombre de composants opérationnels suit une loi binomiale de paramètres 2 et p : $\mathcal{B}_1(2,p)$.
Ici, l'appareil est composé uniquement par 2 composants, il n'est donc pas opérationnel que lorsque aucun des composants ne fonctionne.
La probabilité qu'il fonctionne s'exprime donc ainsi :

$$P_{fonctionnement1} = 1 - P_1(X = 0)$$

Passons maintenant au deuxième appareil.
Toujours avec l'exercice précédent, on peut affirmer que la loi du nombre de composants opérationnels suit une loi binomiale de paramètre 4 et p : $\mathcal{B}_2(4,p)$.
Ici, l'appareil est composé de 4 composants, il n'est pas opérationnel lorsque aucun des composants ne fonctionne ou lorsque seulement un seul fonctionne.
La probabilité de fonctionnement s'exprime donc ainsi :

$$P_{fonctionnement2} = 1 - P_2(X \leq 1)$$

L'énoncé nous indique que les deux appareils ont la même probabilité de fonctionnement, ainsi :

$$\begin{aligned}
&P_{fonctionnement1} = P_{fonctionnement2}\\
&\Leftrightarrow 1 - P_1(X=0) = 1 - P_2(X \leq 1)\\
&\Leftrightarrow P_1(X=0) = P_2(X \leq 1)
\end{aligned}$$

Cette égalité nous permet de trouver p :

$$\begin{aligned}
&P_1(X=0) = P_2(X \leq 1)\\
&\Leftrightarrow P_1(X=0) = P_2(X=0) + P_2(X=1)\\
&\Leftrightarrow \binom{2}{0} \cdot p^0(1-p)^2 = \binom{4}{0}p^0(1-p)^4 + \binom{4}{1}p^1(1-p)^3\\
&\Leftrightarrow (1-p)^2 = (1-p)^4 + 4p(1-p)^3\\
&\Leftrightarrow (1-p)^4 + 4p(1-p)^3 - (1-p)^2 = 0\\
&\Leftrightarrow (1-p)^2((1-p)^2 + 4p(1-p) - 1) = 0\\
&\Leftrightarrow (1-p)^2(p^2 - 2p + 1 + 4p - 4p^2 - 1) = 0\\
&\Leftrightarrow (1-p)^2(2p - 3p^2) = 0\\
&\Leftrightarrow (1-p)^2[p(2-3p)] = 0\\
&\Leftrightarrow S = \{0, \frac{2}{3}, 1\}
\end{aligned}$$

Si $p = 0$, il semble évident que les deux appareils aient la même probabilité de fonctionnement puisque si aucun des composants ne fonctionne, l'appareil ne fcontionnera pas non plus, elle est ainsi nulle.
Si $p = 1$, il semble évident aussi que les deux appareils aient la même probabilité de fonctionnement puisque si tous les composants fonctionnent, l'appareil fonctionnera aussi, elle vaut ainsi 1.
Si $p = \frac{2}{3}$, la probabilité de fonctionnement sera égale à $1 - P_1(X=0)$ soit $1 - (\frac{2}{3})^2 = \frac{5}{9}$.

Exercice 305 (③) par Lancelot Achour [$*$]

Soient $p \in]0,1[$, $n \in \mathbb{N}^*$, X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(b, p)$.

a) Pour k dans $\{0, \dots, n-1\}$, donner une expression simplifiée de

$$u_k = \frac{\mathbb{P}(X = k+1)}{\mathbb{P}(X = k)}.$$

b) À quelle condition le quotient précédent est-il supérieur à 1 ?

c) Quelles sont la ou les valeurs de k maximisant $\mathbb{P}(X = k)$? Expliciter le cas $p = \frac{1}{2}$.

d) Quelle est l'allure de l'histogramme de X ?

---

a) On a

$$\begin{aligned}
u_k = \frac{\binom{n}{k+1}p^{k+1}(1-p)^{n-k-1}}{\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}} &= \frac{p}{1-p}\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}\frac{k!(n-k)!}{n!}\\
&= \frac{n-k}{k+1}\frac{p}{1-p}.
\end{aligned}$$

b) Soit $k \in [\![0; n-1]\!]$. On a :

$$u_k \geq 1 \iff \frac{n-k}{k+1} \geq \frac{1-p}{p} \iff n - k \geq (k+1)\frac{1-p}{p} \iff np - 1 + p \geq k.$$

Si $np - 1 + p$ n'est pas entier, il y a une unique valeur de k maximisant $P(X = k)$, c'est $\lfloor np - 1 + p \rfloor$. Sinon, il y a deux telles valeurs, $np - 1 + p$ et $np - p$.

Supposons $p = \frac{1}{2}$. Si n est pair, on écrit $n = 2m$ et la seule valeur maximisant $P(X = k)$ est $k = m$. Si n est impair, on écrit $n = 2m + 1$ et il y a deux valeurs maximisant $P(X = k)$, qui sont $k = m$ et $k = m + 1$.

c) L'histogramme est donc unimodal (d'abord croissant, puis décroissant).

Exercice 306 (④) par Lancelot Achour [$*$]

Soient $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $(\lambda)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$ convergeant vers λ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, X_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et $\frac{\lambda_n}{n}$. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

On pourra utiliser la limite établie en **5.2** et l'exercice 130 de **5.3**.

Par hypothèse, on a que :

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n}{k}\frac{\lambda^k}{n^k}\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}.$$

Observons que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\binom{n}{k}}{n^k} = \frac{1}{k!} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \lambda_n^k = \lambda^k.$$

Remarquons que :

$$\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} = \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{-k}\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n},$$

et que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{k} = 1.$$

Pour conclure, il reste alors à montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n} = e^{-\lambda},$$

ce qui est le cas d'après le complément de **5.2**. On a bien :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \lim_{n\to+\infty} \binom{n}{k}\frac{\lambda^k}{n^k}\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},$$

ce qui était attendu.

Exercice 307 (②) par Lancelot Achour [$*$]

Soient $p \in]0,1[$, $n \in \mathbb{N}^*$. Une expérience a la probabilité p de réussir. On la répète n fois de manière indépendante. Autrement dit, on se donne n variables aléatoires indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ suivant la loi de Bernoulli de paramètre p. On note T la variable aléatoire définie de la façon suivante (premier instant de succès) :

– si l'ensemble $\{i \in \{1, \ldots, n\},\ X_n = 1\}$ n'est pas vide, T est le plus petit élément de cet ensemble donc

$$(T = k) = (X_1 = \cdots = X_{k-1} = 0, X_n = 1),$$

– sinon $T = +\infty$.

Quelle est la loi de T ?

La variable aléatoire T prend ses valeurs dans $\{1, \ldots, n\} \cup \{+\infty\}$. Si $1 \leq k \leq n$, on a l'égalité d'événements

$$(T = k) = (X_1 = \cdots = X_{k-1} = 0, X_k = 1).$$

Par indépendance des X_i, il vient

$$P(T = k) = (1-p)^{k-1}p.$$

Par ailleurs

$$(T = +\infty) = (X_1 = \cdots = X_n = 0),$$

d'où, toujours par indépendance des X_i,

$$P(T = +\infty) = (1-p)^n.$$

La loi obtenue est une *loi géométrique finie*. La loi géométrique de paramètre p est celle de l'instant du premier succès dans une suite *infinie* d'épreuves de Bernoulli de paramètre p indépendantes.

EXERCICE 308 (④) par Victor Llorca[*]

On joue à pile ou face avec une pièce ayant la probabilité $p \in]0,1[$ de donner pile. On se donne a et b dans $\mathbb{N}$ non tous deux nuls et une séquence S de $\ell = a+b$ éléments de $\{P, F\}$, contenant a lettres P et b lettres F.

a) Soit m dans $\mathbb{N}^*$. On lance $m\ell$ fois la pièce. Montrer que la probabilité que la séquence S n'apparaisse pas est inférieure ou égale à $(1-p^aq^b)^m$.

b) Soit $m \geq \ell$ un entier. On lance n fois la pièce. Montrer que la probabilité que la séquence S n'apparaisse pas est inférieure ou égale à $(1-p^aq^b)^{\lfloor n/\ell \rfloor}$. Quelle est la limite de cette suite lorsque n tend vers $+\infty$?

a) Notons $X_1, \ldots, X_{m\ell}$ les résultats des lancers. Les variables aléatoires X_i sont indépendantes, à valeurs dans $\{P, F\}$, avec, pour tout $i \in \{1, \ldots, m\ell\}$,

$$P(X_i = P) = p \quad \text{et} \quad P(X_i = F) = 1-p.$$

Découpons $(X_1, \ldots, X_{m\ell})$ en m blocs de longueur ℓ, à savoir les $B_k = (X_{k\ell+1}, \cdots, X_{(k+1)\ell})$ pour $0 \leq k \leq m-1$. L'événement E : « la séquence S n'apparait pas dans la suite $X_1, \ldots, X_{m\ell}$ » est contenu dans

$$E' = \bigcap_{k=0}^{m-1} (B_k \neq S).$$

Comme S comporte a termes égaux à P et b égaux à F, chaque événement $(B_k = S)$ a pour probabilité p^aq^b et chaque événement $(B_k \neq S)$ a pour probabilité $1-p^aq^b$. De plus, les événements $B_k \neq S$ sont indépendants (ils dépendent de jeux de variables X_j disjoints, et les X_j sont indépendantes, et c'est la raison essentielle de leur introduction). Donc

$$P(E') = (1-p^aq^b)^m,$$

d'où le résultat puisque

$$P(E) \leq P(E').$$

b) Notons $X_1, \ldots, X_n$ les résultats des lancers, $m = \left\lfloor \frac{n}{\ell} \right\rfloor$. Alors $m\ell \leq n$ et, en reprenant les notations ci-dessus, l'événement F : « la séquence S n'apparait pas dans la suite $X_1, \ldots, X_n$ » est contenu dans E. Ainsi, grâce à la question a) :

$$P(F) \leq (1-p^aq^b)^m,$$

qui est le résultat désiré.

Puisque $0 < p < 1$ et $0 < q < 1$, on a $0 < 1-p^aq^b < 1$. Dès lors, la suite $\left(1-p^aq^b)^m\right)_{m \geq 0}$ est une suite géométrique de raison comprise entre 0 et 1, et tend donc vers 0.

Or, avec les notations précédentes, $m \geq \dfrac{n}{\ell} - 1$, donc m tend vers l'infini avec n, ce qui permet de conclure.

Exercice 309 (④) Par Lancelot Achour[*]

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit p_n la probabilité de n'avoir jamais observé deux piles consécutifs en lançant n fois une pièce équilibrée.

1. Calculer p_1 et p_2.
2. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_{n+2} = \frac{p_{n+1}}{2} + \frac{p_n}{4}.$$
3. Résoudre l'équation $x^2 = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$. On notera λ la racine positive, μ la racine négative.
4. En utilisant l'exercice 11 de **1.3**, déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des suites réelles $(u_n)_{n\geq 0}$ telles que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+2} = \frac{u_{n+1}}{2} + \frac{u_n}{4}.$$
5. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer p_n en fonction de n.

1. On a $p_1 = 1$ et $p_2 = \frac{1}{2}$.
2. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, E_n l'ensemble des suites $(X_1, \ldots, X_n)$ où chaque X_i vaut pile (P) ou face (F) et où, pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $(X_i, X_{i+1}) \neq (P, P)$.
Soit $(X_1, \ldots, X_{n+2}) \in E_{n+2}$. Deux cas sont possibles.
- On a $X_{n+2} = F$. Alors $(X_1, \ldots, X_{n+1}) \in E_{n+1}$.
Réciproquement, si $(X_1, \ldots, X_{n+1}) \in E_{n+1}$, alors $(X_1, \ldots, X_{n+1}, F)$ est dans E_{n+2}. Il y a donc $|E_{n+1}|$ suites de ce type.
- On a $X_{n+2} = P$ et $X_{n+1} = F$. Alors $(X_1, \ldots, X_n) \in E_n$.
Réciproquement, si $(X_1, \ldots, X_n) \in E_n$, alors $(X_1, \ldots, X_n, F, P)$ est dans E_{n+2}. Il y a donc $|E_n|$ suites de ce type.
Ainsi, $|E_{n+2}| = |E_{n+1}| + |E_n|$. Par ailleurs,
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad p_k = \frac{[E_k|}{2^k}.$$
Par conqéquent, si $n \in \mathbb{N}^*$,
$$p_{n+2} = \frac{|E_{n+1}[+|E_n|}{4} = \frac{p_{n+1}}{2} + \frac{p_n}{2}.$$
3. Les racines du polynôme.
$$X^2 - \frac{X}{2} - \frac{1}{4}$$
sont :
$$\lambda = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} \quad \text{ et } \quad \mu = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}.$$
4. Grâce à l'exercice 11, l'ensemble des suites vérifiant la relation,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+2} = \frac{u_{n+1}}{2} + \frac{u_n}{4},$$
n'est autre que
$$\mathcal{E} := \{\alpha\lambda^n + \beta\mu^n : \ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}.$$
5. Il nous reste à résoudre le système :
$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha\lambda + \beta\mu = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$
qui revient à
$$\alpha + \beta = 1 \quad \text{et} \quad \alpha(\lambda - \mu) = \frac{1}{2} - \mu,$$
soit à

$$\alpha = \frac{2\lambda}{\sqrt{5}} = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{5-\sqrt{5}}{10}.$$

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = \frac{1}{10}(5+\sqrt{5})\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^n + \frac{1}{10}(5-\sqrt{5})\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^n.$$

Exercice 310 (④) par Lancelot Achour [*]

Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que

$$\forall k \in \{1,\dots,n\}, \quad \mathbb{P}(X_k = 1) = p, \quad \mathbb{P}(X_k = -1) = 1 - p =: q.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

a) Montrer que, si $n \in \mathbb{N}^*$, S_n est à valeurs dans l'ensemble des entiers relatifs de valeur absolue bornée par n et de même parité que n.

b) On suppose n pair : $n = 2\ell$, avec $\ell \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la loi de S_n est donnée par

$$\forall j \in \{-\ell,\dots,\ell\}, \quad \mathbb{P}(S_{2\ell} = 2j) = \binom{2\ell}{\ell+j} p^{\ell+j} q^{\ell-j}.$$

c) Les notations sont celles de b). Pour quelle valeur de p la probabilité $\mathbb{P}(S_{2\ell} = 0)$ est-elle maximale ?

d) Montrer que

$$\mathbb{P}(S_{2\ell} = 0) \leq (4pq)^\ell.$$

e) On suppose $p \neq \frac{1}{2}$. Montrer que $4pq < 1$, puis que

$$\mathbb{P}(S_{2\ell} = 0) \xrightarrow[\ell\to+\infty]{} 0.$$

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition,

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad -1 \leq X_k \leq 1.$$

En sommant k sur $[\![1,n]\!]$ il vient que :

$$-n \leq S_n \leq n, \quad \text{donc} \quad S_n \in \{k \in \mathbb{Z},\ |k| \leq n\}.$$

Posons alors :

$$a := \operatorname{Card}\{k \in [\![1;n]\!],\ X_k = 1\} \quad \text{et} \quad b := \operatorname{Card}\{k \in [\![1,n]\!],\ X_k = -1\},$$

de sorte que :

$$n = a + b \quad \text{et} \quad S_n = a - b.$$

Il s'ensuit que $S_n - n = 2b$ est pair ; les entiers S_n et n ont même parité.

b) La variable aléatoire S_n ne suit pas exactement une loi binomiale. Mais on va s'y ramener en transformant les X_k en variables de Bernoulli. Posons

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad Y_k := \frac{X_k + 1}{2}.$$

Alors les Y_k sont des variables de Bernoulli de paramètre p indépendantes. Posons donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S'_n := \sum_{k=1}^{n} Y_k.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, S'_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. De plus, si $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S'_n = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k - n\right) = \frac{S_n + n}{2}.$$

Ainsi, pour $\ell \in \mathbb{N}^*$ et $n = 2\ell$:

$$\forall j \in [\![-\ell, \ell]\!], \quad \mathbb{P}(S_{2\ell} = 2j) = \mathbb{P}\left(S'_n = \frac{2j+n}{2}\right) = \mathbb{P}(S'_n = \ell + j)$$
$$= \binom{n}{\ell+j} p^{\ell+j} q^{n-\ell-j} = \binom{2\ell}{\ell+j} p^{\ell+j} q^{\ell-j}$$

ce qu'il fallait obtenir.

c) La question précédente entraîne que :

$$\mathbb{P}(S_{2\ell} = 0) = \binom{2\ell}{\ell} p^\ell q^\ell = \binom{2\ell}{\ell} (p(1-p))^\ell,$$

qui est une fonction de p sur $[0,1]$. Puisque la fonction $x \longmapsto x^\ell$ est croissante, remarquons que cela revient à étudier le maximum de la fonction $f : p \in [01;1] \longmapsto p(1-p)$. Observons que f est dérivable, on calcule :

$$\forall p \in [0,1], \quad f'(p) = 1 - 2p,$$

qui est positive sur $[0,1/2]$ et négative sur $[1/2,1]$. Donc f admet un maximum en $1/2$ qui vaut $1/4$. La probabilité maximale de $\mathbb{P}(S_{2\ell} = 0)$ est atteinte pour $p = \dfrac{1}{2}$ et vaut

$$\binom{2\ell}{\ell}\left(\frac{1}{4}\right)^\ell.$$

d) Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$. À l'aide de l'exercice 63, on a que :

$$\binom{2\ell}{\ell} \leq 2^{2\ell} \quad \text{i.e.} \quad \binom{2\ell}{\ell} \leq 4^\ell.$$

(Notons que cette inégalité provient également de la question précédente, puisque $\binom{2\ell}{\ell}\left(\frac{1}{4}\right)^\ell$ apparaît comme une probabilité.)

En utilisant la question précédente, on a que :

$$\mathbb{P}(S_{2\ell} = 0) = \binom{2\ell}{\ell} p^\ell q^\ell = \binom{2\ell}{\ell} (p(1-p))^\ell \leq (4p(1-p))^\ell = (4pq)^\ell,$$

ce qui était attendu.

e) Puisque $p \neq \dfrac{1}{2}$, on a que $0 < 4pq < 1$. La suite géométrique $((4pq)^\ell)_{\ell \geq 1}$ converge donc vers 0. Or,

$$0 \leq \mathbb{P}(S_{2\ell} = 0) \leq (4pq)^\ell.$$

On conclut , grâce au théorème de convergence par encadrement, que :

$$\mathbb{P}(S_{2\ell} = 0) \xrightarrow[\ell \to +\infty]{} 0.$$

Exercice 311 (⑤) par Tristan Hottier [*]

On se place dans le cadre de l'exercice précédent, avec de plus $p = \dfrac{1}{2}$. Ainsi, $(X_k)_{k \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes telle que

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}, \quad \mathbb{P}(X_k = 1) = \mathbb{P}(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

a) En utilisant l'exercice 249 de **8.6**, montrer que

$$\mathbb{P}(S_{2\ell} = 0) \xrightarrow[\ell \to +\infty]{} 0.$$

b) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la question précédente et l'exercice 68 de **3.1** montrer que

$$\mathbb{P}(|S_{2\ell}| \leq m) \xrightarrow[\ell \to +\infty]{} 0.$$

a) On commence par rappeler que $n = 2\ell$. D'après l'exercice 249 de **8.6**,

$$\sqrt{n}\frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

De plus, on a la relation suivante

$$\forall j \in \{-\ell, \dots, \ell\}, \quad \mathbb{P}(S_{2\ell} = 2j) = \binom{2\ell}{\ell+j} p^{\ell+j} q^{\ell-j}$$

Ainsi, pour $p = \dfrac{1}{2}$ et $j = 0$:

$$\mathbb{P}(S_{2\ell} = 0) = \binom{2\ell}{\ell} p^{2\ell} = \frac{\binom{2\ell}{\ell}}{4^\ell} \leq \sqrt{\ell}\frac{\binom{2\ell}{\ell}}{4^\ell} \times \frac{1}{\sqrt{\ell}}.$$

La suite majorante est le produit d'une suite convergeant vers $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$ et d'une suite convergeant vers 0 ; elle converge donc vers 0. Comme $P(S_{2\ell} = 0) \geq 0$, on a, par théorème d'encadrement,

$$\mathbb{P}(S_{2\ell} = 0) \xrightarrow[\ell\to+\infty]{} 0.$$

b) D'après l'exercice 68, on a

$$\forall k \in \{0, \cdots, 2\ell\}, \qquad \binom{2\ell}{k} \leq \binom{2\ell}{\ell}.$$

D'autre part, si $k \in \mathbb{Z}$, $P(S_{2\ell} = k)$ est nul pour k impair et pour $|k| > 2\ell$, tandis que

$$\forall j \in \{-\ell, \dots, \ell\}, \quad \mathbb{P}(S_{2\ell} = 2j) = \frac{1}{4^\ell}\binom{2\ell}{\ell+j}.$$

Il en résulte que

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \qquad P(S_{2\ell} = k) \leq P(S_{2\ell} = 0).$$

Comme il y a $2m + 1$ entiers relatifs de valeur absolue majorée par m, ce ci implique que, si $2\ell \geq m$

$$P(|S_{2\ell}| \leq m) \leq (2m + 1)P(S_{2\ell} = 0).$$

Compte-tenu de la question a) et du théorème de majoration, on en déduit que

$$\mathbb{P}(|S_{2\ell}| \leq m) \xrightarrow[\ell\to+\infty]{} 0.$$

9.3 Espérance d'une variable aléatoire

EXERCICE 312 (①) par Lancelot Achour [∗]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer l'espérance d'une variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$, d'une variable aléatoire Y suivant la loi uniforme sur $\{1, 2, 4, \dots, 2^n\}$.

Par définition de l'espérance et de la loi uniforme, on a :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n+1}{2}.$$

De même :

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} 2^k = \frac{1}{n}(2^{n+1} - 1).$$

Exercice 313 (①) par Lancelot Achour [*]

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$, X une variable aléatoire à valeurs dans $[a, b]$. Montrer que $\mathbb{E}(X)$ appartient à $[a, b]$.

Par hypothèse, on a, pour tout $\omega \in \Omega$:

$$a \leq X(\omega) \leq b \quad \text{donc} \quad a\,\mathbb{P}(\{\omega\}) \leq X(\omega)\,\mathbb{P}(\{\omega\}) \leq b\,\mathbb{P}(\{\omega\}),$$

d'où en sommant :

$$a \sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) \leq \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\,\mathbb{P}(\{\omega\}) \leq b \sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}),$$

ce qui donne :

$$a \leq \mathbb{E}(X) \leq b,$$

donc $\mathbb{E}(X) \in [a, b]$.

Exercice 314 (③) par Lancelot Achour [*]

a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. En utilisant la dérivation, donner une expression simple de

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}.$$

b) Les notations sont celles de l'exercice 307. Calculer $\mathbb{E}(T)$.

a) On renvoie le lecteur à l'exercice 40, et on donne le résultat obtenu dans celui-ci :

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2.}$$

si $x \neq 1$.

b) Par définition de l'espérance :

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(T = k) = p \sum_{k=1}^{n} k(1-p)^{k-1},$$

ce qui est d'après a) :

$$\mathbb{E}(T) = \frac{n(1-p)^{n+1} - (n+1)(1-p)^n + 1}{p}.$$

Remarque. Lorsque n tend vers $+\infty$, cette quantité tend vers $\frac{1}{p}$, qui est l'espérance de la loi géométrique de paramètre p.

Exercice 315 (④) par Alexandre Paresy (Urne d'Ehrenfest : nombre moyen de boules dans la première urne).

On fixe un entier $a \geq 2$ et on se donne a boules numérotées de 1 à a réparties dans deux boîtes. On considére l'opération suivante. A chaque seconde à partir de l'instant 0, on choisit uniformément un entier de $[|1, a|]$ et on déplace la boule portant ce numéro d'une boîte dans l'autre. On suppose que les tirages effectués à des instants distincts sont indépendants. Si $n \in \mathbb{N}$, on note X_n le nombre de boules dnas la prmière urne à l'instant n et $Y_n = X_{n+1} - X_n$.

1. *Montrer, pour $n \in \mathbb{N}$,*

$$\boldsymbol{E}(Y_n) = 1 - \frac{2}{a} \cdot \boldsymbol{E}(X_n) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{E}(X_{n+1}) = (1 - \frac{2}{a}) \cdot \boldsymbol{E}(X_n) + 1$$

2. *En utilisant le protocole d'étude des suite arithmético-géométriques (**1.2**, exercice 3), exprimer $\boldsymbol{E}(X_n)$ en fonction de $\boldsymbol{E}(X_0)$, a et n. Déterminer la limite de $(\boldsymbol{E}(X_n))_{n\geq 1}$. Comment explique ce résultat ?*

a)

Par définition du jeu, pour tout entier naturel n et pour tout $k \in [|0, a|]$, on a :

$$\mathbf{P}(Y_n = 1 | X_n = k) = 1 - \frac{k}{a}$$

(Probabilité de tirer la $(n{+}1)$ième boule dans la 2ème urne sachant qu'il y en a k dans la 1ère) Et :

$$\mathbf{P}(Y_n = -1 | X_n = k) = \frac{k}{a}$$

(Probabilité de tirer la $(n{+}1)$ième boule dans la 1ème urne sachant qu'il y en a k dans la 1ère)

Ceci étant dit, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Y_n) &= P(Y_n = 1) - P(Y_n = -1) \\
&= \sum_{k=0}^{a} P(Y_n = 1 | X_n = k) \cdot P(X_n = k) - \sum_{k=0}^{a} P(Y_n = -1 | X_n = k) \cdot P(X_n = k) \\
&= \sum_{k=0}^{a} (1 - \frac{k}{a} - \frac{k}{a}) \cdot P(X_n = k) \\
&= \sum_{k=0}^{a} P(X_n = k) - \frac{2}{a} \sum_{k=0}^{a} k \cdot P(X_n = k) \\
\mathbf{E}(Y_n) &= 1 - \frac{2}{a} \cdot \mathbf{E}(X_n)
\end{aligned}$$

Comme $Y_n = X_{n+1} - X_n$ on en tire :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}(X_{n+1} - X_n) = 1 - \frac{2}{a} \cdot \mathbf{E}(X_n) \\
&\mathbf{E}(X_{n+1}) - \mathbf{E}(X_n) = 1 - \frac{2}{a} \cdot \mathbf{E}(X_n) \text{ linéarité de l'espérance} \\
&\mathbf{E}(X_{n+1}) = (1 - \frac{2}{a}) \cdot \mathbf{E}(X_n) + 1
\end{aligned}$$

b)

On a démontré à la question a) que la suite $(u_n)_{n \geq 0} = E(X_n)_{n \geq 0}$ est une suite arithmético-géométrique vérifiant la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = (1 - \frac{2}{a}) \cdot u_n + 1$$

On cherche un réel l tel que :

$$l = (1 - \frac{2}{a}) \cdot l + 1$$

$$donc \ l = \frac{a}{2}$$

La suite $(u_n - l)_{n \geq 0}$ est géométrique de raison $1 - \dfrac{2}{a}$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ u_n - l = (1 - \frac{2}{a})^n (u_0 - l)$$

C'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ \mathbf{E}(X_n) = (1 - \frac{2}{a})^n (\mathbf{E}(X_0) - \frac{a}{2}) + \frac{a}{2}$$

Comme $|1 - \frac{2}{a}| < 1$, on a :

$$(1 - \frac{2}{a})^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Donc :

$$\mathbf{E}(X) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{a}{2}$$

Ceci signifie que si l'on attend assez longtemps, il y aura en moyenne environ la moitié des boules situées dans la boîte de gauche.

EXERCICE 316 (③) par Lancelot Achour [*]

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

a) Justifier la relation

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X \geq .k+1)$$

b) On note n la plus grande valeur que prend X. Montrer que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X \geq k).$$

a) Il suffit de noter que l'événement $(X \geq k)$ est réunion disjointe de $(X = k)$ et de $(X \geq k+1)$, ce qui donne

$$\mathbb{P}(X \geq k) = \mathbb{P}(X \geq k+1) + \mathbb{P}(X = k),$$

d'où la relation désirée.

b) On utilise la question précédente pour faire apparaître une somme télescopique :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k) &= \sum_{k=1}^{n} k\left(\mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X \geq k+1)\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n} k\,\mathbb{P}(X \geq k) - \sum_{k=1}^{n} k\,\mathbb{P}(X \geq k+1),\end{aligned}$$

en décalant l'indice de la première somme (et en utilisant le fait que $\mathbb{P}(X \geq n+1) = 0$) :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\mathbb{P}(X \geq k+1) - \sum_{k=1}^{n} k\,\mathbb{P}(X \geq k+1) &= P(X \geq 1) + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X \geq k+1)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X \geq k+1),\end{aligned}$$

en décalant une nouvelle fois l'indice de la dernière somme on obtient que :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X \geq k),$$

ce qu'il fallait montrer.

EXERCICE 317 (③) par Théo Eghiazarian [*]

On reprend les notations de l'exercice 286 et on note U_n le nombre d'expériences ayant réussi à l'instant n. Calculer $\mathbb{E}(U_n)$ et exprimer N'_p, le plus petit n tel que $\mathbb{E}(U_n) \geq \frac{1}{2}$. Quelle est la limite de pN'_p lorsque p tend vers 0 ?

On réalise n expériences indépendantes ayant chacune une possibilité p d'aboutir à un succès. Donc, on a la variable aléatoire U_n qui suit la loi $B(n, p)$. Donc :

$$\forall k \in [\![0,\ n]\!],\quad P(U_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

On a alors, en utilisant le binôme,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(U_n) &= \sum_{k=1}^{n} kP(U_n = k) = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!}p^k(1-p)^{n-k} = np\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)} \\
&= np\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}p^k(1-p)^{(n-1)-k} = np(p+1-p)^{n-1} = np
\end{aligned}$$

D'où :

$$\mathbb{E}(U_n) = np.$$

Puis, on a $\mathbb{E}(U_n) \geq \dfrac{1}{2}$ si et seulement si $np \geq \dfrac{1}{2}$ si et seulement si $n \geq \dfrac{1}{2p}$, donc :

$$N'_p = \left\lfloor \frac{1}{2p} \right\rfloor + 1;$$

et, on a :

$$N'_p \xrightarrow[p\to 0]{} +\infty.$$

EXERCICE 318 (④) par Lancelot Achour [$*$]

Soient X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et $a \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

On écrit :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\substack{\omega\in\Omega \\ X(\omega)\geq a}} X(\omega)\mathbb{P}(\omega) + \sum_{\substack{\omega\in\Omega \\ X(\omega)< a}} X(\omega)\mathbb{P}(\omega).$$

Par conséquent, puisque X est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$,

$$\mathbb{E}(X) \geq \sum_{\substack{\omega\in\Omega \\ X(\omega)\geq a}} X(\omega)\mathbb{P}(\omega) \geq a \sum_{\substack{\omega\in\Omega \\ X(\omega)\geq a}} \mathbb{P}(\omega).$$

Observons alors que :

$$\sum_{\substack{\omega\in\Omega \\ X(\omega)\geq a}} \mathbb{P}(\omega) = \mathbb{P}(X \geq a).$$

Il suit donc que :

$$\mathbb{E}(X) \geq a\mathbb{P}(X \geq a),$$

c'est à dire :

$$\frac{\mathbb{E}(X)}{a} \geq \mathbb{P}(X \geq a),$$

et l'inégalité de Markov est démontrée.

EXERCICE 319 (④) par Lancelot Achour [$*$]

a) Soit X une variable aléatoire réelle. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz (**3.4**), montrer que

$$\mathbb{E}(X)^2 \leq \mathbb{E}(X^2).$$

b) Soit $x \in [-1, 1]$. Montrer qu'il existe une variable aléatoire réelle telle que

$$\mathbb{E}(X) = x \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(X^2) = 1.$$

On pourra considérer les variables aléatoires à valeurs dans $\{-1, 1\}$.

---

a) On écrit :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\sqrt{\mathbb{P}(\omega)}\sqrt{\mathbb{P}(\omega)},$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\left(\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\sqrt{\mathbb{P}(\omega)}\sqrt{\mathbb{P}(\omega)}\right)^2 \leq \left(\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)^2\mathbb{P}(\omega)\right)\left(\sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}(\omega)\right) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)^2\mathbb{P}(\omega),$$

ce qui est $\mathbb{E}(X)^2 \leq \mathbb{E}(X^2)$, ce qu'il fallait obtenir.

b) Soient $p \in [0,1]$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\{-1,1\}$ telle que

$$P(X=1) = p \quad \text{et} \quad P(X=-1) = 1-p.$$

On a $X^2 = 1$, donc $\mathbb{E}(X^2) = 1$ et

$$\mathbb{E}(X) = p - (1-p) = 2p - 1,$$

qui décrit $[-1,1]$ lorsque p décrit $[0,1]$.

9.4 La linéarité de l'espérance

Exercice 320 (②) Par Valentin [*]

Les notations sont celles de l'exercice 292. Déduire de l'exemple 1 l'espérance de X.

On avait pour $k \in [\![0,m]\!]$,

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{n'}{k}\binom{n-n'}{m-m'}}{\binom{n}{m}}.$$

Le calcul repose sur deux identités :

— pour $n \in \mathbb{N}^*, k \in [\![1,n]\!]$, on a

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}, \tag{4}$$

que l'on prouve en passant par l'écriture avec les factorielles ;

— pour $p, q \in \mathbb{N}$, $n \in [\![0, p+q]\!]$, on a

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{p}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}$$

dont la preuve concerne le premier point de l'exercice 415.

On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{n} k\,\mathbb{P}(X=k)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{\binom{n'}{k}\binom{n-n'}{m-m'}}{\binom{n}{m}} = \frac{1}{\binom{n}{m}}\sum_{k=1}^{n} k\binom{n'}{k}\binom{n-n'}{m-m'} = \frac{1}{\binom{n}{m}}\sum_{k=1}^{n} n'\binom{n'-1}{k-1}\binom{n-n'}{m-k}\\
&= \frac{n'}{\binom{n}{m}}\sum_{k=1}^{n}\binom{n'-1}{k-1}\binom{n-n'}{m-k} = \frac{n'}{\binom{n}{m}}\sum_{k=0}^{m-1}\binom{k}{n'-1}\binom{n-m'}{n-1-k}\\
&= \frac{n'}{\binom{n}{m}}\binom{n-1}{m-1} = \frac{n'm!\cancel{(n-m)!}(n-1)!}{n!(m-1)!\cancel{(n-m)!}} = \frac{n'm}{n}.
\end{aligned}$$

Exercice 321 (③) par Valentin [*]

Soient X une variable aléatoire, $n \in \mathbb{N}^*, X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et suivant la loi de X et

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

a) Exprimer $\mathbb{E}(S_n)$ en fonction de n et $\mathbb{E}(X)$.
b) Exprimer $\mathbb{E}(S_n^2)$ en fonction de n, $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(X^2)$.

a) Par linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k).$$

Puisque les $(X_k)_{1\leq k\leq n}$ suivent la loi de X,

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X) = n\,\mathbb{E}(X).$$

b) On a

$$\mathbb{E}(S_n^2) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{j=1}^{n} X_j\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{1\leq i,j\leq n} X_iX_j\right) = \sum_{1\leq i,j\leq n} \mathbb{E}(X_iX_j)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i^2) + \sum_{\substack{1\leq i,j\leq n\\ i\neq j}} \mathbb{E}(X_iX_j) = n\,\mathbb{E}(X_i^2) + \sum_{\substack{1\leq i,j\leq n\\ i\neq j}} \mathbb{E}(X_iX_j)$$

On a, par indépendance des X_i,

$$\sum_{\substack{1\leq i,j\leq n\\ i\neq j}} \mathbb{E}(X_iX_j) = \sum_{\substack{1\leq i,j\leq n\\ i\neq j}} \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j) = \sum_{\substack{1\leq i,j\leq n\\ i\neq j}} \mathbb{E}(X)^2 = n(n-1)\mathbb{E}(X)^2.$$

Donc

$$\mathbb{E}(S_n^2) = n\mathbb{E}(X^2) + n(n-1)\mathbb{E}(X)^2.$$

Exercice 322 (③) par Valentin [*]

On reprend les notations de l'exercice précédent.

a) On suppose $\mathbb{E}(X) = 0$. Montrer, en appliquant l'inégalité de Markov (exercice 318) à ${S_n}^2$ que, pour, $a \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$\mathbb{P}(|S_n|\geq a\sqrt{n}) \leq \frac{\mathbb{E}(X^2)}{a^2}.$$

b) On revient au cas général. En considérant $Y := X - \mathbb{E}(X)$, montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$\mathbb{P}(|S_n - n\mathbb{E}(X)|\geq a\sqrt{n}) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{a^2},$$

où $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.

a) On a ${S_n}^2$ donc par Markov, $\forall\varepsilon\geq 0$, $\mathbb{P}(S_n^2 \geq \varepsilon) \leq \dfrac{\mathbb{E}({S_n}^2)}{\varepsilon}$.

Alors, $\forall\varepsilon\geq 0$, $\mathbb{P}({S_n}^2 \geq \varepsilon) \leq \dfrac{n\mathbb{E}(X^2) + n(n-1)\mathbb{E}(X^2)}{\varepsilon}$ en posant $\varepsilon = a^2n$ avec $a \in \mathbb{R}^{*+}$:

$$\mathbb{P}({S_n}^2 \geq a^2n) \leq \frac{n\mathbb{E}(X^2)}{a^2n} = \frac{\mathbb{E}(X^2)}{a^2}.$$

Or, les événements $\big(S_n \geq a^2n\big)$ et $(|S_n|\geq a\sqrt{n})$ sont les mêmes, alors on retrouve bien :

$$\mathbb{P}(|S_n|\geq a\sqrt{n}) \leq \frac{\mathbb{E}(X^2)}{a^2}.$$

b) On applique Markov à la variable aléatoire positive $(S_n - n\mathbb{E}(X))^2$. Soit $\varepsilon \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}((S_n - n\mathbb{E}(X))^2 \geq \varepsilon) &\leq \frac{\mathbb{E}((S_n - n\mathbb{E}(X))^2)}{\varepsilon^2} \\
&\leq \frac{\mathbb{E}({S_n}^2) - 2n\mathbb{E}(S_n)\mathbb{E}(X) + n^2\mathbb{E}(X)^2}{\varepsilon^2} \\
&\leq \frac{n\mathbb{E}(X^2) + n(n-1)\mathbb{E}(X)^2 - 2n^2\mathbb{E}(X)^2 + n^2\mathbb{E}(X)^2}{\varepsilon^2} \\
&\leq \frac{n\mathbb{E}(X^2) - n\mathbb{E}(X)^2}{\varepsilon} = \frac{n\mathbb{V}(X)}{\varepsilon}
\end{aligned}$$

En posant $\varepsilon = a^2 n$, on a

$$\mathbb{P}(|S_n - n\mathbb{E}(X)| \geq a\sqrt{n}) = \mathbb{P}((S_n - n\mathbb{E}(X))^2 \geq a^2 n) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{a^2}.$$

EXERCICE 323 (④) par Valentin [*]

On considère une assemblée de n personnes. On ignore les années bissextiles. Sous l'hypothèse d'indépendance des dates d'anniversaire des personnes et d'équiprobabilité de la date de naissance de chaque personne, quelle est l'espérance du nombre de paires de personnes ayant le même anniversaire ? Pour $1 \leq i < j \leq n$, on introduira la variable aléatoire de Bernoulli $X_{i,j}$ égale à 1 si les personnes i et j ont même anniversaire.

On note $S_n = \displaystyle\sum_{1 \leq i < j \leq n} X_{i,j}$ la variable aléatoire donnant le nombre de paires de personnes ayant le même anniversaire. On a, par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} X_{i,j}\right) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{E}(X_{i,j}).$$

Les $X_{i,j}$ sont des variables de Bernoulli de paramètre $p = \dfrac{1}{365}$ (indépendance des dates d'anniversaire). Ainsi, :

$$\mathbb{E}(S_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{E}(X_{i,j}) = \frac{n(n-1)}{2} \times \frac{1}{365} = \frac{n(n-1)}{730}.$$

EXERCICE 324 (④) par Valentin [*]

Une population est formée de $2n$ individus répartis en n couples. Parmi ces $2n$ individus, m choisis aléatoirement et de manière équiprobable parmi la population initiale meurent. Quel est l'espérance du nombre de couples survivants ? Numérotant les couples de 1 à n, on introduira, si $1 \leq i \leq n$, la variable de Bernoulli X_i égale à 1 si le couple i survit.

La variable aléatoire $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ donne le nombre de couples survivants. Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(S_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i).$$

Comme les X_i ont la même loi que X_1, on a $\mathbb{E}(S_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = n\mathbb{E}(X_1)$. Dire que le couple 1 survit, c'est dire que les m morts font partie des $2n - 2$ autres individus. Ainsi,

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{\binom{2n-2}{m}}{\binom{2n}{m}},$$

d'où, puisque X_1 est une variable de Bernoulli,

$$\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{\binom{2n-2}{m}}{\binom{2n}{m}}.$$

Finalement,

$$\mathbb{E}(S_n) = n\,\frac{\binom{2n-2}{m}}{\binom{2n}{m}} = n\,\left(1-\frac{m}{2n}\right)\,\left(1-\frac{m}{2n-1}\right).$$

EXERCICE 325 (④) par Théo Eghiazarian [*]

Soit $n \geqslant 2$ un entier. Une entreprise suit la stratégie suivante pour recruter ses n employés. L'employé 1 fonde l'entreprise et recrute l'employé 2 ; l'un des deux employés 1 ou 2 recrute l'employé 3, l'un des trois employés $1, 2$ et 3 recrute l'employé 4 et ainsi de suite. On suppose que, si $1 \leqslant i \leqslant n-1$, chaque employé parmi $1, ..., i$ a la même probabilité de recruter l'employé $i+1$.

a) Si $1 \leqslant i \leqslant n$, quelle est la probabilité que l'employé i ne recrute personne ?

b) Soit N le nombre d'employés n'ayant recruté personne. Calculer $\mathbf{E}(N)$.

a) Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On note X_k, pour $k \in [\![i+1, n]\!]$, la variable aléatoire qui indique si l'employé k a été recruté ($X_k = 1$) par l'employé i ou non ($X_k = 0$).
On note également Y_i la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes recrutées par l'employé i ($Y_i = j$ si l'employé i a recruté j personnes).
L'employé i a une chance sur i de recruter l'employé $i+1$ (donc une probabilité de $1 - \dfrac{1}{i}$ de ne pas le recruter). On a donc :

$$(Y_i = 0) = (X_{i+1} = 0) \cap ... \cap (X_n = 0) = \bigcap_{k=i+1}^{n} (X_k = 0)\,,$$

et, pour $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbf{P}\,(X_k = 0) = 1 - \dfrac{1}{k-1} = \dfrac{k-2}{k-1}$. Les variables aléatoire $(X_k)_k$ sont indépendantes donc :

$$\mathbf{P}\,(Y_i = 0) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=i+1}^{n} (X_k = 0)\right) = \prod_{k=i+1}^{n} \mathbf{P}\,(X_k = 0) = \prod_{k=i+1}^{n} \frac{k-2}{k-1} = \frac{i-1}{n-1}.$$

b) On a $N(\Omega) = [\![1, n-1]\!]$. Pour $in\{1, \dots, n-1\}$, soit Z_i la variable aléatoire égale à 1 si l'employé i ne recrute personne, à 0 sinon. On a donc : $\mathbf{P}\,(Z_i = 1) = \dfrac{i-1}{n-1}$ et $N = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Z_i$.
Donc, par linéarité de l'espérance,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(N) = \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(Z_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}\,(Z_i = 1) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n-1} \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{1}{n-1} \times \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n}{2}\end{aligned}$$

EXERCICE 326 (④) par Lancelot Achour [*]

On se donne n boules numérotées de 1 à n, n urnes également numérotées de 1 à n. On place une boule dans chaque urne, les choix étant équiprobables. Quelle est l'espérance du nombre de boules placées dans l'urne portant leur numéro ? Pour $1 \leq i \leq n$, on introduira la variable de Bernoulli X_i égale à 1 si la boule i est placée dans l'urne i.

Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Observons que :

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{n} \quad \text{ et } \quad \mathbb{P}(X_i = 0) = \frac{n-1}{n},$$

donc

$$\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{n}.$$

Soit alors S_n la variable aléatoire égale au nombre de boules bien placées :

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Par linéarité de l'espérance, on a

$$\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1.$$

« En moyenne, une permutation aléatoire uniforme d'un ensemble fini non vide admet un point fixe. »

Exercice 327 (⑤) par Elliot Gampel

Soient $n \in \mathbb{N}^*, \sigma$ une permutation aléatoire de $\{1, ..., n\}$ suivant une loi uniforme sur l'ensemble des $n!$ permutations de $\{1, ..., n\}$.

Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on dit que σ admet un record en i si $\sigma(i)$ est strictement supérieur aux $i-1$ entiers $\sigma(1), ..., \sigma(i-1)$

a) Si $1 \leqslant i \leqslant n$, soit X_i la variable indicatrice de l'événement « σ admet un record en i ». Déterminer la loi de X_i

b) Soit N le nombre de records de σ. Calculer $\mathbf{E}(N)$.

a) Soit X_i la variable aléatoire telle que $X_i(\sigma) = 1$ si σ admet un record en i, $X_i(\sigma) = 0$ sinon.

On cherche $\mathbf{P}(X_i = 1)$. Pour chaque permutation σ de $[\![1, n]\!] \longrightarrow [\![1, n]\!]$ équiprobable, dénombrons à l'étape i le nombre de permutations qui atteignent un record. On a d'abord celles avec $\sigma(i) = n$ puis $\sigma(i) = n-1$ jusqu'à $\sigma(i) = i$, on ne peut avoir $\sigma(i) < i$ par principe des tiroirs.
On a donc pour une permutation σ tel que $\sigma(i) = k$ avec $i \leqslant k \leqslant n$, $\binom{k-1}{i-1}(i-1)!(n-i)!$ telles permutation.
En effet, on fixe d'abord k puis on choisit les $i-1$ entiers strictement inférieur à k, donc parmi $k-1$ entiers. Puis on peut les permuter (peu importe leur ordre, d'où le terme $(i-1)!$) et enfin on peut choisir les $(n-1)$ termes restants dans l'ordre qu'on veut, d'où le terme $(n-i)!$
On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Xi = 1) &= \frac{\text{Nb } \sigma \text{ qui admettent un record en } i}{\text{Nb total de } \sigma} \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{k=i}^{n} \binom{k-1}{i-1}(i-1)!(n-i)!}{n!} \\
&= \frac{(i-1)!(n-i)! \displaystyle\sum_{k=i}^{n} \binom{k-1}{i-1}}{n!} \\
&= \frac{(i-1)!(n-i)!\binom{n}{i}}{n!} \quad (*) \\
&= \frac{(i-1)!(n-1)! \dfrac{n!}{i!(n-i)!}}{n!} \\
&= \frac{(i-1)!}{i!} \\
&= \frac{1}{i}.
\end{aligned}$$

$(*)$: Car $\displaystyle\sum_{k=i}^{n} \binom{k-1}{i-1} = \binom{n}{i}$ (formule de la crosse de hockey)

b) On a alors, par linéarité de l'espérance :

$$\mathbf{E}(N) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} (0 \times \mathbf{P}(X_i = 0)) + 1 \times \mathbf{P}(X_i = 1) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X_i = 1) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = H_n.$$

Exercice 328 (⑤) par Tristan Hottier [*]

On reprend les notations de l'exercice 311. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note R_n le nombre de $k \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $S_k = 0$.

a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{E}(R_{2n}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k}.$$

b) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{E}(R_{2n}) = \frac{(2n+1)\binom{2n}{n}}{4^n} - 1.$$

c) En utilisant l'exercice 249 de **8.6**, déterminer la limite de la suite $\left(\frac{\mathbb{E}(R_{2n})}{\sqrt{2n}}\right)_{n\geq 1}$, puis celle de $\left(\frac{\mathbb{E}(R_n)}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$. Ainsi, en moyenne, la marche aléatoire revient à l'origine environ $c\sqrt{n}$ fois avant l'instant n, où $c > 0$ est déterminé dans cette question.

a) Si $1 \leq j \leq 2n$, soit Y_j la variable de Bernoulli indicatrice de l'événement $S_j = 0$. Le paramètre de Y_j est 0 si j est impair, $\frac{\binom{2k}{k}}{4^k}$ si j est pair égal à $2k$ (exercices 310, 311). Par définition,

$$R_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} Y_k.$$

Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(R_{2n}) = \sum_{k=1}^{2n} \mathbb{E}(Y_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k}.$$

Interprétation géométrique. On représente la marche aléatoire de façon naturelle par un schéma du type suivant.

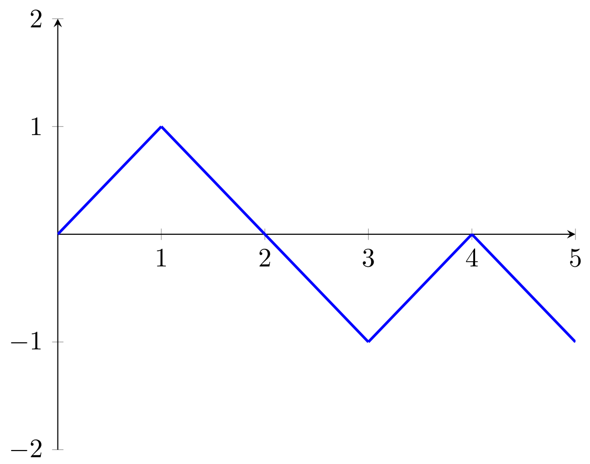


Figure 1 : marche aléatoire pour $n = 5$, $X_1 = X_4 = 1, X_2 = X_3 = X_5 = -1$.

On doit effectuer n pas vers le haut et n pas vers le bas pour atteindre 0 en $2n$ pas. Le nombre de chemins contenant n pas vers le haut dans ce cas est donc $\binom{2n}{n}$.

b) On démontre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}_n$ suivante

$$\mathcal{P}_n \ : \ \mathbb{E}(R_{2n}) = \frac{(2n+1)\binom{2n}{n}}{4^n} - 1$$

est vraie.
Initialisation :
On vérifie que $\mathcal{P}_1$ est vraie :

$$\mathbb{E}(R_2) = \frac{\binom{2}{1}}{4} = \frac{1}{2}$$

et

$$\frac{(2+1)\binom{2}{1}}{4} - 1 = \frac{4+2-4}{4} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, $\mathcal{P}_1$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Établissons $\mathcal{P}_{n+1}$. Calculons :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} &= \frac{(2n+1)\binom{2n}{n}}{4^n} - 1\\ \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} &= \frac{(2n+1)\binom{2n}{n}}{4^n} - 1 + \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{4^{n+1}}\end{aligned}$$

Il s'agit alors de démontrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{(2n+3)\binom{2n+2}{n+1}}{4^{n+1}} = \frac{(2n+1)\binom{2n}{n}}{4^n} + \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{4^{n+1}}.$$

On part du second membre, et on note que

$$(2n+1)\binom{2n}{n} = \frac{(2n+1)!}{n!^2} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} \times \frac{(n+1)^2}{2n+2} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} \times \frac{n+1}{2} = \binom{2n+2}{n+1} \times \frac{n+1}{2}.$$

Il s'ensuit que

$$\frac{(2n+1)\binom{2n}{n}}{4^n} + \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{4^{n+1}} = \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{4^{n+1}}(2(n+1)+1) = \frac{(2n+3)\binom{2n+2}{n+1}}{4^{n+1}}.$$

La propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est donc vraie, ce qui achève la récurrence.

c) On rappelle la conclusion de l'exercice 249 de **8.6** :

$$\sqrt{n}\,\frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{E}(R_{2n})}{\sqrt{2n}} &= \frac{2n+1}{\sqrt{2n}} \times \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} - \frac{1}{\sqrt{2n}} = \frac{2n+1}{n\sqrt{2}} \times \sqrt{n}\frac{\binom{2n}{n}}{4^n} - \frac{1}{\sqrt{2n}}\\ &= \sqrt{2}\left(\frac{1+\frac{1}{2n}}{1}\right) \times \sqrt{n}\frac{\binom{2n}{n}}{4^n} - \frac{1}{\sqrt{2n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\end{aligned}$$

Soient maintenant $n \geq 2$ un entier et $m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ dans $\mathbb{N}^*$. On a $2m \leq n \leq 2m+1$. Puisque $S_{2m+1} \neq 0$, on a $R_n = R_{2m}$ et donc

$$\frac{\mathbb{E}(R_{2m})}{\sqrt{2m+1}} \leq \frac{\mathbb{E}(R_n)}{\sqrt{n}} \leq \frac{\mathbb{E}(R_{2m})}{\sqrt{2m}}.$$

Comme la suite $\left(\sqrt{\frac{2m}{2m+1}}\right)_{m\geq 1}$ converge vers 1, on en déduit le résultat demandé.

Ainsi, $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ est un équivalent de $\frac{\mathbb{E}(R_n)}{\sqrt{n}}$ et finalement, on a

$$\mathbb{E}(R_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2n}{\pi}}$$

« En moyenne », pour n grand, la marche aléatoire symétrique revient environ $\sqrt{\frac{2n}{\pi}}$ fois en 0 avant l'instant n.

EXERCICE 329 (⑤) par Tristan Hottier [*]

On reprend ici les notations de l'exercice 310 et on suppose que $p \neq \frac{1}{2}$.

a) Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{E}(R_{2n}) = \sum_{k=1}^{n} \binom{2k}{k} \left(p^k q^k\right).$$

b) Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{E}(R_{2n}) \leq \sum_{k=1}^{n} (4pq)^k.$$

c) En déduire que la suite $(\mathbb{E}(R_{2n}))_{n\geq 1}$ est majorée.

d) Montrer finalement que la suite $(\mathbb{E}(R_n))_{n\geq 1}$ est croissante et majorée, donc convergente. Ce résultat contraste fortement avec celui de l'exercice précédent.

a) L'exercice 310 entraîne que, pour $k \in \mathbb{N}^*$,
$$\mathbb{P}\left(S_{2k} = 0\right) = \binom{2k}{k} \times p^k \times q^k = \binom{2k}{n} (pq)^k$$

L'écriture de R_{2n} comme somme des indicatrices Y_k utilisée dans la première question de l'exercice précédent prouve alors que
$$\mathbb{E}(R_{2n}) = \sum_{k=1}^{n} \binom{2k}{k} (pq)^k$$

b) Voir exercice 310, question 4.

c) On sait que $0 < 4pq < 1$ (exercice 310). D'autre part, en utilisant la formule donnant la somme d'une progression géométrique :
$$\sum_{k=0}^{n} (4pq)^k = \frac{1 - (4pq)^{n+1}}{1 - 4pq} \leq \frac{1}{1 - 4pq}.$$

La suite $(\mathbb{E}(R_n))_{n\geq 1}$ est donc majorée.

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La formule de a) et la positivité de $\binom{2n+2}{n+1}(pq)^{n+1}$ entraînent aussitôt que
$$\mathbb{E}(R_n) \leq \mathbb{E}(R_{n+1}).$$

La suite $(\mathbb{E}(R_n))_{n\geq 1}$ est donc croissante.
« En moyenne », la marche aléatoire non symétrique ne retourne qu'un nombre fini de fois à l'origine, ce qui contraste avec l'exercice précédent.
Remarque. À l'aide d'une formalisation plus riche et plus précise des probabilités (axiomatique de Kolmogorv), les résultats des deux exercices précédents peuvent être améliorés (passage d'énoncés « en moyenne », i.e. en espérance, à des énoncés presque sûrs).

10 Nombres complexes

10.1 Forme algébrique d'un nombre complexe

Exercice 330 (①) par Mattéo Quenon [*]

Écrire sous forme algébrique :

$$a=(1+i)^2,\ b=(3-2i)(1-i)-(2+i),\ c=\frac{3-2i}{2+5i},\ d=\frac{4+i}{1-i}+\frac{2-i}{3-i},\ e=\left(\frac{1+i}{i}\right)^3.$$

On a

$$\begin{aligned}
a &= (1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 2i,\\
b &= 3-2i-3i-2-2-i = -1-6i,\\
c &= \frac{(3-2i)(2-5i)}{29} = \frac{6-4i-15i-10}{29} = -\frac{4}{29}-\frac{19}{29}i,\\
d &= \frac{(13-i)+(1-3i)}{2-4i} = \frac{(14-4i)(2+4i)}{20} = \frac{44}{20}+\frac{48}{20}i = \frac{11}{5}+\frac{12}{5}i,\\
e &= \frac{(1+i)^3}{i^3} = \frac{1+3i-3-i}{-i} = \frac{2i-2}{-i} = -2i-2.
\end{aligned}$$

Exercice 331 (①) par Mattéo Quenon [*]

Pour $n\in\mathbb{N}$, calculer i^n.

On raisonne par disjonction de cas :

— si $n=4k$ où $k\in\mathbb{N}$, alors $i^n=\left(i^4\right)^k=1^k=1$,
— si $n=4k+1$ où $k\in\mathbb{N}$, alors $i^n=(i)^{4k}\cdot i=i$,
— si $n=4k+2$ où $k\in\mathbb{N}$, alors $i^n=(i)^{4k}\cdot i^2=-1$,
— si $n=4k+3$ où $k\in\mathbb{N}$, alors $i^n=(i)^{4k}\cdot i^3=1\cdot(-i)=-i$.

Exercice 332 (①) par Loïse Launay [*]

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation du premier degré $2iz+4=z-4i$

On a donc

$$2iz+4=z-4i \quad\Leftrightarrow\quad 2iz-z=-4i-4 \quad\Leftrightarrow\quad z(2i-1)=-4i-4 \quad\Leftrightarrow\quad z=\frac{-4i-4}{2i-1}=\frac{4+4i}{1-2i}.$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par $(1+2i)$, on obtient l'unique solution :

$$z=\frac{4+4i+8i-8}{1+4}=-\frac{4}{5}+\frac{12i}{5}.$$

Exercice 333 (②) par Loïse Launay [*]

Soit $z=\dfrac{-4}{1+i\sqrt{3}}$. Calculer z^3.

Soit

$$z=\frac{-4}{1+i\sqrt{3}}.$$

Alors

$$z^3=\left(\frac{-4}{1+i\sqrt{3}}\right)^3=\frac{-64}{1+3i\sqrt{3}+3(i\sqrt{3})^2+(i\sqrt{3})^3}=\frac{-64}{1-9+3i\sqrt{3}-3i\sqrt{3}}=\frac{64}{8}=8$$

Exercice 334 (①) par Loïse Launay [$*$]

Déterminer les nombres complexes z tel que $z^2 = i$.

Posons $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$z^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy.$$

Ainsi,

$$z^2 = i \quad \Leftrightarrow \quad 2xy = 1 \text{ et } x^2 - y^2 = 0.$$

La deuxième équation donne $x = y$ ou $x = -y$. Si $x = y$, la première équation s'écrit $2x^2 = 1$, qui admet deux solutions $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Si $x = -y$, la première équation s'écrit $2x^2 = -1$, qui n'a pas de solution réelle (le carré d'un nombre réel est positif).

L'équation de l'énoncé a donc deux solutions :

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \quad \text{et} \quad z = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

Exercice 335 (②) par Loïse Launay [$*$]

a) Quels sont les nombres complexes dont le carré est un nombre réel ?
b) Quels sont les nombres complexes dont le carré est un nombre imaginaire pur ?

a) On reprend le calcul de l'exercice précédent. Si $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, z^2 est réel si et seulement si $2xy = 0$, i.e. si $x = 0$ ou $y = 0$, i.e. si z est réel ou imaginaire pur.
b) Avec les mêmes notations, z^2 est imaginaire pur si et seulement si $x = y$ ou $x = -y$. L'ensemble des solutions est donc :
$$\{x(1 + i),\ x \in \mathbb{R}\} \cup \{x(1 - i),\ x \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 336 (③) par Matilde Cruz [$*$]

Trouver les nombres complexes non nuls z tels que $Z = z + \frac{1}{z}$ soit réel. Idem en remplaçant « réel » par « imaginaire pur ».

Soit z un nombre conplexe non nul : $z = ai + b$ avec a et $b \in \mathbb{R}$ non tous deux nuls. Alors

$$Z = z + \frac{1}{z} = a + ib + \frac{1}{a + ib} = a + ib + \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{ib}{a^2 + b^2} = \frac{a(a^2 + b^2 + 1) + ib(a^2 + b^2 - 1)}{a^2 + b^2}.$$

Le nombre complexe Z est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle, i.e. si $b = 0$ ou $a^2 + b^2 = 1$, i.e. si z est réel (non nul) ou de module 1.

Avec les notations précédentes, Z est imaginaire pur si et seulement si sa partie réelle est nulle, i.e. si $a(a^2 + b^2 + 1) = 0$. Comme le carré d'un réel est positif, $a^2 + b^2 + 1 \geq 1 > 0$. Il s'ensuit que Z est imaginaire pur si et seulement si $a = 0$ i.e. si z est imaginaire pur (non nul).

10.2 Conjugué et module

Exercice 337 (②) par Loïse Launay [*]

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

$$z = 1 - \overline{z} + 3i, \qquad \frac{z+2i}{\overline{z}+i} = 1.$$

Soit $z \in \mathbb{C}$. On écrit $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, de sorte que $\overline{z} = a - ib$. La première équation s'écrit

$$a + ib = 1 - a + ib + 3i \iff 2a = 1 + 3i,$$

ce qui est impossible car a est réel. Ainsi,

$$S = \varnothing.$$

On procède de manière analogue pour la deuxième équation, qui s'écrit :

$$\frac{a + ib + 2i}{a - ib + i} = 1 \iff a + i(b + 2) = a + i(1 - b),$$

avec la contrainte $\overline{z} \neq -i$, i.e. $z \neq -i$. Après simplification, on obtient :

$$b = -\frac{1}{2},$$

ce qui exclut $z = -i$. Par conséquent,

$$S = \left\{ a - \frac{1}{2}i \ ,\ a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 338 (②) par Loïse Launay [*]

Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$iz^2 - 2\overline{z} + z - i = 0.$$

Pour résoudre une équation faisant intervenir un nombre complexe z et son conjugué $\overline{z}$, on utilise la forme algébrique. Posons $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a $\overline{z} = a - ib$. L'équation s'écrit donc :

$$i(a + ib)^2 - 2(a - ib) + a + ib - i = 0 \iff -2ab - a + i(a^2 - b^2 + 3b - 1) = 0,$$

ce qui équivaut au système suivant :

$$\begin{cases} a(2b + 1) = 0 \\ a^2 - b^2 + 3b - 1 = 0 \end{cases}.$$

Premier cas : $a = 0$ et $b^2 - 3b + 1 = 0$. L'équation du second degré en b admet deux racines distinctes, $\dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, ce qui fournit deux solutions pour l'équation initiale : $\dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}i$.

Second cas : $2b + 1 = 0$, i.e. $b = -\dfrac{1}{2}$ et $a^2 = \dfrac{11}{4}$, qui donne deux solutions pour l'équation intiale, $\dfrac{\pm\sqrt{11} - i}{2}$.

L'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$S = \left\{ \frac{3 + \sqrt{5}}{2}i \ ;\ \frac{3 - \sqrt{5}}{2}i \ ;\ \frac{\sqrt{11}}{2} - \frac{1}{2}i \ ;\ -\frac{\sqrt{11}}{2} - \frac{1}{2}i \right\}.$$

EXERCICE 339 (④) par Octave Koenig [*]

Dans les questions a), b), c), f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(1)=1$ et que

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x+y)=f(x)+f(y),\quad f(xy)=f(x)f(y)\,.$$

a) Montrer que

$$\forall x\in\mathbb{Q},\quad f(x)=x\,.$$

b) Soient x et y deux nombres réels tels que $y\geq x$. En utilisant le nombre réel $\sqrt{y-x}$, montrer que $f(y)-f(x)\geq 0$. Ainsi, f est croissante.

c) Déduire de a) et b) que

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=x\,.$$

Dans les questions suivantes, g est une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $g(1)=1$ et que

$$\forall (u,v)\in\mathbb{C}^2,\quad g(u+v)=g(u)+g(v),\quad g(uv)=g(u)g(v)\,.$$

d) Montrer que $g(i)\in\{-i,i\}$.

e) On suppose que $g(\mathbb{R})\subset\mathbb{R}$. Montrer que g est l'identité de $\mathbb{C}$ ou la conjugaison complexe.

a) Voir exercice 24. On utilise ici simplement la première propriété.

b) Comme le carré d'un nombre réel est positif,

$$f(y)-f(x)=f(y-x)=f(\sqrt{y-x})f(\sqrt{y-x})=f(\sqrt{y-x})^2\geq 0.$$

c) Soit $x\in\mathbb{R}$. On voit, en utilisant soit la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, soit plus explicitement les approximations décimales par défaut et excès, qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathbb{Q}$ tendant vers x telles que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad a_n\leq x\leq b_n.$$

Comme f est croissante, on en déduit que

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad f(a_n)\leq f(x)\leq f(b_n),$$

c'est-à-dire, au vu de a) :

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad a_n\leq f(x)\leq b_n.$$

Le théorème des gendarmes assure alors que $f(x)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}x$. Autrement dit, $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=x$.

Remarque. On comparera à l'exercice 24. On ne fait pas ici d'hypothèse de continuité, mais la seconde relation implique la croissance.

d) En prenant $x=y=0$ dans la première relation, on a $g(0)=2\,g(0)$, donc $g(0)=0$. En prenant ensuite $x=1$, $y=-1$, on a $g(1)+g(-1)=g(0)$, d'où $g(-1)=-1$.

En utilisant la seconde relation et le fait que $g(-1)=-1$, on a

$$g(i)^2=g(i^2)=g(-1)=-1,$$

d'où $g(i)=\pm i$.

e) Notant f la restriction de g à $\mathbb{R}$, f vérifie les hypothèses des questions a) et est donc l'identité de $\mathbb{R}$. On distingue alors deux cas.
Si $g(i)=i$, alors, pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$g(x+iy)=g(x)+g(iy)=g(x)+g(i)g(y)=x+iy,$$

l'application g est l'identité de $\mathbb{C}$.
Si $g(i)=-i$, alors, pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$g(x+iy)=g(x)+g(iy)=g(x)+g(i)g(y)=x-iy,$$

l'application g est la conjugaison de $\mathbb{C}$.
Réciproquement, ces deux applications vérifient les hypothèses de l'énoncé.

EXERCICE 340 (③) par Mattéo Quenon [*]

Résoudre les équations d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$2z - |z|^2 + 1 - 2i = 0, \quad z\,|z| = 2 + i\sqrt{3}$$

On écrit $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

La première équation s'écrit

$$\begin{aligned} 2z - |z|^2 + 1 - 2i = 0 &\iff 2(a + ib) - a^2 - b^2 + 1 - 2i = 0 \\ &\iff 2a + 2ib - a^2 - b^2 + 1 - 2i = 0 \\ &\iff 2a - a^2 - b^2 + 2ib = -1 + 2i. \end{aligned}$$

Soit encore :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2a - a^2 - b^2 = -1 \\ 2ib = 2i \end{cases} &\iff \begin{cases} 2a - a^2 - b^2 = -1 \\ b = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a - a^2 = 0 \\ b = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = 0 \quad \text{ou} \quad a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi : $S_1 = \{i, 2 + i\}$.

La deuxième équation s'écrit

$$(a + ib)\sqrt{a^2 + b^2} = 2 + i\sqrt{3}, \quad \text{i.e.} \quad a\sqrt{a^2 + b^2} = 2 \quad \text{et} \quad b\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3}.$$

En élevant au carré chaque membre et en sommant, on obtient

$$(a^2 + b^2)^2 = 7 \quad \text{donc} \quad a^2 + b^2 = \sqrt{7} \quad \text{et} \quad \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt[4]{7}.$$

On en déduit que

$$a = \frac{2}{\sqrt[4]{7}} \quad \text{et que} \quad b = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{7}}.$$

Donc

$$z = \frac{2}{\sqrt[4]{7}} + i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{7}}.$$

Réciproquement, si z est donnée par cette formule,

$$|z|^2 = \frac{4}{\sqrt{7}} + \frac{3}{\sqrt{7}} = \sqrt{7} \quad \text{donc} \quad |z| = \sqrt[4]{7} \quad \text{et} \quad z|z| = 2 + i\sqrt{3}.$$

La seconde équation admet une et une seule solution :

$$z = \frac{2}{\sqrt[4]{7}} + i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{7}}.$$

EXERCICE 341 (③) par Mattéo Quenon

Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^2 + 8i = |z|^2 - 2$$

Posons $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\begin{aligned}(*) \quad z^2 + 8i = |z|^2 - 2 &\iff z^2 - |z|^2 = -2 - 8i \\ &\iff a^2 + 2abi - b^2 - a^2 - b^2 = -2 - 8i\end{aligned}$$

$$(*) \iff \begin{cases} -2b^2 = -2 \\ 2ab = -8 \end{cases} \iff \begin{cases} b^2 = 1 \\ ab = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 1 \text{ et } a = -4 \\ \quad \text{ou} \\ b = -1 \text{ et } a = 4 \end{cases}$$

Finalement, $S = \{-4 + i, 4 - i\}$

> EXERCICE 342 (④) par Wéline Pujol [*]
>
> Déterminer l'image de $\mathbb{C}$ par l'application f définie par
>
> $$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = z + |z|.$$

Soit $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$f(z) = a + ib + |a + ib| = a + ib + \sqrt{a^2 + b^2} = \left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right) + ib.$$

Il s'ensuit que

$$\mathrm{Re}\,(f(z)) = a + \sqrt{a^2 + b^2} \geq -|a| + \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0,$$

car, puisque $a^2 \leq a^2 + b^2$ et puisque la fonction racine carrée est croissante, on a

$$|a| \leq \sqrt{a^2 + b^2}.$$

D'autre part,

$$\mathrm{Re}\,(f(z)) = 0 \iff a = -\sqrt{a^2 + b^2} \iff a \in \mathbb{R}^- \textbf{ et } a^2 = a^2 + b^2 \iff a \in \mathbb{R}^- \textbf{ et } b = 0.$$

Par ailleurs, si $a \in \mathbb{R}^-$ et $b = 0$,

$$f(z) = a + |a| = 0.$$

Il s'ensuit que $f(\mathbb{C})$ est contenu dans l'ensemble

$$E = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ \mathrm{Re}(z') > 0\} \cup \{0\}.$$

Montrons qu'en fait $f(\mathbb{C}) = E$. À cet effet, fixons $z \in E$ et montrons que $z \in f(\mathbb{C})$. On a $0 = f(0)$ (et même $0 = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^-$) donc 0 appartient à $f(\mathbb{C})$.

Soit $z = x + iy$ avec $x \in \mathbb{R}^{+*}$ et $y \in \mathbb{R}$. Cherchons $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(a + ib) = z$, i.e.

$$a + \sqrt{a^2 + b^2} = x \quad \text{et} \quad b = y.$$

Il suffit de montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $a + \sqrt{a^2 + y^2} = x$, i.e. $\sqrt{a^2 + y^2} = x - a$, i.e.

$$a \leq x \quad \text{et} \quad a^2 + y^2 = (x - a)^2.$$

Mais, en utilisant que $x \neq 0$,

$$a^2 + y^2 = (x - a)^2 \iff y^2 = -2ax + x^2 \iff a = \frac{x}{2} - \frac{y^2}{2x}.$$

La valeur de a obtenue est majorée par $x/2$ donc par x puisque $x > 0$. Elle convient donc. Ainsi

$$f\left(\frac{x}{2} - \frac{y^2}{2x} + iy\right) = x + iy,$$

ce qui achève la démonstration.

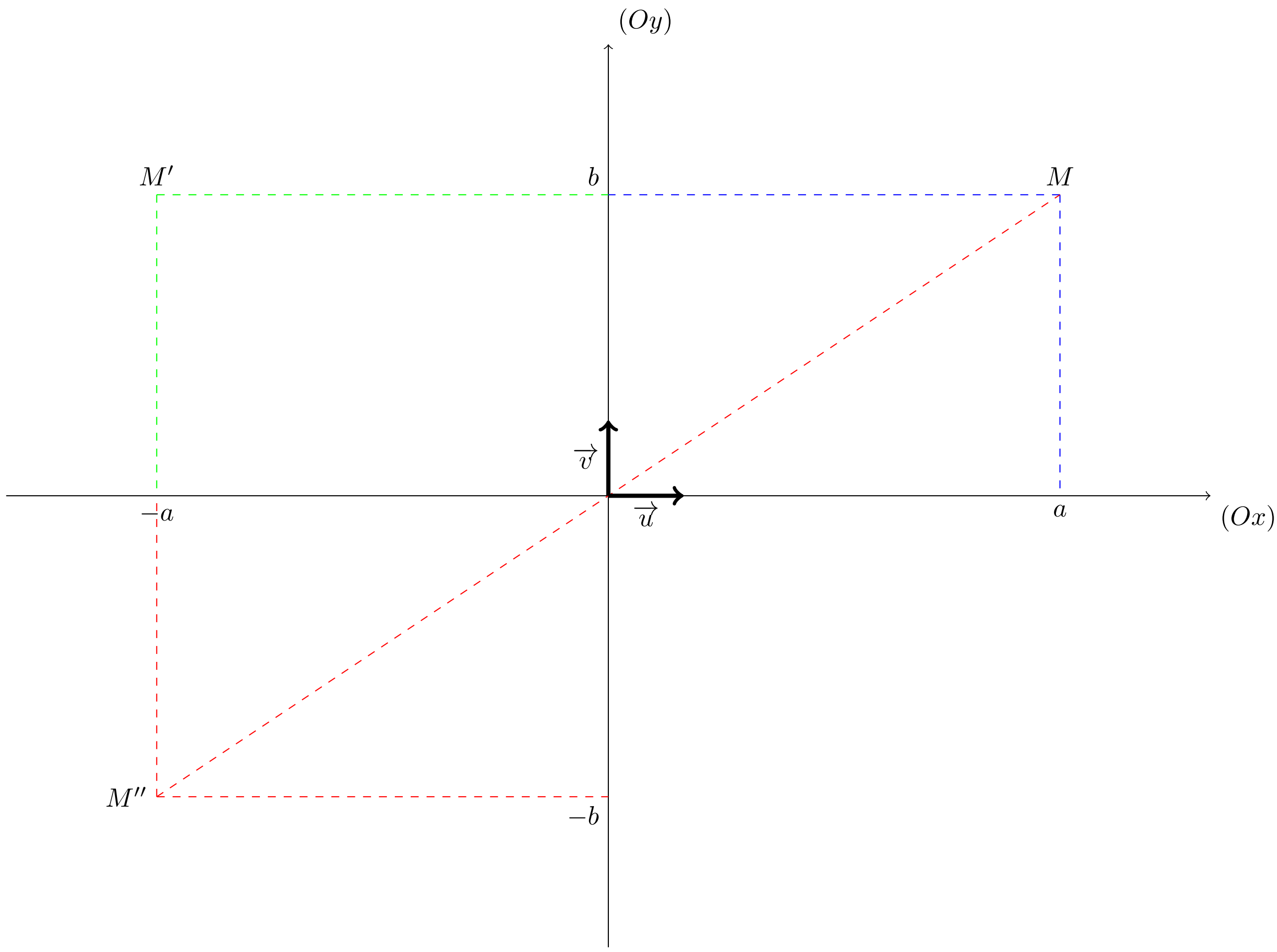
10.3 Représentation géométrique des nombres complexes

EXERCICE 343 (①) par Mattéo Quenon [*]

a) Soient z un nombre complexe, M son image dans le plan, M' le symétrique de M par rapport à (Oy). Quelle est l'affixe de M' ?

b) Même question pour M'', symétrique de M par rapport à O.

a) Représentons le plan complexe, dans lequel on place un point M d'affixe $z = a + ib$.



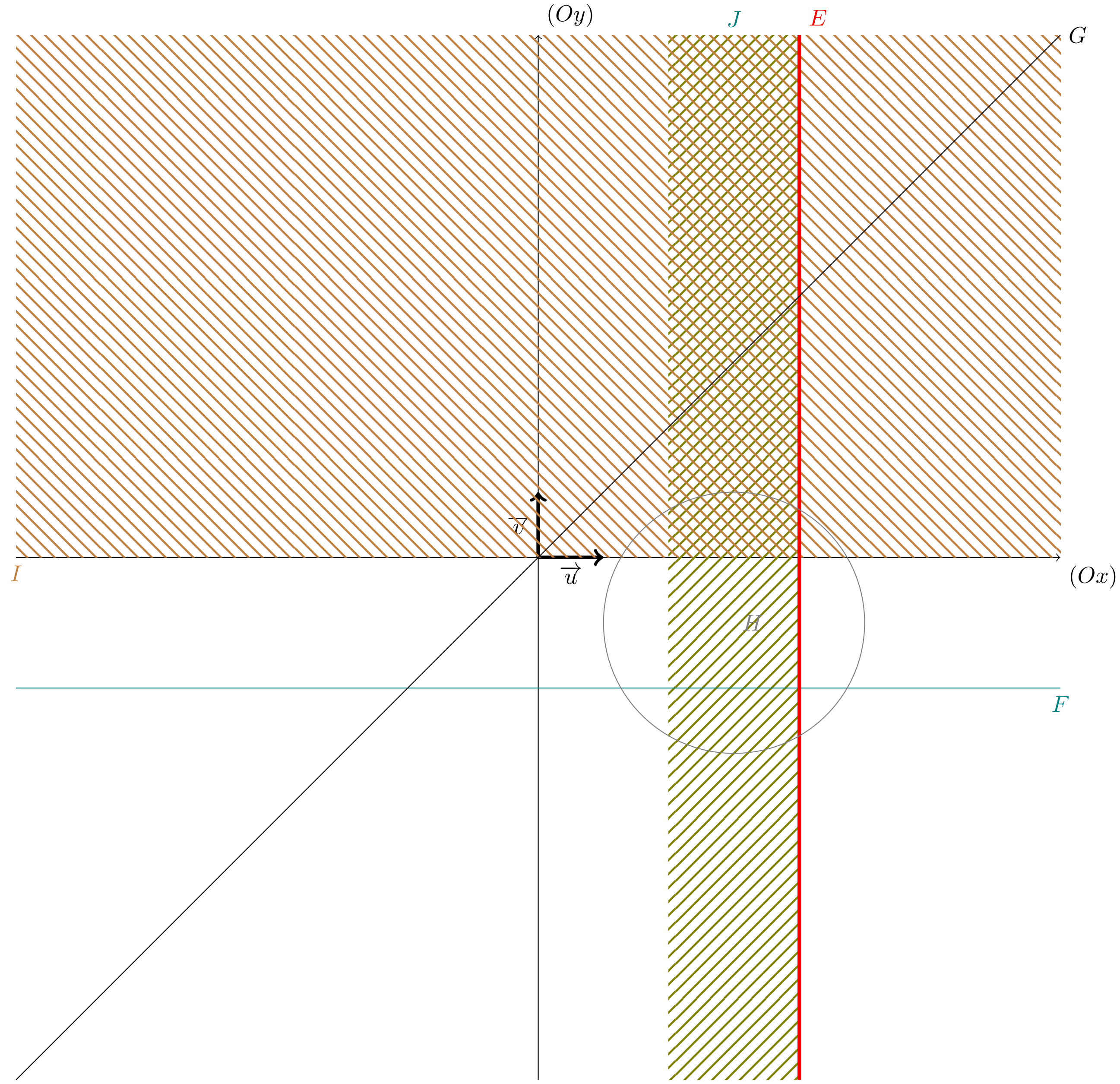
Ainsi M' a pour affixe $z' = -a + ib = -\overline{z}$.

b) Représentons M'' sur le plan construit en a). Le point M'' a donc pour affixe $z'' = -a - ib = -z$.

EXERCICE 344 (①) par Mattéo Quenon [*]

Décrire et représenter les images des ensembles suivants de nombres complexes :

$$E = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(z) = 4\},\quad F = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im}(z) = -2\},\quad G = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)\},$$
$$H = \{z \in \mathbb{C};\ |z - 3 + i| = 2\},\quad I = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im}(z) > 0\},\quad J = \{z \in \mathbb{C};\ 2 \leq \mathrm{Re}(z) < 4\}.$$



Ainsi

— E est la droite d'équation $x = 4$,
— F est la droite d'équation $y = -2$,
— G est la droite d'équation $y = x$,
— H est le cercle de rayon 2 et de centre $A(3, -1)$,
— I est le demi-plan formé par $y > 0$,
— J est la bande verticale des points situés entre la droite d'équation $x = 2$ incluse et la droite d'équation $x = 4$ exclue.

Exercice 345 (②) par Matilde Cruz [*]

a) Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que :

$$|z - i| = |z + i|$$

par deux méthodes :
- par un calcul en écrivant z sous forme algébrique ;
- en interprétant géométriquement la relation.

b) Déterminer de même l'ensemble des nombres complexes z tels que

$$|z - i| < |z + i|.$$

a) Première méthode. Posons $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, de sorte que l'on a

$$z - i = a + (b-1)i, \quad z + i = a + (b+1)i.$$

Alors, comme un module est positif,

$$|z - i| = |z + i| \iff |z - i|^2 = |z + i|^2 \iff a^2 + (b-1)^2 = a^2 + (b+1)^2 \iff b = 0.$$

L'égalité $|z - i| = |z + i|$ est vraie si et seulement si $z \in \mathbb{R}$.

Deuxième méthode. L'égalité est vérifiée si et seulement si le point d'affixe z est équidistant des points d'affixes i et $-i$, i.e. si le point d'affixe z appartient à la médiatrice du segment qui relie les points d'affixes i et $-i$, i.e. à l'axe réel.

b) Avec les notations précédentes, comme la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$,

$$|z - i| < |z + i| \iff |z - i|^2 < |z + i|^2 \iff a^2 + (b-1)^2 < a^2 + (b+1)^2 \iff b > 0.$$

L'ensemble des solutions est

$$\left\{x + iy,\ x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}^{+*}\right\}.$$

Géométriquement, l'inégalité est vérifiée si et seulement si le point d'affixe z est strictement plus proche du point d'affixe i que du point d'affixe $-i$, i.e. si le point d'affixe z est dans celui des demi-plans ouverts limités par l'axe réel qui contient le point i, i.e. dans le demi-plan ouvert des points dont la seconde coordonnée est strictement positive.

EXERCICE 346 (②) par Matilde Cruz [*]

Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $|z| = |z - 1| = 1$. Interpréter géométriquement.

Soit $z \in \mathbb{C}$. On écrit $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a d'abord, en procédant comme dans l'exercice 345,

$$|z| = |z - 1| \quad \iff \quad x = \frac{1}{2}.$$

Ainsi z vérifie les conditions voulues si et seulement si $|z| = |z - 1|$ et $|z| = 1$, i.e.

$$x = \frac{1}{2} \quad \textbf{et} \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Il y a donc deux solutions :

$$\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Le point z vérifie $|z| = 1$ (resp. $|z - 1| = 1$) si et seulement s'il appartient au cercle de centre 0 et de rayon 1 (resp. de centre 1 et de rayon 1). On a donc déterminé l'intersection de ces deux cercles, à savoir la paire dont les éléments sont les points d'affixes

$$\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

EXERCICE 347 (②) par Loïse Launay [*]

Déterminer l'ensemble des nombres complexes z non nuls tels que $\dfrac{1+z}{\overline{z}}$ soit réel. Quelle est l'image de cet ensemble ?

Écrivons $z = a + ib$ où a et b sont deux réels non simultanément nuls. Alors $\overline{z} = a - ib$ et :

$$\frac{1 + a + ib}{a - ib} = \frac{(1 + a + ib)(a + ib)}{a^2 + b^2} = \frac{a + a^2 + iab + ib + iab - b^2}{a^2 + b^2} = \frac{(a + a^2 - b^2) + i(b + 2ab)}{a^2 + b^2}.$$

On en déduit donc la partie imaginaire du nombre complexe $\dfrac{1+z}{\overline{z}}$:

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1+z}{\overline{z}}\right)=\frac{b(1+2a)}{a^2+b^2}.$$

Or $\dfrac{1+z}{\overline{z}}$ est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle :

$$\frac{1+z}{\overline{z}}\in\mathbb{R}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{b(1+2a)}{a^2+b^2}=0\quad\Leftrightarrow\quad b(1+2a)=0\quad\Leftrightarrow\quad b=0\ \text{ ou }\ a=-\frac{1}{2}.$$

L'ensemble des nombres complexes non nuls z tels que $\dfrac{1+z}{\overline{z}}$ soit réel est donc

$$\mathbb{R}^*\cup\left\{-\frac{1}{2}+ib;\ b\in\mathbb{R}\right\}.$$

L'image de cet ensemble est donc la réunion de l'axe réel privé de l'origine du plan complexe et de la droite d'équation $a=-\dfrac{1}{2}$.

EXERCICE 348 (②) par Loïse Launay [*]

Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que z^3+3z^2+3z+9 soit réel. Quelle est l'image de cet ensemble dans le plan complexe ?

Soit $z=a+ib$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Alors :

$$(a+ib)^3+3(a+ib)^2+3(a+ib)+9=a^3+3a^2bi-3ab^2-b^3i+3a^2+6abi-3b^2+3a+3bi.$$

On en déduit la partie imaginaire du nombre complexe z^3+3z^2+3z+9 :

$$\operatorname{Im}(z^3+3z^2+3z+9)=3a^2b-b^3+6ab+3b=b(3a^2-b^2+6a+3).$$

Or le nombre complexe z^3+3z^2+3z+9 est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle :

$$z^3+3z^2+3z+9\in\mathbb{R}\Longleftrightarrow b(3a^2-b^2+6a+3)=0\Longleftrightarrow b=0\ \text{ ou }\ 3a^2-b^2+6a+3=0,$$

soit encore

$$z^3+3z^2+3z+9\in\mathbb{R}\Longleftrightarrow b=0\ \text{ ou }\ b^2=3\,(a+1)^2\Longleftrightarrow b=0\ \text{ ou }\ b=\pm\sqrt{3}\,(a+1).$$

Ainsi, l'ensemble des nombres complexes z tels que z^3+3z^2+3z+9 soit réel est

$$\mathbb{R}\cup\left\{-a+i\sqrt{3}(a+1)\ ;\ a\in\mathbb{R}\right\}\cup\left\{-a-i\sqrt{3}(a+1)\ ;\ a\in\mathbb{R}\right\}.$$

L'image de cet ensemble est donc la réunion de trois droites : l'axe réel et les deux droites d'équations $b=\sqrt{3}(a+1)$ et $b=-\sqrt{3}(a+1)$.

EXERCICE 349 (②) par Loïse Launay [*]

Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $z^2-2i=\overline{z}^2+2i$. Quelle est l'image de cet ensemble dans le plan complexe ?

Écrivons $z=a+ib$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, de sorte que $\overline{z}=a-ib$. Alors :

$$(a+ib)^2-2i=(a-ib)^2+2i\Leftrightarrow a^2+2abi-b^2-2i=a^2-2abi-b^2+2i\Leftrightarrow 4abi-4i=0\Leftrightarrow ab=1.$$

Cette condition équivaut à

$$a\in\mathbb{R}^*\ \ \textbf{et}\ \ b=\frac{1}{a}.$$

L'ensemble des nombres complexes z tels que $z^2 - 2i = \overline{z}^2 + 2i$ est

$$\left\{ a + \frac{1}{a} i \ ; \ a \in \mathbb{R}^* \right\}.$$

L'ensemble image dans le plan complexe est le graphe de la fonction inverse $f : a \in \mathbb{R}^* \longmapsto \dfrac{1}{a}$.

EXERCICE 350 (③) par Tristan Hottier [$*$]

a) Soient z et z' deux nombres complexes. Montrer :

$$|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right)$$

b) Donner une interprétation géométrique de cette égalité en considérant un parallélogramme, les longueurs de ses côtés, les longueurs de ses diagonales.

c) Soient A, B, C trois points non alignés du plan, I le milieu de $[BC]$. Déduire de b) une expression de AI^2 en fonction de AB^2, BC^2, CA^2.

a) Calculons le premier membre de l'inégalité à démontrer.

$$\begin{aligned} |z + z'|^2 + |z - z'|^2 &= (z + z')\left(\overline{z} + \overline{z'}\right) + (z - z')\left(\overline{z} - \overline{z'}\right) \\ &= |z|^2 + |z'|^2 + |z|^2 + |z'|^2 + z\overline{z'} + z'\overline{z} - z\overline{z'} - z'\overline{z} \\ &= 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right) \end{aligned}$$

On retrouve ainsi le second membre de l'égalité.

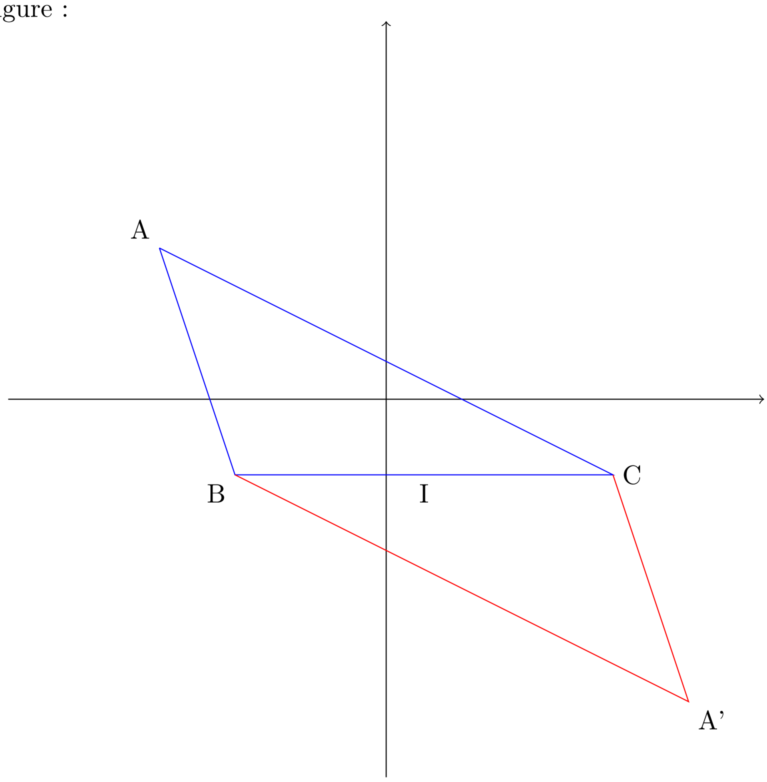
b) Posons A, B, C, D les points d'affixes respectifs $z, z', -z, -z'$. On remarque alors immédiatement que $ABCD$ est un parallélogramme et que l'égalité précédente devient

$$AB^2 + AD^2 = BC^2CD^2 = 2\left(OA^2 + OB^2\right) = \frac{1}{2}\left(AC^2 + BD^2\right).$$

On en déduit que dans un parallélogramme, la somme des carrés des longueurs des côtés est égale à la somme des carrés de ses diagonales :

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2.$$

c) Traçons une figure :



Notant A' le symétrique de A par rapport à I, $ABA'C$ est un parallélogramme et la propriété précédemment évoquée est applicable :

$$AB^2 + CA^2 = 2\left(AI^2 + BI^2\right) \quad \Leftrightarrow \quad AB^2 + CA^2 = 2\left(AI^2 + \frac{BC^2}{4}\right).$$

On a donc

$$AI^2 = \frac{AB^2 + CA^2}{2} - \frac{BC^2}{4}.$$

Remarque. C'est le *théorème de la médiane*, qui exprime la longueur d'une médiane d'un triangle en fonction des longueurs des côtés.

Exercice 351 (②) par Matilde Cruz [∗]

Soient z et z' deux nombres complexes, M et M' leurs images dans le plan complexe. Montrer qu'un point appartient au segment [MM'] si et seulement si son affixe est de la forme $\lambda z + (1-\lambda)z'$ avec $\lambda \in [0,1]$.

La droite $(M'M)$ est l'ensemble des points de la forme :

$$M' + \lambda\overrightarrow{M'M}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, cette droite qui passe par les points d'affixes z et z' est l'image de l'ensemble des nombres complexes de la forme :

$$z' + \lambda(z - z') = z' + \lambda z - \lambda z' = \lambda z + z'(1-\lambda) \qquad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

De même, le segment $[M'M]$ est l'ensemble des points de la forme :

$$M' + \lambda \cdot \overrightarrow{M'M} \qquad \text{avec} \quad \lambda \in [0,1].$$

Ainsi, le segment $[M'M]$ est l'image de l'ensemble des nombres complexes de la forme :

$$\lambda z + z'(1-\lambda) \qquad \text{avec} \quad \lambda \in [0,1].$$

Exercice 352 (③) par Alexandre Paresy [∗]

Soient a, b, c trois nombres complexes, A, B, C leurs images dans le plan. On suppose que A, B, C ne sont pas alignés. Montrer que les médianes du triangle ABC passent par le point G d'affixe $g = \dfrac{a+b+c}{3}$ (qui est le centre de gravité du triangle ABC).

Soient A', B', C', les milieux de $[BC], [AC], [AB]$, et a', b', c' leurs affixes. Par définition, on a :

$$a' = \frac{b+c}{2}, \qquad b' = \frac{a+c}{2}, \qquad c' = \frac{a+b}{2}.$$

Les médianes de ABC se caractérisent comme les segments $[AA'], [BB'], [CC']$. Or, l'exercice 351 nous indique qu'un point appartient à $[AA']$ si et seulement si son affixe est de la forme $\lambda a + (1-\lambda)a'$, avec $\lambda \in [0,1]$.

Ainsi, pour $\lambda = \dfrac{1}{3}$, on trouve que le point d'affixe

$$\frac{a}{3} + \frac{2}{3}\frac{b+c}{2} = \frac{a+b+c}{3} = g,$$

appartient bien à $[AA']$, donc à une des médianes de ABC. De même, on trouve que g appartient à $[BB']$ et $[CC']$, donc on a bien établi que les médianes de ABC passent par G.

Exercice 353 (⑤) par Octave Koenig [*]

Montrer que l'ensemble des nombres complexes non nuls z tels que $\left|z+\dfrac{1}{z}\right| = 2$ a pour image la réunion de deux cercles que l'on précisera.

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que

$$\left(|z-i|^2 - 2\right)\left(|z+i|^2 - 2\right) = 0\,. \tag{E}$$

On a $\mathcal{E} \subset \mathbb{C}^*$. L'image de $\mathcal{E}$ est l'union de deux cercles. En effet :

$$\begin{aligned}
(E) \quad &\Longleftrightarrow \quad |z-i|^2 = 2 \quad \text{ou} \quad |z+i|^2 = 2 \\
&\Longleftrightarrow \quad |z-i| = \sqrt{2} \quad \text{ou} \quad |z+i| = \sqrt{2}
\end{aligned}$$

Donc, z appartient au cercle de centre i et de rayon $\sqrt{2}$, ou au cercle de centre $-i$ et de rayon $\sqrt{2}$.
Montrons maintenant que $(E) \Leftrightarrow \left|z+\dfrac{1}{z}\right| = 2$:

$$\begin{aligned}
(E) \quad &\Longleftrightarrow \quad = [(z-i)(\bar{z}+i)-2]\,[(z+i)(\bar{z}-i)-2] = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad (z\bar{z} + iz - i\bar{z} - 1)(z\bar{z} - iz + i\bar{z} - 1) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad (z\bar{z})^2 - \cancel{iz^2\bar{z}} + \cancel{iz\bar{z}^2} - z\bar{z} + \cancel{iz^2\bar{z}} + z^2 - z\bar{z} \\
&\qquad - \cancel{iz} - \cancel{iz\bar{z}^2} - z\bar{z} + \bar{z}^2 + \cancel{i\bar{z}} - z\bar{z} + \cancel{iz} - \cancel{i\bar{z}} + 1 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad (z\bar{z})^2 - 4z\bar{z} + z^2 + \bar{z}^2 + 1 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad (z\bar{z})^2 + z^2 + \bar{z}^2 + 1 = 4z\bar{z} \\
&\Longleftrightarrow \quad z\bar{z} + \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} + \frac{1}{z\bar{z}} = 4 \\
&\Longleftrightarrow \quad \left(z + \frac{1}{z}\right)\left(\bar{z} + \frac{1}{\bar{z}}\right) = 4 \\
&\Longleftrightarrow \quad \left|z + \frac{1}{z}\right|^2 = 4 \\
&\Longleftrightarrow \quad \left|z + \frac{1}{z}\right| = 2
\end{aligned}$$

10.4 Nombres complexes de module 1, exponentielle imaginaire

Exercice 354 (①) par Mattéo Quenon [*]

Écrire sous forme algébrique $e^{i\pi/6}$, $e^{i5\pi/6}$.

On a immédiatement :

$$e^{i\pi/6} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

et

$$e^{i5\pi/6} = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Exercice 355 (②) par Martin Lambotte [*]

Montrer, en utilisant la formule d'Euler pour le sinus, que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(nx)| \leq n|\sin(x)|$$

Pour $n = 0$, il n'y a rien à démontrer. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. On utilise la factorisation

$$\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, \qquad a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

Pour $a = e^{ix}$ et $b = e^{-ix}$, on obtient

$$e^{inx} - e^{-inx} = (e^{ix} - e^{-ix}) \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(2k-n+1)x}.$$

En divisant par $2i$:

$$\sin(nx) = \sin(x) \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(2k-n+1)x} \quad \text{donc} \quad |\sin(nx)| = |\sin(x)| \left| \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(2k-n+1)x} \right|.$$

Il reste donc à démontrer que

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(2k-n+1)x} \right| \leq n.$$

À ce stade, la façon la plus simple de conclure est d'utiliser l'inégalité triangulaire, démontrée en **10.11**, et qui entraîne

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(2k-n+1)x} \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |e^{i(2k-n+1)x}|.$$

Tous les termes de la somme majorante valent 1, ce qui conclut.

On peut aussi écrire la somme un peu autrement. Donnons la solution pour n impair : $n = 2m + 1$ avec $m \in \mathbb{N}$. Alors, on note que $e^{i(2k-2m)x} = 1$ si $k = m$ et que les autres termes se regroupent par paires conjuguées, ce qui donne :

$$\sum_{k=0}^{2m} e^{i(2k-2m)x} = 1 + \sum_{k=1}^{m} 2 \cos((2m - 2k)x),$$

quantité qui est comprise entre $1 - 2m$ et $1 + 2m$ (car les cosinus sont dans $[-1, 1]$), donc de valeur absolue majorée par $2m + 1 = n$.

Le cas n pair est analogue et laissé au lecteur.

Exercice 356 (④) par Daniel Caby [*]

Il est conseillé dans cet exercice, d'éviter les parties réelles et imaginaires et de travailler avec les carrés des modules écrits avec l'aide du conjugué.

a) Montrer que, si $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$,

$$\forall z \in \mathbb{U}, \qquad \frac{z - a}{1 - \overline{a}z} \in \mathbb{U}.$$

b) Soit $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$. Montrer que, si $a \in \mathbb{D}$, alors :

$$\forall z \in \mathbb{D}, \qquad \frac{z - a}{1 - \overline{a}z} \in \mathbb{D}.$$

a) Soient $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$ et $z \in \mathbb{U}$. Alors

$$|\overline{a}z| = |\overline{a}|\ |z| = |\overline{a}| = |a| \neq 1,$$

donc $1-\overline{a}z \neq 0$. De plus,

$$\begin{aligned}
|z-a|^2 &= (z-a)(\overline{z}-\overline{a}) = z\overline{z} - z\overline{a} - a\overline{z} + a\overline{a} = 1 - 2\,\mathrm{Re}\,(\overline{a}z) + |a|^2 \\
|1-\overline{a}z|^2 &= (1-\overline{a}z)(1-a\overline{z}) = 1 - a\overline{z} - \overline{a}z + \overline{a}a\overline{z}z = 1 - 2\,\mathrm{Re}(\overline{a}z) + |a|^2 .
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a : $|z-a|^2 = |1-\overline{a}z|^2$, i.e. :

$$\frac{z-a}{1-\overline{a}z} \in \mathbb{U}.$$

b) Soient $a \in \mathbb{D}$ et $z \in \mathbb{D}$. Alors

$$|\overline{a}z| = |\overline{a}| \times |z| = |a| \times |z| < 1,$$

donc $1-\overline{a}z \neq 0$. De plus,

$$|z-a|^2 - |1-\overline{a}z|^2 = |z|^2 - 1 + |a|^2\left(1-|z|^2\right) = \left(1-|z|^2\right)\left(|a|^2-1\right) < 0.$$

Par conséquent,

$$|z-a|^2 < |1-\overline{a}z|^2 ,$$

donc

$$\frac{z-a}{1-\overline{a}z} \in \mathbb{D}.$$

Exercice 357 (③) par Maorine Pereira [*]

Quels sont les $n \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad (\sin(\theta) + i\,\cos(\theta))^n = \sin(n\theta) + i\,\cos(n\theta)?$$

Transformons chaque côté de l'égalité avec la notation exponentielle imaginaire :

— $(\sin(\theta) + i\,\cos(\theta))^n = [i(\cos(\theta) - i\,\sin(\theta)]^n = i^n e^{-in\theta}$.

— $\sin(n\theta) + i\,\cos(n\theta) = i(\cos(n\theta) - i\,\sin(n\theta)) = ie^{-in\theta}$.

D'où :

$$i^n e^{-in\theta} = ie^{-in\theta} \quad \text{i.e.} \quad i^n = i.$$

Donc on cherche les $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $i^n = i$.

Soit $k \in \mathbb{Z}$, on a : $i^{4k} = (i^4)^k = 1^k = 1$
Donc : $i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i.$
Ainsi, les $n \in \mathbb{N}^*$ pour lesquels l'égalité est vérifiée sont les $n = 4k+1, \quad k \in \mathbb{Z}$.

10.5 Arguments d'un nombre complexe non nul, forme trigonométrique

Exercice 358 (①) par Martin Lambotte [*]

Soit $a \in \mathbb{C}$. Quelle est l'image de l'ensemble $\{a + 2e^{i\theta}\ ; \theta \in \mathbb{R}\}$?

L'image de l'ensemble $\{a + 2e^{i\theta},\ \theta \in \mathbb{R}\}$ est le cercle de rayon 2 et de centre le point d'affixe a.

Exercice 359 (②) par Martin Lambotte [*]

Soient $a \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{R}$. Quelle est l'image de l'ensemble des nombres complexes de la forme $a + re^{i\alpha}$ lorsque r décrit $\mathbb{R}$? $\mathbb{R}^+$? $[0, R]$ où $R \in \mathbb{R}^+$ est fixé ?

L'image de l'ensemble des nombres complexes de la forme $a + re^{i\alpha}$ lorsque r décrit $\mathbb{R}$ est la droite passant par le point d'affixe a et dirigée par le vecteur directeur d'affixe $e^{i\alpha}$.

L'image de l'ensemble des nombres complexes de la forme $a + re^{i\alpha}$ lorsque r décrit $\mathbb{R}^+$ est la demi-droite fermée ayant pour origine le point d'affixe a et dirigée par le vecteur directeur d'affixe $e^{i\alpha}$.

Pour la dernière question, on appelle Δ la demi-droite mentionnée ci-dessus et on place le point B sur Δ à une distance R du point d'affixe a. L'image de l'ensemble des nombres complexes de la forme $a+re^{i\alpha}$ lorsque r décrit $[0, R]$ où $R \in \mathbb{R}^+$ est fixé est alors le segment reliant le point d'affixe a au point B.

Exercice 360 (①) par Wéline Pujol [*]

Soit $z = \dfrac{-4}{1+i\sqrt{3}}$. Écrire z sous forme trigonométrique puis calculer z^3.
Retrouver le résultat de l'exercice 333 de 10.1.

On écrit

$$z = \frac{-4}{1+i\sqrt{3}} = \frac{-4\left(1-i\sqrt{3}\right)}{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{-4+4i\sqrt{3}}{4} = -1+i\sqrt{3}.$$

On a

$$|z| = \sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = 2,$$

d'où

$$z = 2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\ \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right).$$

Et donc

$$z^3 = \left(2\times \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3 = 2^3\times \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}\times 3} = 8\times \mathrm{e}^{i2\pi} = 8.$$

Exercice 361 (②) par Loïse Launay [*]

Mettre $z = 1+i\sqrt{3}$ sous forme trigonométrique et trouver les entiers naturels $n \in \mathbb{N}$ tels que

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)^n \in \mathbb{R}^+.$$

On a

$$z = 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\ \exp\left(\frac{i\pi}{3}\right).$$

D'où, si $n \in \mathbb{N}$,

$$z^n = 2^n\ \exp\left(\frac{ni\pi}{3}\right),$$

qui est dans $\mathbb{R}^+$ si et seulement si $\exp\left(\dfrac{ni\pi}{3}\right) \in \mathbb{R}^+$, i.e. si $\exp\left(\dfrac{ni\pi}{3}\right) = 1$ (car 1 est le seul nombre complexe de module 1 appartenant à $\mathbb{R}^+$), i.e. si $\dfrac{n\pi}{3} \in 2\pi\mathbb{Z}$, i.e. si $n \in 6\mathbb{Z}$, c'est-à-dire si n est divisible par 6.

Exercice 362 (②) par Loïse Launay

Soit f l'application de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \qquad f(x) = \frac{1}{z}.$$

On identifie $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$ un point du plan et son affixe. On considère une droite D passant par 0, un cercle C de centre 0.

a) Montrer que l'image de $D\setminus\{0\}$ est de la forme $D'\setminus\{0\}$ où D' est une droite passant par 0 que l'on précisera.

b) Montrer que l'image de C par f est un cercle que l'on précisera.

a) On dispose de $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que D soit l'image de $\{re^{i\alpha}\ ;\ r \in \mathbb{R}\}$. Or, si $r \in \mathbb{R}^*$,

$$f(re^{i\alpha}) = \frac{1}{r}e^{-i\alpha}.$$

Lorsque r décrit $\mathbb{R}^*$, il en est de même de $\frac{1}{r}$. Il s'ensuit que $f(D \setminus \{0\}) = D' \setminus \{0\}$, où D' est la droite passant par O et symétrique de X par rapport à l'axe des abscisses.

b) Notons r le rayon de C. Le cercle C est alors l'image de l'ensemble des points d'affixe $re^{i\theta}$ lorsque θ parcourt $\mathbb{R}$. Or, si $\theta \in \mathbb{R}$,

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{r}e^{-i\theta}.$$

Lorsque θ décrit $\mathbb{R}$, il en est de même de $-\theta$. Il s'ensuit que $f(C)$ est le cercle de centre 0 et de rayon $\frac{1}{r}$.

Exercice 363 (②) par Wéline Pujol [*]

a) En utilisant la forme trigonométrique, déterminer les nombres complexes dont le carré est un nombre réel.

b) En utilisant la forme trigonométrique, déterminer les nombres complexes dont le carré est un nombre imaginaire pur.

Soit $z \in \mathbb{C}$, on écrit

$$z = r\,e^{i\theta} \quad \text{où} \quad r = |z| \in \mathbb{R}^+ \quad \text{et} \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

a) On a $z^2 = r^2\,e^{2i\theta}$ qui est dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $z = 0$ ou $2i\theta \in i\pi\mathbb{Z}$, i.e. si $z = 0$ ou si θ est de la forme $k\frac{\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$, i.e., in fine, si z est réel ou imaginaire pur (selon la parité de k).

L'image de l'ensemble des solutions dans le plan est la réunion des deux axes de coordonnées.

b) De même, z^2 est imaginaire pur si et seulement si $z = 0$ ou si 2θ est de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, i.e. si $z = 0$ ou si θ est de la forme $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

L'image de l'ensemble des solutions dans le plan est la réunion des deux bissectrices principales.

Exercice 364 (②) par Loïse Launay [*]

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit

$$u_n = (1+i)^n + (1-i)^n.$$

a) Écrire $(1+i)^n$ et $(1-i)^n$ sous forme trigonométrique.

b) En déduire une expression de u_n.

c) Pour quels n a-t-on $u_n = 0$?

a) Mettons sous forme trigonométrique les nombres $1+i$ et $1-i$. On a immédiatement

$$1+i = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{et} \quad 1-i = \sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

On élève à la puissance n :

$$(1+i)^n = \left(\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n = \sqrt{2}^n e^{i\frac{n\pi}{4}} \quad \text{et} \quad (1-i)^n = \left(\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n = \sqrt{2}^n e^{-i\frac{n\pi}{4}}.$$

b) À l'aide de la mise sous forme trigonométrique réalisée à la question précédente, on en, pour $n \in \mathbb{N}$, une nouvelle expression de u_n :

$$u_n = (1+i)^n + (1-i)^n = \sqrt{2}^n e^{i\frac{n\pi}{4}} + \sqrt{2}^n e^{-i\frac{n\pi}{4}} = \sqrt{2}^n (e^{i\frac{n\pi}{4}} + e^{-i\frac{n\pi}{4}}) = 2\sqrt{2}^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$

c) On a donc

$$u_n = 0 \iff 2\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) = 0 \iff \frac{n\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi] \iff n \equiv 2\,[4].$$

Conclusion : u_n est nul si et seulement si n est de la forme $4k+2$ où $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 365 (②) par Térence Marchi

On veut résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(1) \qquad z^5 = \bar{z}.$$

Montrer que si z vérifie (1), alors z est nul ou de module 1. Conclure ; on montrera en particulier que l'équation admet 7 solutions.

Montrons que $\forall z \in \mathbb{C}, (z^5 = \bar{z}) \implies (z = 0 \text{ ou } |z|= 1)$

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^5 = \bar{z}$,

on a donc

$$|z^5| = |\overline{z}| \quad \text{i.e.} \quad |z|^5 = |z| \quad \text{i.e.} |z|^4(|z|-1) = 0 \quad \text{i.e.} |z| \in \{0,1\}.$$

Trouvons maintenant les solutions non nulles de (1).
Soit $z \in \mathbb{C}^*$ solution de (1). Alors $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$, de sorte que (1) équivaut à

$$e^{5i\theta} = e^{-i\theta},$$

c'est-à-dire à $5\theta \equiv -\theta\ [2\pi]$, ou encore à $\theta \equiv 0\ \left[\frac{\pi}{3}\right]$.

L'ensemble des solutions de (1) est donc

$$S = \left\{ e^{\frac{-2\pi}{3}i}; e^{\frac{-\pi}{3}i}; 1; e^{\frac{\pi}{3}i}; e^{\frac{2\pi}{3}i}; -1; 0 \right\}$$

10.6 Interprétation géométrique du module et de l'argument de $\dfrac{c-a}{b-a}$

Exercice 366 (③) par Loïse Launay [*]

Quels sont les nombres complexes non nuls z tels que les points d'affixes i, z, $\dfrac{1}{z}$ soient alignés ?

Si $z = -i$, les points d'affixes i, z, $\dfrac{1}{z}$ sont alignés. Sinon, ils sont alignés si et seulement si $\dfrac{z-i}{\frac{1}{z}-i}$ est réel. Écrivons $z = a+ib$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Le quotient précédent s'écrit

$$\frac{a+ib-i}{\frac{1}{a+ib}-i} = (a+ib)\,\frac{a+i(b-1)}{1+b-ai}$$

et

$$\frac{a+i(b-1)}{1+b-ai} = (a+ib)\frac{(a+i(b-1))(1+b+ai)}{(1+b-ai)(1+b+ai)}.$$

Soit :
$$\frac{a+i(b-1)}{1+b-ai} = (a+ib)\,\frac{a+ab+a^2i+i(b-1)+ib(b-1)-a(b-1))}{(1+b)^2+a^2}.$$
Simplifions :
$$\frac{a+ab+a^2i+i(b-1)+ib(b-1)-a(b-1))}{(1+b)^2+a^2} = \frac{a+ab+a^2i+ib-i+ib^2-ib-ab+a}{(1+b)^2+a^2}.$$

$$\begin{aligned}(a+ib)&\frac{a+ab+a^2i+i(b-1)+ib(b-1)-a(b-1))}{(1+b)^2+a^2}\\ &= (a+ib)\frac{a+ab+a^2i+ib-i+ib^2-ib-ab+a}{(1+b)^2+a^2}.\end{aligned}$$

D'où :
$$(a+ib)\frac{a+ab+a^2i+ib-i+ib^2-ib-ab+a}{(1+b)^2+a^2} = (a+ib)\frac{2a+i(a^2+b^2-1)}{(1+b)^2+a^2}.$$
Soit :
$$(a+ib)\frac{2a+i(a^2+b^2-1)}{(1+b)^2+a^2} = \frac{2a^2+i2ab+ia(a^2+b^2-1)-b(a^2+b^2-1)}{(1+b)^2+a^2}.$$
On écrit la forme algébrique du quotient :
$$\frac{a+ib-i}{\frac{1}{a+ib}-i} = \frac{2a^2-b(a^2+b^2-1)}{(1+b)^2+a^2} + i\frac{2ab+a(a^2+b^2-1)}{(1+b)^2+a^2}.$$

Or,
$$\begin{aligned}\frac{z-i}{\frac{1}{z}-i}\in\mathbb{R} \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{Im}\left(\frac{z-i}{\frac{1}{z}-i}\right)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2ab+a(a^2+b^2-1)=0\\ &\Leftrightarrow \quad 2b+a^2+b^2-1=0 \ \text{ ou } \ a=0\\ &\Leftrightarrow \quad a^2+(b-1)^2=2 \quad \text{ou} \quad a=0\end{aligned}$$

Conclusion : i, z, $\frac{1}{z}$ sont alignés si et seulement si z est un imaginaire pur non nul (son image dans le plan complexe appartient à l'axe imaginaire privé de l'origine du plan complexe) ou si son image dans le plan complexe appartient au cercle de centre le point A d'affixe i et de rayon $\sqrt{2}$.

Exercice 367 (②) par Quentin Lepine

Quels sont les nombres complexes z tels que le triangle dont les sommets ont pour affixes $1, i, z$ soit rectangle en z ?

Le triangle dont les sommets ont pour affixe $1, i, z$ est rectangle en z si et seulement si $\dfrac{i-z}{1-z}\in i\mathbb{R}$ avec $z\neq 1$. On exclut également $z=i$ pour que le triangle ait trois points distincts.*
Ainsi, on pose $z=a+ib$, avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et on détermine la forme algébrique du quotient :
$$\begin{aligned}\frac{i-z}{1-z} &= \frac{-a+i(1-b)}{(1-a)-ib}\\ &= \frac{[-a+i(1-b)][(1-a)+ib]}{[(1-a)-ib][(1-a)+ib]}\\ &= \frac{a^2-a+b^2-b+i(1-b)(1-a)-iab}{(1-a)^2+b^2}\\ \frac{i-z}{1-z} &= \frac{a^2-a+b^2-b}{(1-a)^2+b^2} + i\frac{-a-b+1}{(1-a)^2+b^2}.\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}\frac{i-z}{1-z}\in i\mathbb{R} &\Leftrightarrow \mathfrak{Re}(\frac{i-z}{1-z})=0\\ &\Leftrightarrow \frac{a^2-a+b^2-b}{(1-a)^2+b^2}=0\\ &\Leftrightarrow a^2-a+b^2-b=0\\ &\Leftrightarrow (a-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}+(b-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}=0\\ &\Leftrightarrow (a-\frac{1}{2})^2+(b-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Si et seulement si l'image de z appartient au cercle de centre $(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Or, les points $(1;0)$ d'affixe 1 et $(0;1)$ d'affixe i sont sur ce cercle, donc le triangle dont les sommets ont pour affixe $1, i, z$ est rectangle en z si et seulement si l'image de z appartient au cercle de centre $(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$, privé des points de coordonnées $(1,0)$ et $(0,1)$.

Remarque. On aurait pu utiliser $\dfrac{1-z}{i-z}$, ce qui n'aurait rien changé au résultat car $\dfrac{i-z}{1-z}\in i\mathbb{R}$ équivaut à $\dfrac{1-z}{i-z}\in i\mathbb{R}$. Cela donne une autre explication à $z\neq i$.

EXERCICE 368 (③) par Loïse Launay

Soient a, b et c trois nombres complexes distincts, A, B et C leurs images dans le plan.

a) A quelle condition sur $\dfrac{c-a}{b-a}$ le triangle ABC est-t-il équilatéral de sens direct ? de sens indirect ?

b) Montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$.

a) Le triangle ABC est équilatéral de sens direct si et seulement si

$$AB=AB \quad \text{et} \quad (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})=\frac{\pi}{3}[2\pi],$$

i.e. si et seulement si

$$\frac{c-a}{b-a}=e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

On vérifie que cette condition s'écrit aussi $a+bj+cj^2=0$.
De même, le triangle ABC est équilatéral de sens indirect si et seulement si

$$\frac{c-a}{b-a}=e^{i\frac{-\pi}{3}}[2\pi].$$

On vérifie que cette condition s'écrit aussi $a+bj^2+cj=0$.

b) Le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $AB=AC=BC$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})=(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}})$.
On peut traduire ceci par l'égalité suivante :

$$\frac{c-a}{b-a}=\frac{a-b}{c-b}\Leftrightarrow (c-a)(c-b)=(a-b)(b-a).$$

On développe les deux membres de l'égalité :

$$(c-a)(c-b)=(a-b)(b-a)\Leftrightarrow c^2-ac-b+ab=ab-b^2-a^2+ab\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac=0.$$

On a démontré l'équivalence suivante : ABC est un triangle équilatéral si et seulement si $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac=0$.

Remarque. Une autre façon de démontrer b) est d'utiliser a). Le triangle ABC est équilatéral si et seulement si

$$(a+bj+cj^2)\,(a+bj^2+cj)=0.$$

On vérifie par un calcul simple que cette relation équivaut à celle de l'énoncé.

Exercice 369 (④) par Tristan Hottier [*]

Soient, dans les questions a) à c), a, b, c trois éléments distincts de $\mathbb{U}$, A, B, C leurs images.

a) Quel est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC ?

b) Soit M un point du plan d'affixe z. En remarquant que le conjugué d'un élément de $\mathbb{U}$ est égal à son inverse, montrer que M appartient à la hauteur du triangle ABC issue de C si et seulement si
$$\overline{z} = \frac{z}{ab} + \frac{1}{c} - \frac{c}{ab}$$

c) Montrer que les trois hauteurs de ABC concourent au point d'affixe
$$h = a + b + c.$$

d) Montrer que dans un triangle quelconque ABC, l'orthocentre H, le centre de gravité G et le centre du cercle circonscrit O sont alignés et vérifient la relation d'Euler
$$\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}.$$

a) Comme a, b, c sont des éléments distincts de $\mathbb{U}$, leurs images sont sur le cercle trigonométrique qui devient alors le cercle circonscrit au triangle ABC. Son centre est donc l'origine du repère, i.e. le point d'affixe 0.

b) Le point M d'affixe z est sur la hauteur issue de C si et seulement si on a la relation suivante :
$$\frac{z-c}{b-a} = -\overline{\left(\frac{z-c}{b-a}\right)}.$$

Or,

$$\frac{z-c}{b-a} = -\overline{\left(\frac{z-c}{b-a}\right)} \iff \frac{z-c}{b-a} = -\frac{\overline{z}-\overline{c}}{\overline{b}-\overline{a}} \iff \frac{z-c}{b-a} \times \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) = -\overline{z} + \overline{c}$$
$$\iff \overline{z} = \frac{z}{ab} + \frac{1}{c} - \frac{c}{ab}$$

c) D'après la question précédente, M d'affixe z est sur la hauteur issue de C si et seulement si
$$\overline{z} = \frac{z}{ab} + \frac{1}{c} - \frac{c}{ab}.$$

De la même manière, M est sur la hauteur issue de A (resp. B) si et seulement si
$$\overline{z} = \frac{z}{bc} + \frac{1}{a} - \frac{a}{bc}, \left(\text{resp. } \overline{z} = \frac{z}{ca} + \frac{1}{b} - \frac{b}{ca}\right).$$

Ainsi, M est l'intersection des hauteurs issues de A et B si et seulement si
$$\frac{z}{bc} + \frac{1}{a} - \frac{a}{bc} = \frac{z}{ca} + \frac{1}{b} - \frac{b}{ca}.$$

Or,

$$\frac{z}{bc} + \frac{1}{a} - \frac{a}{bc} = \frac{z}{ca} + \frac{1}{b} - \frac{b}{ca} \iff \frac{za + bc - a^2}{abc} = \frac{zb + ca - b^2}{abc} \iff z\,(a-b) = ca - b^2 - bc + a^2,$$

c'est-à-dire

$$\frac{z}{bc} + \frac{1}{a} - \frac{a}{bc} = \frac{z}{ca} + \frac{1}{b} - \frac{b}{ca} \iff z\,(a-b) = (a-b)\,(a+b) + c\,(a-b)$$
$$\iff z\,(a-b) = (a-b)\,(a+b+c),$$

i.e.

$$z = a + b + c.$$

Le point d'affixe $a+b+c$ est le point d'intersection des hauteurs issues de A et B. Par symétrie de l'expression $a+b+c$, ce point est également le point d'intersection des hauteurs issues de B et C. On le nomme alors H et son affixe est

$$h = a + b + c$$

d) Soit ABC un triangle quelconque. Sans perdre de généralité, on peut supposer que les affixes de A, B, C sont des éléments distincts de $\mathbb{U}$: cela revient simplement à transformer la figure d'abord par une translation, puis par une homothétie, ou de façon équivalente, à choisir l'unité de longueur de sorte que le cercle circonscrit ait pour rayon 1 et à centrer le repère sur le centre du cercle circonscrit.
D'après la question c), on a alors la relation

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

On sait également depuis l'exercice 352 que le centre de gravité G d'un triangle a pour affixe

$$g = \frac{a+b+c}{3}$$

On obtient finalement l'égalité suivante (Euler) :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) \quad \Leftrightarrow \quad 3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \quad \Leftrightarrow \quad 3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH}.$$

Comme $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OG}$ sont colinéaires, les points H, G et O sont alignés.

Exercice 370 (⑤) par Tristan Hottier [*]

On reprend les notations de l'exercice précédent.

a) Montrer que le cercle de rayon $\frac{1}{2}$ et dont le centre a pour affixe $\frac{h}{2}$ contient les milieux des côtés de ABC, les milieux des segments joignant l'orthocentre aux sommets, les pieds des hauteurs.

b) Énoncer le théorème établi dans un triangle quelconque.

---

a) Les milieux des côtés ont pour affixes respectives

$$a' = \frac{b+c}{2}, \quad b' = \frac{c+a}{2}, \quad c' = \frac{a+b}{2}.$$

On a donc

$$\left|a' - \frac{h}{2}\right| = \left|\frac{b+c-(a+b+c)}{2}\right| = \left|\frac{-a}{2}\right| = \frac{1}{2}.$$

Le point d'affixe a' appartient au cercle de l'énoncé. Par symétrie (le choix de A parmi les sommets ne joue aucun rôle particulier), il en est de même des points d'affixes b' et c'.
Le milieu du segment joignant l'orthocentre à A a pour affixe

$$a'' = \frac{a+h}{2} = a + \frac{b+c}{2}.$$

On a donc

$$\left|a'' - \frac{h}{2}\right| = \left|\left(a + \frac{b+c}{2}\right) - \frac{a+b+c}{2}\right| = \left|\frac{a}{2}\right| = \frac{1}{2}.$$

Le point d'affixe a'' appartient au cercle de l'énoncé. Par symétrie, il en est de même des milieux des segments joignant l'orthocentre à B et C.

Déterminons maintenant le pied de la hauteur issue du point d'affixe A. L'exercice précédent montre que le point d'affixe z appartient à cette hauteur si et seulement si

$$\overline{z} = \frac{z}{bc} + \frac{1}{a} - \frac{a}{bc}.$$

D'autre part, le point d'affixe z appartient au côté BC si et seulement si

$$\frac{z-b}{b-c} = \overline{\left(\frac{z-b}{b-c}\right)},$$

qui, puisque b et c sont de module 1, se réécrit

$$\overline{z} = -\frac{z}{bc} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

En soustrayant les deux équations, on voit que le pied de la hauteur issue de A a pour affixe z donné par

$$\frac{2z}{bc} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{a} + \frac{a}{bc}.$$

Notons plutôt a''' l'affixe du pied de la hauteur issue de A. Ce qui précède entraîne que

$$a''' = \frac{1}{2}\left(a + b + c - \frac{bc}{a}\right) = \frac{h}{2} - \frac{bc}{2a}.$$

Par suite

$$\left|a''' - \frac{h}{2}\right| = \left|-\frac{bc}{2a}\right| = \frac{1}{2},$$

puisque a, b, c sont de module 1. Le point d'affixe a''' appartient donc au cercle de l'énoncé. Par symétrie, il en est de même des pieds des hauteurs issues de B et C.

b) En raisonnant comme dans la question d) de l'exercice précédent, on obtient le théorème suivant (dit du cercle des neuf points).

Soit ABC un triangle quelconque. Notons H l'orthocentre de ABC, O le centre du cercle circonscrit à ABC, I le milieu de $[GH]$. Les milieux des côtés de ABC, les milieux des segments joignant l'orthocentre aux hauteurs et les pieds des hateurs sont situés sur un même cercle, dont le centre est le milieu de OH et le rayon la moitié de celui du cercle circonscrit.

10.7 La formule du binôme

EXERCICE 371 (③) par Antonin Demairé [*]

Pour $n \in \mathbb{R}$, donner une expression simple de la somme

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

On note

$$f : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

La fonction f est polynomiale et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n.$$

Il existe une constante réelle C telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} + C.$$

Pour déterminer C, on utilise la relation $f(0) = 0$, qui donne

$$C = -\frac{1}{n+1}.$$

On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{(1+x)^{n+1} - 1}{n+1}.$$

EXERCICE 372 (②) par Antonin Demairé [*]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la moyenne des cardinaux des parties de $\{1, \dots, n\}$?

Le nombre de parties de $\{1, \dots, n\}$ est classiquement 2^n.

Si $0 \leq k \leq n$, le nombre de parties de $\{1, \dots, n\}$ à k éléments est $\binom{n}{k}$.

La moyenne cherchée est donc

$$\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k = \frac{n\, 2^{n-1}}{2^n} = \frac{n}{2}.$$

(La somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k$ est calculée dans l'exemple 2 après le théorème 11 ; faire $x = 1$.)

Remarque. On peut aussi regrouper une partie A de $\{1, \dots, n\}$ contenant 1 avec la partie $\overline{A}$. On obtient alors :

$$S = \frac{1}{2^n} \sum_{A \in \mathcal{P}(\{1,\dots,n\})} |A| = \frac{1}{2^n} \sum_{\substack{A \in \mathcal{P}(\{1,\dots,n\}) \\ 1 \in A}} \left(|A| + |\overline{A}|\right) = \frac{1}{2^n} \sum_{\substack{A \in \mathcal{P}(\{1,\dots,n\}) \\ 1 \in A}} n.$$

Or, le nombre de parties A de $\{1, \dots, n\}$ contenant 1 est égal au nombre de parties de $\{2, \dots, n\}$. On a donc

$$S = \frac{2^{n-1} n}{2^n} = \frac{n}{2}.$$

EXERCICE 373 (③) par Antoine Charki[*]

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$. Déduire de l'exemple 2 la variance d'une variable d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n, p)$

Soit $a \in \mathbb{R}$. La formule du binome donne

$$(x + a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} x^k.;$$

On dérive deux fois cette identité par rapport à x. Il vient :

$$n(n-1)(a+x)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot k(k-1) \cdot x^{k-2} \cdot a^{n-k}.$$

En multipliant des deux cotés par x^2 et en développant à droite on trouve :

$$n(n-1)x^2(a+x)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot k^2 \cdot x^k \cdot a^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot k \cdot x^k \cdot a^{n-k}.$$

Soit maintenant X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. En prenant $x = p$ et $a = 1 - p$ dans la formule précédente, on a :

$$p^2 n(n-1) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X).$$

Comme $\mathbb{E}(X) = np$ on trouve finalement :

$$np(p-1) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{V}(X).$$

Exercice 374 (②) par Antonin Demairé[*]

Trouver deux fonction polynomiales P et Q telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos(4x) = P(\cos(x)), \quad \sin(4x) = \sin(x)Q(\cos(x)).$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Rappelons quelques formules de trigonométrie

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1, \quad \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1, \quad \sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$$

On en déduit que

$$\cos(4x) = 2\cos^2(2x) - 1 = 2(2\cos^2(x) - 1)^2 - 1 = 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1.$$

Il suffit de définir P par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1.$$

Maintenant,

$$\sin(4x) = 2\cos(2x)\sin(2x) = 4\sin(x)\cos(x)(2\cos^2(x) - 1) = \sin(x)(8\cos^3(x) - 4\cos(x)).$$

Il suffit de définir Q par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = 8x^3 - 4x.$$

Exercice 375 (③) par Georges Faraj[*]

1. Déterminer une fonction polynomiale P telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(5x) = P(\cos(x)).$$

2. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

a) Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la formule de Moivre, on a :

$$(\cos(x) + i\sin(x))^5 = \cos(5x) + i\sin(5x).$$

En utilisant la formule du binôme de Newton, on obtient :

$$\begin{aligned}(\cos(x) + i\sin(x))^5 &= \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} \cdot \cos(x)^k \cdot i\sin(x)^{5-k} \\ &= 5\sin(x)\cdot\cos(x)^4\ i - 10\sin(x)^3\cdot\cos(x)^2\ i + \sin(x)^5\ i + \cos(x)^5 - \\ &- 10\sin(x)^2\cdot\cos(x)^3 + 5\sin(x)^4\cdot\cos(x) \\ &= \cos(x)^5 + 10\cdot\cos(x)^5 - 10\cdot\cos(x)^3 + 5\cdot\cos(x)^5 - \\ &- 10\cdot\cos(x)^3 + 5\cdot\cos(x) + \\ &+ 5\sin(x)\cdot\cos(x)^4 i - 10\sin(x)^3\cdot\cos(x)^2 i + \sin(x)^5 i.\end{aligned}$$

On prend alors les parties réelles,

$$\begin{aligned}\cos(5x) = \Re\Big(&\cos(x)^5 + 10\cdot\cos(x)^5 - 10\cdot\cos(x)^3 + \\ &+ 5\cdot\cos(x)^5 - 10\cdot\cos(x)^3 + 5\cdot\cos(x) + \\ &+ 5\sin(x)\cdot\cos(x)^4 i - 10\sin(x)^3\cdot\cos(x)^2 i + \sin(x)^5 i\Big) \\ &= 16\cdot\cos(x)^5 - 20\cdot\cos(x)^3 + 5\cdot\cos(x).\end{aligned}$$

Il suffit ainsi de définir P par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad P(x) = 6x^5 - 20x^3 + 5x.$$

b) Posons $\dfrac{\pi}{10} = x$. Alors,

$$0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 16\cdot\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)^5 - 20\cdot\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)^3 + 5\cdot\cos\left(\frac{\pi}{10}\right).$$

On est conduit à poser $y = \cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$. On a donc, d'après l'équation précédente et puisque $y \neq 0$ (et même $y > 0$, car $0 \leq \dfrac{\pi}{10} < \dfrac{\pi}{2}$) :

$$16y^4 - 20y^2 + 5 = 0.$$

C'est une équation bicarrée, i.e. une équation du second degré en y^2, qui admet quatre racines réelles :

$$x_1 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}},\quad x_2 = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}},\quad x_3 = -\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}},\quad x_4 = -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}.$$

Comme $y > 0$, y est égal à x_1 ou x_2. Puisque $\dfrac{\pi}{10} > \dfrac{\pi}{6}$ et que cos est strictement décroissante sur $[0,\pi]$,

$$y > \frac{\sqrt{3}}{2} > x_1.$$

Il s'ensuit que

$$\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = x_2 = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}.$$

Exercice 376 (②) par Antonin Demairé[*]

a) Ecrire x$\mapsto \cos^3(x)$ comme combinaison linéaire des fonctions

$$x \mapsto \cos(kx), k\in\{0,1,2,3\}.$$

b) Ecrire x$\mapsto \cos^4(x)$ comme combinaison linéaire des fonctions

$$x \mapsto \cos(kx), k\in\{0,1,2,3,4\}.$$

Pour $x\in\mathbb{R}$, on a, en utiilisant la formule du binôme :

$$\cos^3(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{e^{3ix}+e^{-3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}}{8} = \frac{\cos(3x)+3\cos(x)}{4}.$$

Et :

$$\cos^4(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4 = \frac{e^{4ix}+e^{4ix}+4e^{2ix}+4e^{-2ix}+6}{16} = \frac{\cos(4x)+4\cos(2x)+3}{8}.$$

EXERCICE 377 (④) par Alexandre Camelin[∗]

Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que la fonction
$$x \mapsto \cos^n(x)$$
est une combinaison linéaire de fonctions
$$x \longmapsto \cos(kx), \quad k \in \{0, ..., n\}.$$

b) Calculer en utilisant a) :
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^n(x)dx.$$

a) S Si n est pair, on a, pour $x \in \mathbb{R}$,
$$\cos^n(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ikx}e^{-i(n-k)x}.$$
$$\cos^n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}e^{i(2k-n)x} = \frac{1}{2^n}\left(\binom{n}{\frac{n}{2}} + \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}\binom{n}{k}(e^{i(2k-n)x}e^{i(n-2k)x})\right).$$
Soit encore :
$$\cos^n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{1}{2}\binom{n}{\frac{n}{2}} + \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}\binom{n}{k}\cos((2k-n)x)\right).$$
Si n est impair, un calcul analogue montre que, pour $x \in \mathbb{R}$,
$$\cos^n(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=o}^{\frac{n+1}{2}}\binom{n}{k}(e^{i(2k-n)x}+e^{i(n-2k)x}) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\frac{n+1}{2}}\binom{n}{k}\cos((2k-n)x).$$

b) Remarquons que si $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$,
$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)dx = \left[\frac{1}{k}\sin(kx)\right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$
On utilise ici la linéarité de l'intégrale. Si n est pair :
$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^n(x)dx = \frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\binom{n}{\frac{n}{2}}dx + \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}\binom{n}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos((2k-n)x)dx\right) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{\frac{n}{2}}(2\pi)$$
Soit :
$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^n(x)dx = \frac{1}{2^{n-1}}\binom{n}{\frac{n}{2}}\pi.$$
Et si n est impair :
$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^n(x)dx = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{\frac{n+1}{2}}\binom{n}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos((2k-n)x)dx = 0.$$

Exercice 378 (③) par Alexandre Camelin[*]

Soit $p \in \mathbb{N}$. À l'aide de l'exercice précédent, retrouver l'intégrale W_{2p} de **8.6**.

Soit $p \in \mathbb{N}$. D'après l'exercice 377, on a :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2p}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2^{2p-1}}\binom{2p}{p}\pi$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2p}(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{0} \cos^{2p}(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} \cos^{2p}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_{0}^{\pi} \cos^{2p}(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{(la fonction cosinus étant paire)} \\ &= 2(\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p}(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^{2p}(x)\,\mathrm{d}x)\end{aligned}$$

Or,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^{2p}(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^{2p}(\pi-u)\,\mathrm{d}u = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p}(u)\,\mathrm{d}u \quad \text{(en posant } u = \pi - x\text{)}$$

donc

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2p}(x)\,\mathrm{d}x = 4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p}(x)\,\mathrm{d}x = 4W_{2p}.$$

ainsi :

$$\begin{aligned}W_{2p} &= \frac{1}{2^{2p+1}}\binom{2p}{p}\pi \\ &= \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\cdot\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2p)\cdot(2p-1)\cdot\ldots\cdot 1}{((2p)\cdot(2(p-1))\cdot\ldots\cdot 2)^2}\cdot\frac{\pi}{2} \\ W_{2p} &= \frac{(2p-1)\cdot(2p-3)\cdot\ldots\cdot 1}{(2p)\cdot(2p-2)\cdot\ldots\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

et on retrouve donc bien le résultat de la section **8.6**.

Exercice 379 (③) par Antonin Demairé [*]

a) Montrer que, si $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, la fonction

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto \cos(x)^m \sin(x)^n$$

est combinaison linéaire de fonctions de la forme

$$u_p : x \in \mathbb{R} \longmapsto \cos(x)^p \text{ et } v_p : x \in \mathbb{R} \longmapsto \cos(x)^p \sin(x), \text{ avec } p \in \mathbb{N}.$$

b) Expliquer comment calculer les primitives de u_p et v_p sur $\mathbb{R}$.

c) Application numérique : déterminer les primitives de

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto \cos(x)^3 \sin(x)^5 \qquad \text{et de} \qquad x \in \mathbb{R} \longmapsto \cos(x)^3 \sin(x)^4.$$

a) Si n est pair, on a, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(x)^m \sin(x)^n = \cos^m(x)(1-\cos^2)^{\frac{n}{2}}$$

et, si n est impair on a , pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(x)^m \sin(x)^n = \cos^m(x)(1-\cos^2)^{\frac{n-1}{2}} \sin(x)$$

Dans tous les cas, on a bien une combinaison linéaire de fonctions de la forme

$$u_p : x \in \mathbb{R} \longmapsto \cos(x)^p \text{ et } v_p : x \in \mathbb{R} \longmapsto \cos(x)^p \sin(x), \text{ avec } p \in \mathbb{N}.$$

b) Pour le calcul des primitives de u_p rendez-vous à l'exercice 377 !
Pour v_p, remarquons que $\cos' = -\sin$,d'où, avec les notations abusives usuelles pour les primitives,

$$\int \cos^p(x)\sin(x)dx = -\frac{\cos^{p+1}(x)}{p+1} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

c) On a, si $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\cos(x)^3\sin(x)^5 &= \cos(x)^3(1-\cos^2(x))^2\sin(x)\\ &= (\cos^7(x) - 2\cos^5(x) + \cos^3(x))\sin(x).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int \cos(x)^3\sin(x)^5 dx &= \int (\cos^7(x) - 2\cos^5(x) + \cos^3(x))\sin(x)dx\\ &= -\frac{\cos^8(x)}{8} + \frac{\cos^6(x)}{3} - \frac{\cos^4(x)}{4} + C, \quad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}\cos(x)^3\sin(x)^4 &= \cos(x)^3(1-\cos^2(x))^2\\ &= \cos^7(x) - 2\cos^5(x) + \cos^3(x)\\ \text{la linéarisation est laissé au lecteur} \quad &= \frac{\cos(7x) - \cos(5x) - 3\cos(3x) + 3\cos(x)}{64}\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\int \cos(x)^3\sin(x)^4 dx &= \int (\cos^7(x) - 2\cos^5(x) + \cos^3(x))dx\\ &= \int \frac{\cos(7x) - cos(5x) - 3cos(3x) + 3cos(x)}{64}dx\\ &= \frac{3\sin(x)}{64} - \frac{1}{64}\sin(3x) - \frac{1}{320}\sin(5x) + \frac{1}{448}\sin(7x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

EXERCICE 380 (④) par Antonin Demairé [*]

Soient f et g deux fonctions n fois dérivables sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$. Montrer que la dérivée n-ième du produit fg est donnée par la formule de Leibniz :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}.$$

On démontre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathcal{P}_n$: pour tout couple (f, g) de fonctions n fois dérivables de I dans $\mathbb{R}$, fg est n fois dérivable sur I et :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}.$$

Initiatilisation. La propriété $\mathcal{P}_1$ est connue (dérivée d'un produit).

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathcal{P}_n$ démontrée. Soient f et g deux fonctions $n+1$ fois dérivables sur I. Ces fonctions sont en particulier n fois dérivables sur I, donc fg est n fois dérivable sur I et :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}.$$

Si $k \in \{0, \ldots, n\}$, $n-k \in \{0, \ldots, n\}$. les fonctions $f^{(n-k)}$ et $g^{(k)}$ sont donc dérivables sur I. Il en est de même de leur produit. Il s'ensuit que, par linéairité, $(fg)^{(n)}$ est dérivable sur I de dérivée

$$(fg)^{(n+1)} = \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}\right]' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(n-k)} g^{(k)}\right)',$$

c'est-à-dire

$$(fg)^{n+1)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k+1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n+1-k)} g^{(k)}.$$

On fait le changement d'indice l=k+1 dans la première somme. Il vient

$$(fg)^{(n+1)} = \sum_{l=1}^{n+1} \binom{n}{l-1} f^{(n+1-l)} g^{(l)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n+1-k)} g^{(k)},$$

soit enfin

$$(fg)^{(n+1)} = fg^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right]}_{\binom{n+1}{k}} f^{(n-k+1)} g^{(k)} + f^{(n+1)} g = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)} g^{(k)}.$$

On a établi $\mathcal{P}_{n+1}$.

10.8 Complément : technique de l'arc moitié

EXERCICE 381 (②) par Antonin Demairé[∗]

Soient α et β deux réels, $Z = e^{i\alpha} + e^{i\beta}$.

a) En factorisant par $e^{i\alpha}$ dans Z, trouver le module de Z et, si Z est non nul, un argument de Z.

b) Retrouver les formules donnant $\cos(\alpha) + \cos(\beta)$ et $\sin(\alpha) + \sin(\beta)$.

a) On écrit

$$Z = e^{i\alpha} + e^{i\beta} = (1 + e^{i(\beta-\alpha)})e^{i\alpha} = 2\cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}} e^{i\alpha} = 2\cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) e^{i\frac{\beta+\alpha}{2}}.$$

Il s'ensuit que

$$|Z| = 2\left|\cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\right|.$$

Supposons $Z \neq 0$, ie. $2\cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) \neq 0$.

Si $2\cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) > 0$, la formule précédente montre que $\frac{\alpha+\beta}{2}$ est un argument de Z.

Si $2\cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) < 0$, on écrit

$$Z = -2\cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) e^{i\left(\frac{\beta+\alpha}{2}+\pi\right)}.$$

Il s'ensuit que $\frac{\alpha+\beta}{2} + \pi$ est un argument de Z.

b) On prend la partie réelle et la partie imaginairedans la formule de la première ligne de la solution ;

$$\cos(\alpha)+\cos(\beta)=2\cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta+\alpha}{2}\right),\quad \sin(\alpha)+\sin(\beta)=2\cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta+\alpha}{2}\right).$$

EXERCICE 382 (③) par Antonin Demairé[*]

Soient n dans $\mathbb{N}^*$, $x\in\mathbb{R}$. En appliquant la formule du binôme à $(1+e^{ix})^n$ et en utilisant la technique de l'arc moitié, établir les formules

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(kx)=2^n(\cos(x/2))^n\cos(nx/2),\quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(kx)=2^n(\cos(x/2))^n\sin(nx/2).$$

On écrit

$$(1+e^{ix})^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ikx}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\cos(kx)+i\sin(x))=\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(kx)}_{\text{partie réelle}}+i\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(x)}_{\text{partie imaginaire}}.$$

Soit

$$(1+e^{ix})^n=(e^{i\frac{x}{2}}(e^{-i\frac{x}{2}}+e^{i\frac{x}{2}}))^n=e^{i\frac{nx}{2}}(2\cos(\frac{x}{2})^n=(\cos(\frac{nx}{2})+i\sin(\frac{nx}{2}))(2\cos(\frac{x}{2}))^n.$$

Soit encore

$$(1+e^{ix})^n=\underbrace{2^n\cos(\frac{nx}{2})\cos(\frac{x}{2})^n}_{\text{partie réelle}}+\underbrace{i2^n\sin(\frac{nx}{2})\cos(\frac{x}{2})^n}_{\text{partie imaginaire}}.$$

On en déduit alors que

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(kx)=2^n(\cos(x/2))^n\cos(nx/2)$$
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(kx)=2^n(\cos(x/2))^n\sin(nx/2).$$

EXERCICE 383 (③) par Antonin Demairé[*]

Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$, donner une expression simple de $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^ke^{ikx}$. En déduire des expressions simples de

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\cos(kx),\qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\sin(kx).$$

On écrit

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k e^{ikx} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k(\cos(kx)+i\sin(x)) \\
&= \underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\cos(kx)}_{\text{partie réelle}}+i\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\sin(x)}_{\text{partie imaginaire}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k e^{ikx} &= (e^{ix}-1)^n \\
&= (e^{i\frac{x}{2}}(e^{i\frac{x}{2}}-e^{-i\frac{x}{2}}))^n \\
&= e^{i\frac{nx}{2}}(2i\sin(\frac{x}{2}))^n \\
&= (\cos(\frac{nx}{2})+i\sin(\frac{nx}{2}))(2i\sin(\frac{x}{2}))^n \\
&= (2i)^n\cos(\frac{nx}{2})\sin(\frac{x}{2})^n+i(2i)^n\sin(\frac{nx}{2})\sin(\frac{x}{2})^n.
\end{aligned}$$

Si n est pair, on écrit $n=2m$ aevc $m\in\mathbb{N}$. Alors :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\cos(kx)=4^m(-1)^m\cos(mx)\sin(\frac{x}{2})^{2m},$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\sin(kx)=4^m(-1)^m\sin(mx)\sin(\frac{x}{2})^{2m}.$$

Si n est impair, on écrit $n=2m+1$ avec $m\in\mathbb{N}$. Alors :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\cos(kx)=2.4^m(-1)^{m+1}\sin(mx+\frac{x}{2})\sin(\frac{x}{2})^{2m+1},$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\sin(kx)=2.4^m(-1)^m\cos(mx+\frac{x}{2})\sin(\frac{x}{2})^{2m+1}.$$

Exercice 384 (③) par Lancelot Achour [∗]

Soit f l'application de $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\forall z\in\mathbb{C}\setminus\{1\},\quad f(z)=\frac{1}{1-z}.$$

Déterminer l'image par f de $\mathbb{U}\setminus\{1\}$.

On fixe $z\in\mathbb{U}\backslash\{1\}$, ainsi il existe $\theta\in]0,2\pi[$ tel que $z=e^{i\theta}$. On utilise alors l'arc moitié :

$$f(z)=f(e^{i\theta})=\frac{1}{1-e^{i\theta}}=\frac{e^{i\theta/2}}{e^{-i\theta/2}-e^{i\theta/2}}=\frac{\cos(\theta/2)+i\sin(\theta/2)}{2i\sin(\theta/2)}=-\frac{i}{2}\text{cotan}(\theta/2)+\frac{1}{2}.$$

Or :
- — la fonction $\theta\in]0,2\pi[\mapsto\theta/2$ est une bijection de $]0,2\pi[$ sur $]0,\pi[$,
- — la fonction cotan est une bijection de $]0,\pi[$ sur $\mathbb{R}$,
- — la fonction $x\in\mathbb{R}\mapsto-\frac{x}{2}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Finalement, la fonction $\theta\in]0,\pi/2[\mapsto-\frac{i}{2}\cot(\theta/2)$ est une bijection de $]0,2\pi[$ sur $i\mathbb{R}$ par composition des bijections. On en déduit que :

$$f(\mathbb{U}\setminus\{1\})=i\mathbb{R}+\frac{1}{2}:=\left\{ix+\frac{1}{2}:\ x\in\mathbb{R}\right\}.$$

10.9 Complément : calcul de sommes trigonométriques

Exercice 385 (③) par Lancelot Achour [*]

Soient $x \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(x) \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Simplifier les sommes :

$$U_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{\cos^k(x)} \quad \text{et} \quad V_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(kx)}{\cos^k(x)}.$$

À l'aide de la formule de Moivre, on écrit :

$$U_n(x) + iV_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{e^{ix}}{\cos(x)}\right)^k,$$

qui est une progression géométrique.

La raison est 1 si et seulement si $\sin(x) = 0$, i.e. si $x \in \pi\mathbb{Z}$. Dans ce cas, la somme est $n+1$ et

$$U_n(x) = n+1, \qquad V_n(x) = 0.$$

Sinon :

$$\begin{aligned}
\frac{1 - \left(\frac{e^{ix}}{\cos(x)}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{e^{ix}}{\cos(x)}\right)} &= \frac{\cos^{n+1}(x) - e^{i(n+1)x}}{\cos^{n+1}(x) - \cos^n(x)e^{ix}} \\
&= \frac{1}{\cos^n(x)} \frac{\cos^{n+1}(x) - \cos((n+1)x) - i\sin((n+1)x)}{-i\sin(x)} \\
&= \frac{\sin((n+1)x)}{\cos^n(x)\sin(x)} + i\frac{\cos^{n+1}(x) - \cos((n+1)x)}{\cos^n(x)\sin(x)}.
\end{aligned}$$

On conclut en identifiant parties réelles et imaginaires :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \qquad U_n(x) = \frac{\sin((n+1)x)}{\cos^n(x)\sin(x)} \quad \text{et} \quad V_n(x) = \frac{\cos^{n+1}(x) - \cos((n+1)x)}{\cos^n(x)\sin(x)}.$$

Exercice 386 (④) par Lancelot Achour [*]

Si $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, donner une expression simple de

$$\sum_{k=0}^{n} C_k(x).$$

Remarquons que, pour tout réels x et y, les formules d'addition entraînent que :

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y)).$$

Ainsi, pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \not\equiv 0\ [2\pi]$ (on traitera ce cas à la fin car beaucoup plus simple) et $k \in \mathbb{N}$:

$$C_k(x) = \cos\left(\frac{kx}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{k+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{2k+1}{2}x\right)\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{2k+1}{2}x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Par conséquent :

$$\sum_{k=0}^{n} C_k(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{2k+1}{2}x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right) = \frac{n+1}{2} + \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{2k+1}{2}x\right).$$

Posons :
$$S_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \cos\left(\frac{2k+1}{2}x\right) \quad \text{et} \quad T_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{2k+1}{2}x\right),$$
de sorte que :
$$\begin{aligned} S_n(x) + iT_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \left(\cos\left(\frac{2k+1}{2}x\right) + i\sin\left(\frac{2k+1}{2}x\right)\right) \\ &= e^{\frac{ix}{2}} \sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = e^{\frac{ix}{2}} \frac{1-e^{(n+1)x}}{1-e^{ix}}, \end{aligned}$$
et en utilisant l'arc moitié on obtient que :
$$\begin{aligned} e^{\frac{x}{2}} \frac{1-e^{i(n+1)nx}}{1-e^{ix}} &= e^{\frac{x}{2}} \frac{e^{\frac{(n+1)x}{2}}(e^{-\frac{(n+1)x}{2}} - e^{\frac{(n+1)x}{2}})}{e^{\frac{x}{2}}(e^{-\frac{x}{2}} - e^{\frac{x}{2}})} \\ &= \frac{\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} + i\frac{\sin^2\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}, \end{aligned}$$
En identifiant les parties réelles et imaginaires, on déduit que :
$$S_n(x) = \frac{\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \text{et} \quad T_n(x) = \frac{\sin^2\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$
Donc finalement :
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, \qquad \sum_{k=0}^{n} C_k(x) = \frac{n+1}{2} + \frac{T_n(x)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{n+1}{2} + \frac{\sin^2\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$
Si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors $C_k(x) = k+1$ et donc :
$$\sum_{k=0}^{n} C_k(x) = \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

EXERCICE 387 (④) par Lancelot Achour [*]

Soient x un nombre réel, n un élément de $\mathbb{N}^*$. Simplifier la somme
$$K_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)x\right)$$
et montrer que
$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) K_n(x) \geq 0$$

On suppose que $x \not\equiv 0\ [2\pi]$ car il n'y a rien à simplifier ni montrer dans ce cas. Posons :
$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)x\right),$$
de sorte que :
$$H_n(x) + iK_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2k+1}{2}x} = e^{\frac{x}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} e^{ikx} = e^{\frac{x}{2}} \frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}.$$
En utilisant l'arc moitié on obtient que :
$$e^{\frac{x}{2}} \frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}} = e^{\frac{x}{2}} \frac{e^{\frac{nx}{2}}(e^{-\frac{nx}{2}} - e^{\frac{nx}{2}})}{e^{\frac{x}{2}}(e^{-\frac{x}{2}} - e^{\frac{x}{2}})} = \frac{\cos\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} + i\frac{\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on déduit que :

$$H_n(x) = \frac{\cos\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \text{et} \quad K_n(x) = \frac{\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

De surcroît, il vient que :

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right)K_n(x) = \sin^2\left(\frac{nx}{2}\right) \geq 0.$$

ce qu'il fallait montrer.

10.10 Racines n-ièmes de l'unité, racines n-ièmes d'un nombre complexe

EXERCICE 388 (①) par Lancelot Achour [*]

Écrire sous forme algébrique les racines sixième de 1, puis les racines huitièmes de 1.

On commence par les racines sixièmes. On rappelle que :

$$\mathbb{U}_6 = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{6}},\ k \in [\![0;5]\!]\right\} = \left\{\cos\left(\frac{2ik\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{2ik\pi}{6}\right),\ k \in [\![0;5]\!]\right\}.$$

Donc :

$$\mathbb{U}_6 = \left\{1;\ \ \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};\ \ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};\ \ -1;\ \ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2};\ \ \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

De même pour les racines huitièmes. On rappelle que :

$$\mathbb{U}_8 = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{8}}\ :\ k \in [\![0;7]\!]\right\} = \left\{\cos\left(\frac{2ik\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{2ik\pi}{8}\right)\ :\ k \in [\![0;7]\!]\right\},$$

on fait alors le calcul à la main pour aboutir à :

$$\mathbb{U}_8 = \left\{1;\ \ \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2};\ \ i;\ \ -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2};\ \ -1;\ \ -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2};\ \ -i;\ \ \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}.$$

EXERCICE 389 (②) par Antonin Demairé [*]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme des éléments de $\mathbb{U}_n$

Supposons $n \geq 2$. On pose $z = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, de sorte que $z \neq 1$ et que

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = \sum_{k=1}^{n} z^k = \frac{z^n - 1}{z - 1} = 0.$$

Pour $n = 1$

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_1} \omega = 1.$$

EXERCICE 390 (③) par Antonin Demairé [*]

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme des puissances p-ièmes des éléments de $\mathbb{U}_n$

Posons $z = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

Supposons d'abord p non divisible par n, de sorte que $z^p \neq 1$ et que :

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega^p = \sum_{k=1}^{n} z^{pk} = \frac{z^{pn} - 1}{z^p - 1} = 0.$$

Supposons maintenant p divisible par n. Alors

$$\underbrace{\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}\omega^p}_{\text{somme de 1}} = n.$$

Exercice 391 (⑤) par Octave Koenig [*]

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Si $(z_0,\dots,z_{n-1})\in\mathbb{C}^n$, on pose

$$\forall k\in\{0,\dots,n-1\},\qquad Z_k=\sum_{j=0}^{n-1} z_j\exp\left(-\frac{2ijk\pi}{n}\right).$$

Démontrer les formules suivantes, qui expriment $(z_0,\dots,z_{n-1})$ en fonction de $(Z_0,\dots,Z_{n-1})$:

$$\forall p\in\{0,\dots,n-1\},\qquad z_p=\frac{1}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1} Z_\ell\exp\left(\frac{2i\ell p\pi}{n}\right).$$

Soit $\ell\in\{0,\dots,n-1\}$. Alors

$$Z_\ell\exp\left(\frac{2i\ell p\pi}{n}\right)=\sum_{j=0}^{n-1} z_j\exp\left(\frac{2i\ell\pi}{n}(p-j)\right).$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1} Z_\ell\exp\left(\frac{2i\ell p\pi}{n}\right)&=\frac{1}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} z_j\exp\left(\frac{2i\ell\pi}{n}(p-j)\right)=\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n-1} z_j\exp\left(\frac{2i\ell\pi}{n}(p-j)\right)\\&=\frac{1}{n}\left(\sum_{j=0}^{p-1}\sum_{\ell=0}^{n-1} z_j\exp\left(\frac{2i\ell\pi(p-j)}{n}\right)+\sum_{l=0}^{n-1} z_p+\sum_{j=p+1}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n-1} z_j\exp\left(\frac{2i\ell\pi(p-j)}{n}\right)\right).\end{aligned}$$

Or, si $j\neq p$ et $0\le j,p\le n-1$, n ne peut diviser $p-j$, et donc $\exp\left(\frac{2i\pi(p-j)}{n}\right)\neq 1$, ce qui implique que

$$z_j\sum_{\ell=0}^{n-1}\exp\left(\frac{2i\ell\pi(p-j)}{n}\right)=z_j\frac{\exp\left(2i\pi(p-j)\right)-1}{\exp\left(\frac{2i\pi(p-j)}{n}\right)-1}=0.$$

Donc

$$\frac{1}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1} Z_\ell\exp\left(\frac{2i\ell p\pi}{n}\right)=\frac{1}{n}(0+nz_p+0).$$

Soit

$$\frac{1}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1} Z_\ell\exp\left(\frac{2i\ell p\pi}{n}\right)=z_p.$$

Exercice 392 (③) par Ylan Marx [*]

Montrer pour x réel et n entier ≥ 2 :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(x+\frac{2k\pi}{n}\right)=0.$$

Nous avons, puisque $e^{\frac{2i\pi}{n}} \neq 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(x+\frac{2k\pi}{n}\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Re}\left(\exp\left(i\left(x+\frac{2k\pi}{n}\right)\right)\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{ix+i\frac{2k\pi}{n}}\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(e^{ix}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k\right) = \mathrm{Re}\left(e^{ix}\frac{1-\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^n}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{ix}\frac{1-1}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}}\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(e^{ix}\times 0\right) = \mathrm{Re}\,(0) = 0.\end{aligned}$$

EXERCICE 393 (①) par Antonin Demairé [*]

Calculer le produit des éléments de $\mathbb{U}_n$

On a

$$\prod_{z\in\mathbb{U}_n} z = \prod_{k=1}^{n} \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} k\right) = e^{(n+1)i\pi} = (-1)^{n+1}.$$

EXERCICE 394 (③) par Wéline Pujol [*]

Soit n un entier ≥ 3. On note P_n et A_n le périmètre et l'aire du polygone (régulier) dont les sommets sont les racines n-ièmes de 1. Donner une expression simple de P_n et de A_n. Déterminer les limites des suites $(P_n)_{n\geq 3}$ et $(A_n)_{n\geq 3}$.

Les affixes des sommets sont les

$$\omega_k := \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}, \quad k \in \{0, ..., n-1\}.$$

Le périmètre du polygone est égale à la somme de la longueur de tous ses côtés. Comme ce polygone est régulier tous ses côtés ont la même longueur :

$$\ell_n = |\omega_0 - \omega_1| = \left|1 - e^{\frac{2i\pi}{n}}\right| = 2\,\sin\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

où on a utilisé la formule de l'arc moitié.

On a donc

$$P_n = 2n\,\sin\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Déterminons la limite de la suite $(P_n)_{n\geq 3}$. On écrit

$$P_n = 2\pi\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}}.$$

On sait que

$$(1) \qquad \frac{\sin(x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1.$$

Comme $\dfrac{\pi}{n} \to 0$, il s'ensuit que

$$P_n \longrightarrow 2\pi.$$

Comme 2π est le périmètre du cercle unité, ce résultat est conforme à l'intuition.

L'aire du polygone est égale à la somme des aires des triangles de sommets $0, \omega_k, \omega_{k+1}$ pour k décrivant $\{0, \ldots, n-1\}$. Comme le polygone est régulier, tous ces triangles ont même aire. Par ailleurs, ces triangles sont isocèles en 0. Pour chacun d'entre eux, le pied de la hauteur issue de 0 est donc le milieu du côté opposé. Il s'ensuit que chaque triangle a pour aire

$$\left|\frac{1+e^{\frac{2i\pi}{n}}}{2}\right| \times \left|\frac{1-e^{\frac{2i\pi}{n}}}{2}\right| = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\, \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

Ainsi

$$A_n = \frac{n}{2}\, \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

En utilisant à nouveau (1), on vérifie que la suite $(A_n)_{n\geq 3}$ converge vers π, résultat à nouveau conforme à l'intuition (l'aire du disque unité est π).

> EXERCICE 395 (④) par Martin Lambotte [*]
>
> Soit $m \geq 2$ un entier.
>
> a) Donner une expression simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} e^{\frac{ik\pi}{m}}$.
>
> b) On note $A_0, \ldots, A_{2m-1}$ les sommets successifs (selon le sens trigonométrique) d'un polygone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1. Donner une expression simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{m-1} A_kA_{2m-k}$.

a) On a

$$\sum_{k=1}^{m} e^{\frac{ik\pi}{m}} = \sum_{k=1}^{m} (e^{\frac{i\pi}{m}})^k = \frac{1-\exp(\frac{i(m+1)\pi}{m})}{1-\exp(\frac{i\pi}{m})} - 1 = \frac{1+\exp(\frac{i\pi}{m})}{1-\exp(\frac{i\pi}{m})} - 1.$$

d'où, en utilisant la technique de l'arc moitié,

$$\sum_{k=1}^{m} e^{\frac{ik\pi}{m}} = \frac{\exp(\frac{i\pi}{2m})(\exp(\frac{-i\pi}{2m})+\exp(\frac{i\pi}{2m}))}{\exp(\frac{i\pi}{2m})(\exp(\frac{-i\pi}{2m})-\exp(\frac{i\pi}{2m}))} - 1 = -\frac{2\cos(\frac{\pi}{2m})}{2i\sin(\frac{\pi}{2m})} - 1 = -1 + i\,\mathrm{cotan}\left(\frac{\pi}{2m}\right).$$

b) On considère ici un polygone régulier de $2m$ sommets inscrit dans un cercle de rayon 1. Puisque les distances sont conservées par translation et rotation, on peut supposer que le cercle est le cercle unité et que les sommets du polygone ont pour affixes les racines $2m$-ièmes de 1. Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{m-1} A_kA_{2m-k} = \sum_{k=1}^{m-1} \left|e^{\frac{2ik\pi}{2m}} - e^{\frac{2i(2m-k)\pi}{2m}}\right| = \sum_{k=1}^{m-1} \left|e^{\frac{ik\pi}{m}} - e^{\frac{-ik\pi}{m}}\right| = \sum_{k=1}^{m-1} \left|2i\sin\left(\frac{k\pi}{m}\right)\right|.$$

Or, pour tout entier m supérieur à 2 et pour tout k dans $\{1, \ldots, m-1\}$, $0 < \dfrac{k\pi}{m} < \pi$ donc $\sin\left(\dfrac{k\pi}{m}\right) > 0$. Par conséquent :

$$\sum_{k=1}^{m-1} A_kA_{2m-k} = 2\sum_{k=1}^{m-1} \sin\left(\frac{k\pi}{m}\right).$$

Puisque

$$\sum_{k=1}^{m-1} \sin\left(\frac{k\pi}{m}\right) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{m} e^{\frac{ik\pi}{m}} - e^{\frac{im\pi}{m}}\right) = \mathrm{cotan}\left(\frac{\pi}{2m}\right),$$

on peut utiliser la première question. Il vient

$$\sum_{k=1}^{m-1} A_kA_{2m-k} = 2\,\mathrm{cotan}\left(\frac{\pi}{2m}\right).$$

Exercice 396 (⑤) par Daniel Caby [*]

On se propose de déterminer les nombres rationnels r tels que $\cos(\pi r)$ soit un nombre rationnel. On considère un tel rationnel r. On écrit :

$$2\cos(\pi r) = \frac{a}{b},$$

où a est dans $\mathbb{Z}$, b dans $\mathbb{N}^*$ et où la fraction a/b est irréductible. Pour k dans $\mathbb{N}$, on pose :

$$u_k = 2\cos(2^k \pi r).$$

a) Pour k dans $\mathbb{N}$, exprimer u_{k+1} en fonction de u_k.

b) Montrer que, pour tout k dans $\mathbb{N}$, u_k est rationnel. Si on écrit $u_k = a_k/b_k$ où a_k est dans $\mathbb{Z}$, b_k dans $\mathbb{N}^*$, la fraction a_k/b_k irréductible, exprimer b_{k+1} en fonction de b_k.

c) On écrit $r = p/q$ avec p dans $\mathbb{Z}$, q dans $\mathbb{N}^*$. En remarquant que, pour k dans $\mathbb{N}$, $\exp(i2^k\pi r)$ est une racine $2q$-ième de 1, montrer que l'ensemble

$$\{u_k,\ k \in \mathbb{N}\}$$

est fini. En déduire que l'on peut choisir k_0 dans $\mathbb{N}^*$ tel que b_{k_0} est maximal.

d) En utilisant $k_0 + 1$, montrer que b_{k_0} vaut 1, puis que $2\cos(2^k\pi r)$ est entier. Conclure.

a) On a

$$u_{k+1} = 2\cos(2 \times 2^k \pi r) = 4\cos^2(2^k\pi r) - 2 = u_k^2 - 2 \qquad (1).$$

b) Le nombre réel u_0 est rationnel par définition. La relation (1) permet de montrer par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, le nombre réel u_k est rationnel. En effet, supposons u_k rationnel. Alors

$$u_{k+1} = u_k^2 - 2$$

est rationnel, d'où le résultat.

Si $u_k = \dfrac{a_k}{b_k}$, alors $u_{k+1} = \dfrac{a_k^2 - 2b_k^2}{b_k^2}$ d'après (1).

Montrons que $\dfrac{a_k^2 - 2b_k^2}{b_k^2}$ est une fraction irréductible. Par unicité de la forme irréductible d'une fraction, on en déduira que

$$a_{k+1} = a_k^2 - 2b_k^2 \quad \text{et que} \quad b_{k+1} = b_k^2.$$

Première méthode. D'après le théorème de Bézout, on dispose de $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que

$$ua_k + vb_k = 1.$$

Donc, en élevant au cube,

$$u^3a_k^3 + 3u^2a_k^2vb_k + 3ua_kv^2b_k^2 + v^3b_k^3 = 1.$$

En factorisant, on obtient

$$(u^3a_k + 3u^2vb_k)a_k^2 + (3ua_kv^2 + v^3b_k)b_k^2 = 1.$$

$$(u^3a_k + 3u^2vb_k)(a_k^2 - 2b_k^2) + (3ua_kv^2 + v^3b_k + 2u^3a_k + 6u^2vb_k)b_k^2 = 1.$$

On vient d'écrire 1 comme combinaison linaire à coefficients entiers de $a_k^2 - 2b_k^2$ et de b_k^2. Il s'ensuit que $a_k^2 - 2b_k^2$ et b_k^2 sont premiers entre eux.

Deuxième méthode. Supposons a_{k+1} et b_{k+1} non premiers entre eux. Ces deux nombres admettent alors un diviseur premier commun p. Mais alors p divise $b_{k+1} = {b_k}^2$, d'où, puisque p est premier, p divise b_k. Mais alors p divise aussi $b_{k+1} + 2{b_k}^2 = a_k^2$, donc, puisque p est preüier, p divise a_k. Il s'ensuit que a_k et b_k ne sont pas premiers entre eux, contradiction.

c) On remarque que, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$u_k = 2\,\mathrm{Re}(\exp(i2^k\pi r)) = 2\,\mathrm{Re}\left(\exp\left(i2^k\pi\frac{p}{q}\right)\right) = 2\mathrm{Re}\left(\exp\left(i2^k 2\pi\frac{p}{2q}\right)\right).$$

Or, l'ensemble $\mathbb{U}_{2q}$ est fini (de cardinal $2q$). Il s'ensuit que $\{u_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ est fini, ce qui entraîne que $\{b_k,\ k \in \mathbb{N}^*\}$ l'est également. Ce dernier ensemble admet donc un plus grand élément b_{k_0} avec $k_0 \in \mathbb{N}^*$.

d) Supposons $b_{k_0} > 1$. On a $b_{k_{0+1}} = b_{k_0}^2$. Donc $b_{k_{0+1}} > b_{k_0}$, ce qui entre en contradiction avec le résultat précédent. Donc

$$b_{k_0} = 1.$$

Puisque

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad b_k \leq b_{k_0},$$

tous les b_k valent 1, i.e. tous les u_k sont entiers. C'est en particulier le cas pour $k = 0$, et $2\cos(\pi r)$ est un entier.

Donc

$$\cos(\pi r) \in \left\{-1,\ -\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1\right\}, \quad \text{puis} \quad r \in \left\{k + \alpha\ ; \quad k \in \mathbb{Z},\ \alpha \in \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}\right\}.$$

Réciproquement, tous les rationnels r appartenant à l'ensemble ci-dessus sont tels que $\cos(\pi r)$ soit rationnel.

EXERCICE 397 (④) par Samy Clementz [*]

Soient m et n deux éléments de $\mathbb{N}^*$. À quelle condition a-t-on l'inclusion $\mathbb{U}_m \subset \mathbb{U}_n$?

Montrons que $\mathbb{U}_m \subset \mathbb{U}_n$ si et seulement si m divise n.

Supposons d'abord que m divise n : $n = mk$ avec $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $z \in \mathbb{U}_m$. Alors

$$z^n = z^{mk} = (z^m)^k = 1^k = 1,$$

donc $z \in \mathbb{U}_n$ et on a l'inclusion $\mathbb{U}_m \subset \mathbb{U}_n$.

Supposons maintenant que $\mathbb{U}_m \subset \mathbb{U}_n$. Posons $\omega = e^{\frac{2i\pi}{m}}$. Le nombre complexe ω est dans $\mathbb{U}_m$, donc dans $\mathbb{U}_n$:

$$e^{2i\pi\frac{n}{m}} = 1.$$

Il s'ensuit que $\frac{n}{m} \in \mathbb{Z}$, donc que m divise n (le quotient est nécessairement dans $\mathbb{N}^*$, car strictement positif).

EXERCICE 398 (③) par Matei Klee [*]

Soient $z = \exp\left(\frac{2i\pi}{5}\right)$, $x = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

a) Montrer que $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$.

b) Vérifier l'égalité $x = z + \frac{1}{z}$

c) Exprimer x^2 en fonction de z. En utilisant a), trouver alors une équation du second degré vérifiée par x. En déduire une expression simple du nombre $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

d) Calculer $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

a) On reconnaît une somme géométrique de raison $z \neq 1$:

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = \frac{1 - z^5}{1 - z} = 0,$$

car $z^5 = 1$ (voir les exercices 389 et 390 pour des généralisations).

b) Comme z est de module 1, son inverse est égal à son conjugué et donc :

$$z+\frac{1}{z}=z+\overline{z}=e^{i\frac{2\pi}{5}}+e^{-i\frac{2\pi}{5}}=2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=x.$$

c) D'après la question précédente, $x=z+\frac{1}{z}$, donc $x^2=z^2+\frac{1}{z^2}+2$. D'autre part, en divisant la relation de a) par z^2 :

$$0=z^2+\frac{1}{z^2}+z+\frac{1}{z}+1=x^2-2+x+1=x^2+x-1.$$

Cette équation possède deux racines :

$$x_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}<0 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}>0.$$

Or $0<\frac{2\pi}{5}<\frac{\pi}{2}$, d'où $2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)>0$.

Par conséquent,

$$x=2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=x_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \quad \text{i.e.} \quad \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$

d) On sait que

$$\forall x\in\mathbb{R}, \qquad \cos^2(x)+\sin^2(x)=1.$$

D'autre part, $\frac{2\pi}{5}<\frac{\pi}{2}$ donc $0<2\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Finalement :

$$\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\sqrt{1-(\frac{-1+\sqrt{5}}{4})^2}=\sqrt{1-\frac{6-2\sqrt{5}}{16}}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

Exercice 399 (⑤) par Daniel Caby [*]

Pour $0\le k\le 4$, soit A_k le point d'affixe $\exp\left(\frac{2ik\pi}{5}\right)$. Soit O le point d'affixe 0.

a) On note I le point d'affixe i, J le point d'affixe $-\frac{1}{2}$, $\mathcal{C}$ le cercle de centre J passant par I. Montrer que $\mathcal{C}$ coupe l'axe réel en deux points M et N, où l'abscisse M (resp. N) est strictement positive (resp. strictement négative).
b) Soit H le milieu de $[OM]$. Déterminer l'affixe de H.
c) Montrer que la perpendiculaire à l'axe réel passant par H coupe le cercle unité en les points A_1 et A_4.
d) En déduire une construction des points A_k, $1\le k\le 4$, à la règle et au compas une fois connus O et A_0.

---

a) Soit $z\in\mathbb{C}$. Alors

$$z\in\mathcal{C} \quad\Leftrightarrow\quad \left|z-\left(-\frac{1}{2}\right)\right|=\left|-\frac{1}{2}-i\right| \quad\Leftrightarrow\quad \left|z+\frac{1}{2}\right|=\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

On cherche z dans $\mathbb{R}$. L'équation devient :

$$z+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{ou} \quad z+\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Soit

$$z=\frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{-\sqrt{5}-1}{2}.$$

D'où le résultat, en notant M et N les points d'affixes respectives

$$z_M=\frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \text{et} \quad z_N=\frac{-\sqrt{5}-1}{2}.$$

b) L'affixe z_H de H vaut :

$$z_H = \frac{z_M}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

c) Le nombre complexe z est l'affixe d'un point d'intersection du cercle unité et de la perpendiculaire en H à l'axe réel si et seulement s'il vérifie :

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \quad \text{et} \quad |z| = 1.$$

Il suit alors de l'exercice précédent que les points d'intersection du cercle unité et de la perpendiculaire en H à l'axe réel sont A_1 et A_4.

d) La construction se fait comme suit.

– Tracer la droite passant par O et A_0, puis le cercle de centre O passant par A_0. Placer le point K d'affixe -1 à la seconde intersection de la droite et du cercle.

– Tracer le cercle de centre O passant par K puis le cercle de centre K passant par O. Relier les deux intersections de ces cercles pour former la médiatrice du segment $[OK]$. Placer le point J à l'intersection de cette médiatrice et de $[OK]$.

– Selon cette même méthode, tracer la médiatrice de $[KA_0]$. Placer le point I à l'intersection supérieure de cette médiatrice et du cercle unité.

– Tracer le cercle de centre J passant par I. Placer le point M à l'intersection de ce cercle et de $[OA_0]$.

– Selon la méthode vue, tracer la médiatrice de $[OM]$. Placer les points A_1 et A_4 aux intersections avec le cercle unité, respectivement en haut et en bas de la figure.

– Tracer deux cercles de centres respectifs A_1 et A_4 passant par A_0. Les intersections de ces cercles avec le cercle unité différentes de A_0 seront respectivement A_2 et A_3.

Exercice 400 (④) par Matei Klee [∗]

Soit $x = 2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$. En utilisant la méthode de l'exercice 398, trouver des entiers relatifs a, b, c tels que $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

En suivant la méthode de l'exercice 398, on pose

$$z = \exp\left(\frac{2i\pi}{7}\right) \quad \text{et} \quad x = 2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right).$$

On a $x = z + \frac{1}{z}$, donc

$$x^2 = z^2 + \frac{1}{z^2} + 2 \quad \text{donc} \quad z^2 + \frac{1}{z^2} = x^2 - 2,$$

$$x^3 = z^3 + 3z + \frac{3}{z} + \frac{1}{z^3} \quad \text{donc} \quad z^3 + \frac{1}{z^3} = x^3 - 3x.$$

Par ailleurs

$$1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6 = 0 \quad \text{i.e.} \quad \frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+1+z+z^2+z^3 = 0 \quad \text{i.e.} \quad x^3+x^2-2x-1 = 0.$$

On a le résultat voulu, avec $a = 1, b = -2, c = -1$.

Exercice 401 (③) par Neil Sherman [∗]

Soit n un entier ≥ 2. Déterminer les complexes z tels que :

$$(z-i)^n = (z+i)^n.$$

On pourra noter qu'une solution z de cette équation est nécessairement différente de i et réécrire l'équation sous la forme :

$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = 1.$$

On remarque que si $z = i$, alors $0^n = 0 = (2i)^n$, ce qui est absurde. Pour $z \neq i$, on peut écrire

$$(z-i)^n = (z+i)^n \iff \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = 1.$$

Posons $Z = \dfrac{z+i}{z-i}$. Alors $Z = \mathbb{U}_n$, soit $Z = \exp\left(\dfrac{2ik\pi}{n}\right)$, où $k \in \{0, \dots, n-1\}$.

Pour Z de la forme précédente,

$$Z = \frac{z+i}{z-i} \iff Z(z-i) = z+i \iff z(Z-1) = i(Z+1).$$

Si $Z = 1$, i.e. $k = 0$, cette équation n'a pas de solution. Sinon, elle en a une unique :

$$z = \frac{i(Z+1)}{Z-1} = -\frac{i(Z+1)}{1-Z} = -i\left(\frac{1+\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)}{-\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)+1}\right) = -i\left(\frac{1+\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)}{-\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)+1}\right).$$

Soit, en utilisant la formule de l'arc moitié,

$$z = \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

L'ensemble des solutions est

$$\left\{\operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right),\ k \in \{1, \dots, n-1\}\right\}.$$

Remarques.

1. L'équation $(z-i)^n = (z+i)^n$ est de degré $n-1$ en z ; il est raisonnable d'obtenir $n-1$ racines.

2. L'équation implique $|z-i| = |z+i|$, ce qui permet de voir sans résolution explicite que les solutions sont réelles (exercice 345).

EXERCICE 402 (②) par Matei Klee [*]
Si Z est un nombre complexe non nul, placer les racines carrées de Z dans le plan complexe.

Posons : $Z = re^{i\varphi}$ avec $r \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\varphi \in [0, 2\pi[$. Les racines carrées de Z sont

$$\sqrt{r}\, e^{i\frac{\varphi}{2}} \quad \text{et} \quad \sqrt{r}\, e^{i(\frac{\varphi}{2}+\pi)}.$$

Leurs images dans le plan complexe s'obtiennent comme points d'intersection du cercle de centre 0 et de rayon $\sqrt{r}$ et de la droite d'angle polaire $\frac{\varphi}{2}$.

EXERCICE 403 (②) par Matei Klee [*]

Exprimer les racines carrées de $2ie^{-i\pi/4}$ sous forme trigonométrique.

On exprime le nombre complexe donné sous forme exponentielle :

$$2 \times e^{i\pi/2} \times e^{-i\pi/4} = 2\, e^{i\pi/4}.$$

Le résultat de l'exercice précédent donne les deux racines carrées de $2ie^{-i\pi/4}$:

$$\sqrt{2}e^{i\pi/8} \quad \text{et} \quad \sqrt{2}e^{i9\pi/8}.$$

EXERCICE 404 (①) par Matei Klee [*]

Déterminer, en utilisant la forme trigonométrique, les nombres complexes z tels que $z^2 = i$.

On a $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$. L'exercice 402 montre que les racines carrées de i sont $r_1 = \sqrt{1}e^{i\frac{\frac{\pi}{2}}{2}}$ et $r_2 = \sqrt{1}e^{i\frac{\frac{\pi}{2}}{2}+\pi}$, c'est-à-dire

$$r_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{et} \quad r_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}}.$$

On en déduit la forme algébrique des racines carrées de i :

$$r_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

EXERCICE 405 (②) par Matei Klee [*]

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $z^4 = 2i$, $z^7 - (1+i)z^2 = 0$. On donnera les solutions sous forme trigonométrique et, pour la première, également sous forme algébrique.

On a

$$2i = 2e^{i\pi/2}.$$

Les solutions de la première équation sont donc les

$$\sqrt[4]{2}e^{i(\pi/8+k\pi/2)}, \qquad \text{avec} \quad k \in \{0,1,2,3\},$$

c'est-à-dire les

$$\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \pm i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right).$$

Or, d'après l'exercice 96,

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \quad \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

Les solutions de la première équation sont donc les

$$\sqrt[4]{2} \pm \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

La seconde équation équivaut à $z = 0$ ou $z^5 = (1+i)$. Or

$$1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}.$$

Les solutions de la seconde équation sont donc 0 et les

$$\sqrt[10]{2}\, e^{i(\pi/20+2k\pi/5)} \quad \text{avec} \quad k \in \{0,1,2,3,4\}.$$

EXERCICE 406 (②) par Matei Klee [*]

Montrer que, si z appartient à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, alors z admet une unique racine carrée dont la partie réelle est strictement positive.

On peut écrire

$$z = re^{i\varphi} \quad \text{avec} \quad r \in \mathbb{R}^{+*} \quad \text{et} \quad \varphi \in]-\pi, \pi[.$$

Les racines carrées de z aont alors

$$\sqrt{r}\, e^{i\frac{\varphi}{2}} \quad \text{et} \quad \sqrt{r}\, e^{i(\frac{\varphi}{2}+\pi)}.$$

On a $\left|\frac{\varphi}{2}\right| < \frac{\pi}{2}$, donc $\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) > 0$ et $\cos\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right) = -\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) < 0$. La seule racine carrée de z de partie réelle strictement positive est donc $\sqrt{r}\, e^{i\frac{\varphi}{2}}$.

EXERCICE 407 (④) par Matei Klee [*]

Trouver les nombres complexes z tels que

$$(z-1)^3 = i(z+1)^3.$$

On déterminera d'abord les racines cubiques de i.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Si z est solution de l'équation, on a forcément $z \neq -1$. Il s'ensuit que z est solution de l'équation si et seulement si $\dfrac{z-1}{z+1}$ est une racine cubique de i.

Si Z est une racine cubique de i, on a

$$\frac{z-1}{z+1} = Z \iff z - 1 = Zz + Z \iff z = \frac{Z+1}{1-Z}.$$

D'autre part, les racines cubiques de $i = e^{i\pi/2}$ sont $e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{5\pi}{6}}, e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

Si $Z = e^{i\frac{\pi}{6}}$,

$$z = \frac{e^{i\frac{\pi}{6}}+1}{1-e^{i\frac{\pi}{6}}}$$

Or, $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, donc

$$z = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}+1}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}+2+i}{2-\sqrt{3}-i} = (2+\sqrt{3})i.$$

Si Z=$e^{i\frac{5\pi}{6}}$,

$$z = \frac{e^{i\frac{5\pi}{6}}+1}{1-e^{i\frac{5\pi}{6}}}.$$

Or, $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, donc,

$$z = \frac{-\sqrt{3}+2+i}{2+\sqrt{3}-i} = (2-\sqrt{3})i.$$

Si $Z = e^{i\frac{3\pi}{2}}$,

$$z = \frac{e^{i\frac{3\pi}{2}}+1}{1-e^{i\frac{3\pi}{2}}} = \frac{1-i}{1+i} = -i.$$

L'ensemble des solutions de l' équation est :

$$\mathcal{S} = \left\{(2+\sqrt{3})i,\ (2-\sqrt{3})i,\ -i\right\}.$$

10.11 Complément : inégalité triangulaire

EXERCICE 408 (③) par Samy Clementz [*]

a) Soient a, b, c, d quatre nombres complexes. Vérifier que

$$(a-c)(b-d) = (b-a)(d-c) + (b-c)(a-d).$$

b) Soient A, B, C, D quatre points du plan. Montrer que

$$AC.BD \leq AB.CD + BC.DA.$$

a) Il suffit de développer les deux membres de l'égalité, et de constater qu'ils sont égaux :

$$(b-a)(d-c)+(b-c)(a-d) = (bd+ac)-(ad+bc)+(ab+cd)-(ac+bd) = ab+cd-(bc+ad),$$

qui est bien égal à $(a-c)(b-d)$.

b) On note $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ les affixes des points A, B, C, D. Alors d'après a), on a

$$\begin{aligned} |(a-c)(b-d)| &= |(b-a)(d-c) + (b-c)(a-d)| \\ &\leq |(b-a)(d-c)| + |(b-c)(a-d)|. \quad \text{(inégalité triangulaire)} \end{aligned}$$

Donc

$$|c-a||d-b| \leq |b-a||d-c| + |c-b||a-d|,$$

ce qui revient à dire

$$AC.BD \leq AB.CD + BC.DA.$$

EXERCICE 409 (③) par Lancelot Achour

Démontrer la seconde partie du théorème 15.

Sens direct. Soit $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ un n-uplet de nombres complexes dont les images sont situées sur une même demi droite issue de 0. Ainsi, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\}, \qquad z_j = |z_j|\, e^{i\alpha}.$$

Par conséquent,

$$\sum_{j=1}^{n} z_j = \left(\sum_{j=1}^{n} |z_j|\right) e^{i\alpha} \quad \text{et} \quad \left|\sum_{j=1}^{n} z_j\right| = \sum_{j=1}^{n} |z_j|$$

Sens réciproque. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$ la propriété « Si, pour $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, l'inégalité triangulaire est une égalité, alors les images de $z_1, \ldots, z_n$ sont sur une même droite issue de 0 ».

On montre $\mathcal{P}_n$ par récurrence sur n. La propriété $\mathcal{P}_1$ est évidente.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Soit $(z_1, \ldots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$. On suppose que :

$$\left|\sum_{j=1}^{n+1} z_j\right| = \sum_{j=0}^{n+1} |z_j| \quad \text{i.e.} \quad \left|\sum_{j=1}^{n} z_j + z_{n+1}\right| = \sum_{j=1}^{n} |z_j| + |z_{n+1}|.$$

En vertu du cas d'égalité de l'inégalité triangulaire à deux membres, les deux nombres complexes $\sum_{j=1}^{n} z_j$ et z_{n+1} sont sur la même demi-droite issue de 0. Donc

$$\sum_{j=1}^{n} |z_j| + |z_{n+1}| = \left|\sum_{j=1}^{n} z_j + z_{n+1}\right| \leq \left|\sum_{j=1}^{n} z_j\right| + |z_{n+1}| \leq \sum_{j=1}^{n} |z_j| + |z_{n+1}|.$$

Il s'ensuit que, nécessairement
$$\left|\sum_{j=1}^{n} z_j\right| = \sum_{j=1}^{n} |z_j|.$$
Grâce à $\mathcal{P}_n$, $z_1, \ldots, z_n$ sont donc situés sur une même demi-droite issue de 0. Cette demi-droite contient donc également $\sum_{j=1}^{n} z_j$, et donc z_{n+1}, ce qui achève la démonstration de $\mathcal{P}_{n+1}$.

11 Polynômes et équations algébriques

11.1 Polynômes

EXERCICE 410 (①) par Antonin Demairé [*]

Que dire du degré de la somme de deux fonctions polynomiales ?

Soient P et Q deux fonctions polynomiales. On a clairement
$$\deg(P+Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q)).$$

EXERCICE 411 (③) par Ylan Marx [*]

Soit T un élément de $\mathbb{R}^{+*}$. Quelles sont les fonctions polynomiales à coefficients réels P telles que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x+T) = P(x).$$

Soit P une fonction polynômiale vérifiant la condition de l'énoncé. Comme 0 est réel, nous avons alors : $P(0) = P(0+T) = P(T)$, puis comme T est réel, $P(0) = P(T) = P(T+T) = P(2T)$, puis en itérant le procédé nous obtenons :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(nT) = P(0).$$
On pose alors Q la fonction polynômiale définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = P(x) - P(0).$$
Nous avons alors $Q(0) = 0$ et :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Q(nT) = 0.$$
Ainsi Q a pour racines les nT pour $n \in \mathbb{N}$. D'après le théorème 20, Q est le polynôme nul, donc :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = P(0).$$
Ainsi P est constant. Réciproquement, un polynôme constant vérifie les conditions de l'énoncé.

EXERCICE 412 (②) par Samy Clementz [*]

Soit P une fonction polynomiale à coefficients dans $\mathbb{C}$:
$$\forall x \in \mathbb{C}, \quad P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$
Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

— si $k \in \{0, \ldots, n\}$ n'est pas multiple de 3, a_k est nul ;

— pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(jz) = P(z)$, où $j = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{3}\right)$.

Sens direct. Si les a_k sont nuls pour k non multiple de 3, alors le degré n de P est un multiple de 3. On note n_0 l'entier défini par $n = 3n_0$. Alors

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad P(z) = \sum_{k=0}^{n_0} a_{3k} z^{3k}.$$

Pour $z \in \mathbb{C}$,

$$P(jz) = \sum_{k=0}^{n_0} a_{3k} (jz)^{3k} = \sum_{k=0}^{n_0} a_{3k} j^{3k} z^{3k} = \sum_{k=0}^{n_0} a_{3k} (j^3)^k z^{3k} = P(z).$$

Sens réciproque. L'hypothèse entraîne que, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k z^k = \sum_{k=0}^{n} a_k (jz)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k j^k z^k.$$

Par unicité des coeffcients :

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \qquad a_k = a_k j^k.$$

Soit $k \in \{0, \dots, n\}$ non multiple de 3. Alors $j^k \neq 1$ et l'égalité précédente entraîne que $a_k = 0$.

Exercice 413 (④) par Tristan Hottier [*]

Soit P une fonction polynomiale à coefficients dans $\mathbb{K}$. Montrer l'équivalence entre les deux propriétés suivantes :

- il existe une fonction polynomiale Q à coefficients dans $\mathbb{K}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad P(x) = Q\left(x^2 - x\right)$$

- pour tout $x \in \mathbb{K}$, $P(x) = P(1-x)$.

On commence par montrer l'implication directe (i.e. s'il existe une fonction polynomiale Q à coefficients dans $\mathbb{K}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{K}$, $P(x) = Q\left(x^2 - x\right)$ alors $P(x) = P(1-x)$).

Supposons qu'une telle fonction Q existe. On a alors, pour tout $x \in \mathbb{K}$,

$$P(x) = Q\left(x^2 - x\right) = Q\left(x^2 + 1 - 2x - 1 + x\right) = Q\left((1-x)^2 - (1-x)\right) = P(1-x).$$

L'implication directe est ainsi démontrée.

On s'intéresse maintenant à l'implication réciproque (i.e. si, pour tout $x \in \mathbb{K}$, $P(x) = P(1-x)$ alors il existe une fonction polynomiale Q à coefficients dans $\mathbb{K}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{K}$, $P(x) = Q\left(x^2 - x\right)$).

Supposons que, pour tout $x \in \mathbb{K}$, $P(x) = P(1-x)$. Définissons un polynôme A à coefficients dans $\mathbb{K}$ par

$$\forall x \in \mathbb{K}, \qquad A(x) = P\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

On note alors que, si $x \in \mathbb{K}$,

$$A(-x) = P\left(\frac{1}{2} - x\right) = P\left(1 - \left(\frac{1}{2} + x\right)\right) = P\left(\frac{1}{2} + x\right) = A(x).$$

Le polynôme A est pair. Il existe donc un polynôme B à coefficients dans $\mathbb{K}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{K}, \qquad A(x) = B(x^2).$$

Par suite, si $x \in \mathbb{K}$,

$$P(x) = A\left(x - \frac{1}{2}\right) = B\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) = Q\left(x^2 - x\right)$$

où Q est le polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ défini par

$$\forall y \in \mathbb{K}, \qquad Q(y) = B\left(y - \frac{1}{4}\right).$$

EXERCICE 414 (④) par Thomas Taalbi [*]

Établir la formule de l'exemple 3 par un raisonnement combinatoire.

Considérons un paquet contenant n perles noires et n perles blanches, soit $2n$ perles au total. Le nombre de sous-paquets comportant n perles est donc $\binom{2n}{n}$.

Par ailleurs, si $k \in [\![0, n]\!]$, le nombre de paquets de n perles contenant k perles blanches est

$$\binom{n}{k} \times \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} \times \binom{n}{k} = \binom{n}{k}^2.$$

Il y a en effet $\binom{n}{k}$ façons de prendre k perles parmi les n blanches et $\binom{n}{n-k}$ façons de prendre $(n-k)$ perles parmi les noires. Au total, le nombre de sous-paquets de n perles n'est autre que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

Au vu du premier paragraphe, on obtient l'égalité désirée.

EXERCICE 415 (⑤) par Aghilas Boussaa [*]

a) Généraliser l'exemple 3 en calculant le coefficient de x^k dans $(1+x)^{m+n} = (1+x)^m(1+x)^n$ de deux manières.

b) Retrouver le résultat obtenu par une démonstration combinatoire.

a) Soient $m, n \in \mathbb{N}$ avec $k \leq m+n$ et $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\sum_{k=0}^{m+n} \binom{m+n}{k} x^k = (1+x)^{m+n} = (1+x)^m \cdot (1+x)^n = \left(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\right)$$

Dans le membre de gauche, le coefficient de x^k est $\binom{m+n}{k}$. Dans celui de droite, le coefficient de x^k est la somme coefficients obtenus en le développant, c'est-à-dire que c'est la somme des produit des coefficients de x^i dans le facteur de droite et celui de x^j dans celui de gauche où $i + j = k$. Cela donne :

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{i+j=k} \binom{m}{i} \binom{n}{j}.$$

On effectue un changement d'indice, en prenant i allant de 0 à k, et en remplaçant j, par $k - i$. Ainsi, la somme de i et j reste k et on a :

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i} \binom{n}{k-i}.$$

b) On cherche maintenant à obtenir le même résultat par un raisonnement combinatoire. Le raisonnement employé est appelé double dénombrement ou double comptage. Il consiste à démontrer l'égalité de deux expressions en montrant qu'elles permettent de dénombrer un même ensemble.

Soient $m, n \in \mathbb{N}$ avec $k \leq m, n$. Le nombre de sous-ensembles de cardinal k de l'ensemble $S = \{1, 2, \ldots, m+n-1, m+n\}$ est $|S| = \binom{n+m}{k}$, qui est le membre gauche de l'identité.

On peut écrire tout sous-ensemble de cardinal k de $S = \{1, 2, \ldots, m+n-1, m+n\}$ comme réunion d'une partie de $\{1, \ldots, m\}$ et d'une partie de $\{m+1, \ldots, n\}$. Si on fixe $i \in \{0, \ldots, k\}$, il y a $\binom{m}{i}$ parties de $\{1, \ldots, m\}$ de cardinal i et $\binom{n}{k-i}$ parties de $\{m+1, \ldots, m+n\}$ de cardinal $k-i$. Il y a donc $\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$ parties de $\{1, \ldots, m+n\}$ dont l'intersection avec $\{1, \ldots, m\}$ est de cardinal i. Sommant sur i, il y a

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i}.$$

parties de S de cardinal k, d'où l'égalité voulue.

Remarque. Cet argument est une généralisation de celui de l'exercice 414.

11.2 Complément : polynômes de Bernoulli

Exercice 416 (①) par Alexandre Paresy [*]

Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $B_2(x)$ et $B_3(x)$.

Déterminons B_1. Puisque ${B_1}'$ est constant égal à 1, il existe un réel k tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad B_1(x) = x + k.$$

On détermine k :

$$\int_0^1 B_1(t)\mathrm{d}t = 0 \quad \text{donc} \quad \left[\frac{1}{2}x^2 + kx\right]_0^1 = 0 \quad \text{donc} \quad k + \frac{1}{2} = 0 \quad \text{donc} \quad k = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad B_1(x) = x - \frac{1}{2}.$$

On procède de même pour B_2 et B_3. On obtient que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x.$$

Exercice 417 (①) par Alexandre Paresy [*]

Si $p \geq 2$, montrer que $B_p(1) = B_p(0)$.

On a, d'après le cours :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad B_{p+1}(x+1) - B_{p+1}(x) = (p+1)x^p.$$

Ce qui nous donne, pour $p \geq 2$,

$$B_p(1) - B_p(0) = p.0^{p-1} \quad \text{i.e.} \quad B_p(1) = B_p(0).$$

Exercice 418 (②) par Alexandre Paresy [*]

Montrer que, si $p \in \mathbb{N}$, B_p est à coefficients rationnels, de degré p, de coefficient dominant 1.

On le démontre par récurrence sur p.

Initialisation. Pour $p = 0$, $B_p : x \mapsto 1$, donc B_p est bien à coefficients rationnels, de degré 0, et de coefficient dominant 1.

Hérédité. Soit $p \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété est vraie au rang p. On cherche à démontrer que B_{p+1} est à coefficients rationnels, de degré $p+1$, de coefficient dominant 1. On sait que B_p est de la forme

$$B_p : x \mapsto x^p + c_{p-1}x^{p-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

où les c_i sont dans $\mathbb{Q}$, donc

$$B'_{p+1} : x \mapsto (p+1)\left(x^p + c_{p-1}x^{p-1} + ... + c_1 x + c_0\right),$$

donc

$$B_{p+1} : x \mapsto x^{p+1} + \frac{(p+1)c_{p-1}x^p}{p} + \cdots + (p+1)c_0 x + k.$$

Ainsi B_{p+1} est de degré $p+1$ et de coefficient dominant 1. Il suffit de montrer que k est rationnel afin de montrer que B_{p+1} est à coefficients rationnels. Or

$$\int_0^1 B_{p+1}(t)dt = \frac{1}{p+2} + \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{p} c_{p-1} + k = 0,$$

donc k est rationnel.

EXERCICE 419 (④) par Tristan Hottier[*]

Montrer que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad B_p(1-x) = (-1)^p B_p(x).$$

La résolution de cet exercice se fait en considérant le polynôme défini par

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad C_p(x) = (-1)^p B_p(1-x)$$

et en montrant que la suite $(C_p)_{p\in\mathbb{N}}$ respecte les même propriétés que la suite $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$, ce qui permet de conclure par unicité de la suite des polynômes de Bernoulli.

Commençons par rappeler les trois propriétés définissant B_p.

- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad B_0(x) = 1 \qquad (1)$
- $\forall p \in \mathbb{N}, p \geq 1, \quad B'_p(x) = pB_{p-1}(x) \qquad (2)$
- $\forall p \in \mathbb{N}, p \geq 1, \quad \int_0^1 B_p(t)\,\mathrm{d}t = 0 \qquad (3)$

On commence par vérifier que $C_p(x)$ vérifie (1).

$$\begin{aligned} C_0(x) &= (-1)^0 B_0(1-x) \\ &= 1 \times 1 \\ &= 1 \end{aligned} \qquad (1)$$

On a le résultat voulu.

On vérifie donc dans un second temps que $\forall p \in \mathbb{N}, p \geq 1, \quad C'_p(x) = pC_{p-1}(x)$.

$$\begin{aligned} C_p(x) &= (-1)^p B_p(1-x) \\ C'_p(x) &= (-1)^p \left(-B'_p(1-x)\right) \\ &= p \times (-1)^{p-1} B_{p-1}(1-x) \\ &= pC_{p-1}(x) \end{aligned} \qquad (2)$$

On retrouve la deuxième propriété.

Enfin, on vérifie que $\forall p \in \mathbb{N}, p \geq 1, \quad \displaystyle\int_0^1 C_p(t)\,\mathrm{d}t = 0.$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 C_p(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 (-1)^p B_p(1-t)\,\mathrm{d}t \\
&= (-1)^p \int_0^1 B_p(1-t)\,\mathrm{d}t \\
&= (-1)^p \int_1^0 -B_p(u)\,\mathrm{d}u && \text{en posant } u = 1-t \\
&= (-1)^p \int_0^1 B_p(u)\,\mathrm{d}u \\
&= (-1)^p \times 0 \\
&= 0 && (3)
\end{aligned}$$

La troisième propriété est alors vérifiée.

Détaillons le changement de variable. Dans un premier temps, nous savons que $\frac{du}{dt} = -1$, donc $du = -dt$. Or, $\int_0^1 B_p(1-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 -B_p(1-t)\cdot(-1)\cdot dt$. En n'oubliant pas de modifier les bornes de l'intégrale, nous retrouvons le résultat souhaité.

On en déduit que $C_p(x)$ est un polynôme suivant les mêmes propriétés que $B_p(x)$ or, comme les polynômes de Bernoulli sont uniques, on peut établir que

$$\begin{aligned}
\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad & C_p(x) = B_p(x) \\
& (-1)^p B_p(1-x) = B_p(x) \\
& B_p(1-x) = (-1)^p B_p(x)
\end{aligned}$$

Exercice 420 (③) par Alexandre Paresy [∗]

Si $p \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, que vaut $\displaystyle\int_x^{x+1} B_p(t)\mathrm{d}t$?

On sait que B_{p+1} est une primitive de $(p+1)B_p$ et que $B_{p+1}(x+1) - B_{p+1}(x) = (p+1)x^p$.
On a alors :

$$\int_x^{x+1} B_p(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{p+1}\int_x^{x+1} (p+1)B_p(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{p+1}(B_{p+1}(x+1) - B_{p+1}(x)) = x^p.$$

Exercice 421 (⑤) par Adrien Israël

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ un nombre impair. Montrer qu'il existe un polynôme Q_p à coefficients réels tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_p(n) = Q_p\left(\frac{n(n+1)}{2}\right).$$

Première solution. D'après l'exercice 419, si p est impair, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$B_{p+1}(1-x) = (-1)^{p+1}B_{p+1}(x) \iff B_{p+1}(1-x) = B_{p+1}(x).$$

Or, d'après le sens réciproque de l'exercice 413, pour tout $x \in \mathbb{K}$, si $P(x) = P(1-x)$, alors il existe une fonction polynomiale Q à coefficients réels telle que, pour tout $x \in \mathbb{K}$, $P(x) = Q(x^2 - x)$. Il existe donc un polynôme Q à coefficient réels tel que pour tout $x \in \mathbb{K}$:

$$B_{p+1}(x) = Q(x^2 - x).$$

On note Q_p le polynôme défini, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$Q_p(x) = \frac{Q(2x) - B_{p+1}(1)}{p+1}.$$

Alors, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
Q_p\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) &= \frac{Q(2 \cdot \frac{n(n+1)}{2}) - B_{p+1}(1)}{p+1} \\
&= \frac{Q((n+1-1)(n+1)) - B_{p+1}(1)}{p+1} \\
&= \frac{Q((n+1)^2 - (n+1)) - B_{p+1}(1)}{p+1} \\
&= \frac{B_{p+1}(n+1) - B_{p+1}(1)}{p+1} \\
&= F_p(n) \\
&= S_p(n).
\end{aligned}$$

Nous avons donc bien montré que, pour p impair, il existe un polynôme Q_p à coefficients réels tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_p(n) = Q_p\left(\frac{n(n+1)}{2}\right).$$

Deuxième solution. Soit p impair. Nous essayons de montrer qu'il existe un polynôme Q_p à coefficients réels tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_p(n) = Q_p\left(\frac{n(n+1)}{2}\right).$$

Montrons par récurrence forte la propriété $\mathcal{P}_k$ définie pour $k \in \mathbb{N}^*$:

« il existe un polynôme Q_{2k-1} tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2k-1}(n) = Q_{2k-1}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$. »

Initialisation pour $k = 1$. Notons que $S_{2k-1}(n) = S_1(n)$. Considérons le polynôme $Q_1 : x \longmapsto x$. Alors $Q_1(S_1(n)) = S_1(n)$ et donc $S_1(n) = Q_1(S_1(n))$ et $\mathcal{P}_1$ est donc vraie.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}_a$ vraie pour tout a de $[\![1, k-1]\!]$. Montrons que cela implique que $\mathcal{P}_k$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Dans un premier temps, étudions $S_1(n)$:

1. on remarque que $S_1(n) = \sum_{i=0}^{n} i^1 = \frac{n(n+1)}{2}$, d'après ce qui a été démontré précédemment dans le polycopié (page 10).
2. on remarque également que $\frac{n(n+1)}{2} = \sum_{i=0}^{n}(\frac{i(i+1)}{2} - \frac{i(i-1)}{2})$, par télescopage. A noter que le télescopage est utile lorsque l'on souhaite exprimer un terme à l'aide d'une formule récurrente.
3. D'après le cours, $S_p(n) = F_p(n) = \frac{1}{p+1}(B_{p+1}(n) - B_{p+1}(1))$. Or, d'après l'exercice 418, B_{p+1} est un polynôme unitaire de degré $p+1$. Donc, $S_p(n)$ est un polynôme de degré au plus p.
4. Soit p un entier impair. Pour tout $i \in [\![0; p]\!]$, un polynôme Q_p est exprimé en fonction de S_1^i, d'après la propriété C.

Soit a, un entier de $[\![0; 2k-1]\!]$. Étudions donc $S_1^a(n)$.

Tout d'abord,

$$S_1^a(n) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^a = \sum_{i=0}^{n}\left[\left(\frac{i(i+1)}{2}\right)^a - \left(\frac{i(i-1)}{2}\right)^a\right],$$

de la même manière que 2. Donc en utilisant le binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n}\left[\left(\frac{i(i+1)}{2}\right)^a-\left(\frac{i(i-1)}{2}\right)^a\right] &= \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i}{2}\right)^a\left[(i+1)^a-(i-1)^a\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i}{2}\right)^a\left[\sum_{j=0}^{a}\binom{a}{j}i^j-\sum_{h=0}^{a}\binom{a}{h}i^h(-1)^{a-h}\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i}{2}\right)^a\left[\sum_{j=0}^{a}\binom{a}{j}\cdot i^j\cdot(1-(-1)^{a-j})\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{a}\binom{a}{j}\cdot\frac{1}{2^a}\cdot i^a\cdot i^j\cdot(1-(-1)^{a-j}).
\end{aligned}$$

D'où, en notant a_j, le réel $\binom{a}{j}\cdot\frac{1}{2^a}\cdot(1-(-1)^{a-j})$:

$$S_1^a=\sum_{j=0}^{a}S_{a+j}(n)\cdot a_j.$$

Remarquons que si a est impair, si j est également impair, alors $a_j=0$. De même, si a est pair, si j est également pair, alors $a_j=0$.

- Considérons désormais les polynômes

$$P_{2k-1}(n):=n^k-\sum_{\substack{i=0\\ i\text{ impair}}}^{2k-2}Q_i(n)a_i \quad\text{et}\quad Q_{2k-1}(n):=\frac{P_{2k-1}(n)}{a_{k-1}}.$$

Si k est pair, alors

$$S_1^k(n)=\sum_{j=0}^{k}S_{k+j}(n)\cdot a_j=\sum_{\substack{j=0\\ j\text{ impair}}}^{k}S_{k+j}(n)\cdot a_j=\sum_{\substack{j=1\\ j\text{ impair}}}^{k-1}S_{k+j}(n)\cdot a_j.$$

Donc,

$$P_{2k-1}(S_1(n))=S_1^k(n)-\sum_{\substack{i=0\\ i\text{ impair}}}^{2k-2}Q_i(n)a_i=\sum_{\substack{j=1\\ j\text{ impair}}}^{k-1}S_{k+j}(n)\cdot a_j-\sum_{\substack{i=1\\ i\text{ impair}}}^{2k-3}Q_i(n)a_i.$$

Or, par hypothèse de récurrence :

$$P_{2k-1}(S_1(n))=S_{2k-1}(n)a_{k-1}+\sum_{\substack{j=1\\ j\text{ impair}}}^{k-3}Q_{k+j}(n)\cdot a_j-\sum_{\substack{i=1\\ i\text{ impair}}}^{2k-3}Q_i(n)a_i.$$

Donc, $P_{2k-1}(S_1(n))=S_{2k-1}(n)\cdot a_{k-1}$.
Donc, $Q_{2k-1}(S_1(n))=S_{2k-1}(n)$.
Donc, si k est pair, $\mathcal{P}_k$ est vérifiée.

- Pour conclure notre récurrence, il faut montrer un résultat similaire si k est impair. Considérons désormais les polynômes

$$P_{2k-1}(n):=n^k-\sum_{\substack{i=0\\ i\text{ pair}}}^{2k-2}Q_i(n)a_i \quad\text{et}\quad Q_{2k-1}(n):=\frac{P_{2k-1}(n)}{a_{k-1}}.$$

Si k est impair, alors

$$S_1^k(n)=\sum_{j=0}^{k}S_{k+j}(n)\cdot a_j=\sum_{\substack{j=0\\ j\text{ pair}}}^{k}S_{k+j}(n)\cdot a_j=\sum_{\substack{j=0\\ j\text{ pair}}}^{k-1}S_{k+j}(n)\cdot a_j.$$

Donc,

$$P_{2k-1}(S_1(n)) = S_1^k(n) - \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ pair}}}^{2k-2} Q_i(n)a_i = \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ pair}}}^{k-1} S_{k+j}(n) \cdot a_j - \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ pair}}}^{2k-3} Q_i(n)a_i.$$

Or, par hypothèse de récurrence :

$$P_{2k-1}(S_1(n)) = S_{2k-1}(n)a_{k-1} + \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ pair}}}^{k-3} Q_{k+j}(n) \cdot a_j + - \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ pair}}}^{2k-3} Q_i(n)a_i.$$

Donc, $P_{2k-1}(S_1(n)) = S_{2k-1}(n) \cdot a_{k-1}$.
Donc, $Q_{2k-1}(S_1(n)) = S_{2k-1}(n)$.
Donc, si k est impair, $\mathcal{P}_k$ est également vérifiée.

Remarque : Comme vous avez pu le remarquer, le cas k impair est le même que le cas k pair. Il faut juste faire attention à la parité de l'indice de sommation.

Donc, $\mathcal{P}_k$ est vérifiée, quelle que soit la parité de k.

Conclusion : La propriété a été initialisée au rang 1 et est héréditaire à partir de ce rang. Donc par principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel non-nul.

Nous avons donc bien montré qu'il existe un polynôme Q_p, avec p impair, à coefficients réels tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_p(n) = Q_p\left(\frac{n(n+1)}{2}\right).$$

11.3 Racines d'une équation polynomiale

Exercice 422 (③) par Léo Baciocchi[*]

a) Si n est un entier pair, donner un exemple de polynôme à coefficients réels n'admettant pas de racine réelle.

b) Si n est un entier impair, et P un polynôme à coefficients réels de degré n, montrer que P admet au moins une racine réelle. On pourra utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

a) Le polynôme P défini par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = x^2 + 1$$

est à valeurs strictement positives et n'admet donc pas de racine réelle.

b) Soit P un polynôme de degré n impair. On écrit

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i,$$

où le nombre réel a_n est non nul. Quitte à changer P en $-P$, on peut supposer que $a_n > 0$. Alors, $\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$.

Puisqu'un polynôme est continu (car dérivable) sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème des vaeurs intermédiaires, P s'annule en un point de $\mathbb{R}$.

EXERCICE 423 (④) par Samy Clementz

On se donne deux dés. Pour $1 \leq i \leq 6$, on note p_i (resp. q_i) la probabilité d'obtenir i en lançant le premier dé (resp. le second). Les lancers sont supposés indépendants. On note S la variable aléatoire donnant la somme des deux lancers. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$P(t) = \sum_{i=1}^{6} p_i t^i, \quad Q(t) = \sum_{i=1}^{6} q_i t^i.$$

a) Si $t \in \mathbb{R}$, montrer que
$$E(t^S) = P(t)Q(t).$$

b) On suppose que S suit la loi uniforme sur $\{2, \dots, 12\}$. Montrer que
$$\forall t \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, \quad E(t^S) = \frac{t^2(t^{11}-1)}{11(t-1)}.$$

c) En considérant les racines réelles des polynômes considérées, montrer que S ne peut suivre la loi uniforme sur $\{2, \dots, 12\}$.

On note X le résultat du dé 1 et Y le résultat du dé 2. Ainsi $S = X + Y$.

a) Soit $t \in \mathbb{R}$. Comme X et Y sont indépendantes, t^X et t^Y aussi. Donc
$$E(t^S) = E(t^{(X+Y)}) = E(t^X t^Y) = E(t^X)E(t^Y).$$
Montrons que $E(t^X) = P(t)$. Calculons la loi de t^X. Comme $X \in \{1, \dots, 6\}$, on a $t^X \in \{t, t^2, \dots, t^6\}$. De plus $t^X = t^i \Leftrightarrow X = i$, donc $P(t^X = t^i) = P(X = i)$. On peut alors, si $t \in \mathbb{R}$, calculer l'espérance de t^X :
$$E(t^X) = \sum_{i=1}^{6} t^i P(t^X = t^i) = \sum_{i=1}^{6} t^i P(X = i) = \sum_{i=1}^{6} t^i p_i = P(t).$$
De la même manière, on montre que $E(t^Y) = Q(t)$.

b) Soit $t \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Pour tout $k \in \{2, \dots, 12\}$, on a
$$t^S = t^k \Leftrightarrow S = k.$$
D'où
$$\begin{aligned} P(t^S = t^k) &= P(S = k) \\ &= \frac{1}{11}. \end{aligned}$$
Donc
$$E(t^S) = \sum_{k=2}^{12} t^k P(t^S = t^k) = \frac{1}{11}\sum_{k=2}^{12} t^k = \frac{1}{11}\sum_{i=0}^{10} t^{i+2} = \frac{t^2}{11}\sum_{i=0}^{10} t^i = \frac{t^2}{11}\frac{t^{11}-1}{t-1}.$$

c) Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\{1, \dots, 6\}$, indépendantes, telles que $S = X + Y$.
Alors, d'après ce qui précède, on a pour tout $t \neq 1$
$$\begin{aligned} \frac{t^2(t^{11}-1)}{11(t-1)} &= \Big(\sum_{i=1}^{6} p_i t^i\Big)\Big(\sum_{i=1}^{6} q_i t^i\Big) \\ &= t^2\Big(\sum_{i=0}^{5} p_{i+1} t^i\Big)\Big(\sum_{i=0}^{5} q_{i+1} t^i\Big), \end{aligned}$$
où l'on a factorisé chaque polynôme par t. Ainsi pour tout $t \notin \{0, 1\}$, on a
$$\frac{t^{11}-1}{11(t-1)} = \Big(\sum_{i=0}^{5} p_{i+1} t^i\Big)\Big(\sum_{i=0}^{5} q_{i+1} t^i\Big)$$

On note $\tilde{P}$ la fonction polynômiale $t \mapsto \sum_{i=0}^{5} p_{i+1} t^i$ sur $\mathbb{R}$. Notons que $p_6 > 0$, car

$$\begin{aligned} P(S=12) &= \frac{1}{12} \\ &= P(X=6)P(Y=6) \\ &= p_6 q_6. \end{aligned}$$

Par conséquent $\tilde{P}$ est de degré 5. Ce degré est impair, $\tilde{P}$ admet donc une racine réelle. On note t_0 une de ces racines. En faisant tendre t vers 0 dans cette égalité, on trouve $\frac{1}{11} = p_1 q_1$. En particulier, $p_1 > 0$, ce qui implique que $\tilde{P}$ ne s'annule pas en 0. (notons qu'on aurait pu montrer $p_1 > 0$ de la même manière que l'on a montré $p_6 > 0$) De plus $\tilde{P}(1) = \sum_{k=1}^{6} p_i = 1$. Par conséquent, $t_0 \notin \{0, 1\}$. En évaluant cette égalité en t_0 on trouve

$$\begin{aligned} \frac{{t_0}^{11} - 1}{11(t_0 - 1)} &= \tilde{P}(t_0)\Big(\sum_{i=0}^{5} q_{i+1} {t_0}^i\Big) \\ &= 0. \end{aligned}$$

ce qui implique que ${t_0}^{11} = 1$, et donc que $t_0 = 1$, ce qui est absurde.

Exercice 424 (②) par Loïse Launay[*]

Soient P une fonction polynomiale à coefficients réels, z dans $\mathbb{C}$ une racine de P. Montrer que $\overline{z}$ est racine de P.

Écrivons

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

où les a_k sont des nombres réels. On a

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i = 0.$$

Appliquons la conjugaison à cette relation. Il vient :

$$\overline{\sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i} = 0.$$

Le conjugué d'une somme est la somme des conjugués, d'où :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \overline{a_i z^i} = 0.$$

Le conjugué d'un produit le produit des conjugués. Donc :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \overline{a_i}\,\overline{z^i} = 0.$$

Mais chaque a_i est réel, donc égal à son conjugué. Ainsi, $\overline{z}$ est une racine de P.

Exercice 425 (④) par Ylan Marx[*]

Soient n dans $\mathbb{N}^*$, $a_0, ..., a_{n-1}$ des nombres complexes, P le polynôme défini par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = z^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i$$

a) Pour $0 \leq i \leq n-1$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$, montrer que $|z^i| \leq |z^{n-1}|$

b) Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine de P. Montrer, en utilisant l'inégalité triangulaire, que

$$|z| \leq \max\left(1, \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|\right)$$

a) Soit $i \in \{0, ..., n-1\}$, soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| > 1$. Nous avons alors $0 \leq i \leq n-1$, donc : $n-1-i \geq 0$. On a également : $|z| > 1$, donc par croissance de la fonction $x \longmapsto x^{n-1-i}$ sur $\mathbb{R}_+$, nous avons :

$$|z|^{n-1-i} \geq 1^{n-1-i} = 1, \text{ puis comme } |z| \geq 0, \text{ on a :}$$

$$|z|^{n-1-i}|z|^i \geq |z|^i, \text{ d'où :}$$

$$|z|^{n-1} \geq |z|^i, , \text{ d'où :}$$

$$|z^i| \leq |z^{n-1}|.$$

b) On raisonne par disjonction de cas et on considère les 2 cas suivants :$|z| \leq 1$ et $|z| > 1$.

Premier cas : $|z| \leq 1$

On a alors immédiatement : $|z| \leq \max\left(1, \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|\right)$.

Deuxième cas : $|z| > 1$

On a alors z racine de P, donc :

$$z^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i = 0, \text{ d'où :}$$

$$z^n = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i, \text{ et donc :}$$

$$|z^n| = \left|\sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i\right|.$$

Par inégalité triangulaire, il vient ensuite :

$$|z^n| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| \left|z^i\right|, \text{ puis comme, d'après la question a, } \left|z^i\right| \leq \left|z^{n-1}\right|, \text{ on a :}$$

$$|z^n| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| \left|z^{n-1}\right|, \text{ d'où :}$$

$$|z|^n \leq |z|^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|, \text{ puis comme } z^{n-1} \geq 0, \text{ il vient :}$$

$$|z| \leq \sum_{i=0}^{n-1} a_i, \text{ et donc :}$$

$$|z| \leq \max\left(1, \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|\right).$$

Nous avons donc pour toute racine $z \in \mathbb{C}$ de P :

$$|z| \leq \max\left(1, \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|\right).$$

Exercice 426 (②) par Loïse Launay[*]

a) Vérifier que 4 est racine de l'équation

$$x^3 - 15x - 4 = 0$$

puis résoudre cette équation dans $\mathbb{C}$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante, après en avoir déterminé une "racine évidente" :

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

.

a) Vérifions que 4 est racine de l'équation :

$$4^3 - 15 \cdot 4 - 4 = 64 - 60 - 4 = 0.$$

4 est racine de l'équation. On sait alors qu'il existe trois nombres réesl a, b et c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{C}, \qquad x^3 - 15 - 4 = (x-4)(ax^2 + bx + c),$$

ce qui se réécrit

$$\forall x \in \mathbb{C}, \qquad x^3 - 15 - 4 = ax^3 + (b-4a)x^2 + (c-4b)x - 4c,$$

d'où, par identification, $\begin{cases} 1 = a \\ 0 = b - 4a \\ -15 = c - 4b \\ -4 = -4c \end{cases}$.

On résout donc le système pour achever la factorisation du polynôme de degré 3 :

$$\begin{cases} 1 = a \\ 0 = b - 4a \\ -15 = c - 4b \\ -4 = -4c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 1 \end{cases}.$$

Ainsi, pour tout nombre complexe x :

$$x^3 - 15x - 4 = (x-4)(x^2 + 4 + 1).$$

Ainsi :

$$x^3 - 15x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-4) = 0 \quad ou \quad (x^2 + 4x + 1) = 0.$$

Le trinôme du second degré admet exactement deux racines réelles distinctes, à savoir :

$$x_1 = \frac{-4 + 2\sqrt{3}}{2} = -2 + \sqrt{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-4 - 2\sqrt{3}}{2} = -2 - \sqrt{3}.$$

On conclut donc la résolution de l'équation :

$$S = \left\{-2 + \sqrt{3}, -2 - \sqrt{3}, 4\right\}.$$

b) De façon évidente, 1 est solution de l'équation $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ car :

$$1^3 - 6 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 6 = 1 - 6 + 11 - 6 = 0.$$

En procédant comme en a), on obtient que

$$\forall x \in \mathbb{C}, \qquad x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x^2 - 5 + 6).$$

Ainsi :

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x-1) = 0 \quad ou \quad (x^2 - 5x + 6) = 0.$$

Le trinôme du second degré admet exactement deux racines réelles distinctes, à savoir :

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{1}}{2} = 3,$$

et

$$x_2 = \frac{5 - \sqrt{1}}{2} = 2.$$

On conclut donc la résolution de l'équation :

$$S = \{1, 2, 3\}.$$

Exercice 427 (③) Par Lancelot Achour[*]

Soit n un entier ≥ 2.

1. Justifier la formule :
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \sum_{k=0}^{n-1} z^k = \prod_{\ell=1}^{n-1} \left(z - e^{\frac{2i\ell\pi}{n}}\right).$$
2. En appliquant la formule précédente en $z = 1$, calculer le produit
$$P_n = \prod_{\ell=1}^{n-1} \sin\left(\frac{\ell\pi}{n}\right).$$

1. On calcule, pour $z \neq 1$:
$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{z^n - 1}{z - 1} = \frac{1}{z-1} \prod_{\ell=0}^{n-1} \left(z - e^{\frac{2i\ell\pi}{n}}\right) = \prod_{\ell=1}^{n-1} \left(z - e^{\frac{2i\ell\pi}{n}}\right).$$
L'égalité reste vraie en $z = 1$ (deux polynômes qui coïncident sur un ensemble infini sont égaux).
2. On a donc :
$$n = \prod_{\ell=1}^{n-1} \left(1 - e^{\frac{2i\ell\pi}{n}}\right),$$
et en utilisant l'arc moitié on obtient que :
$$\begin{aligned} n = \prod_{\ell=1}^{n-1} \left(e^{\frac{i\ell\pi}{n}} \left(e^{-\frac{i\ell\pi}{n}} - e^{\frac{i\ell\pi}{n}}\right)\right) &= \prod_{\ell=1}^{n-1} e^{\frac{i\ell\pi}{n}} \left(-2i \sin\left(\frac{\ell\pi}{n}\right)\right) \\ &= (2i)^{n-1} P_n \prod_{\ell=1}^{n-1} e^{\frac{i\ell\pi}{n}} \\ &= (-2i)^{n-1} e^{\frac{i(n-1)}{2}} = 2^{n-1} P_n. \end{aligned}$$
Il s'ensuit que :
$$P_n = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Exercice 428 (③) par Alexandre Camelin[*]

Soient n un entier $\geqslant 3$, $A_0, ..., A_{n-1}$ les sommets d'un polygone régulier du plan. On note O le centre de ce polygone, R le rayon de cercle passant par les A_k. Montrer que, si M est un point du plan, alors :
$$\prod_{k=0}^{n-1} A_k M \leqslant OM^n + R^n$$
On commencera par le cas où les A_k sont les racines n-ièmes de l'unité (et donc $R = 1$) ; on utilisera alors la factorisation de $z^n - 1$

• Commençons par traiter le cas où les A_k sont les racines n-iemes de l'unité. On suppose que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, A_k a pour affixe $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$
Soit M un point du plan d'affixe $z \in \mathbb{C}$.
Alors :
$$\prod_{k=0}^{n-1} A_k M = \prod_{k=0}^{n-1} \left|z - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right| = \left|\prod_{k=0}^{n-1} \left(z - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\right| = |z^n - 1|.$$
L'inégalité triangulaire permet d'affirmer que :
$$\prod_{k=0}^{n-1} A_k M = |z^n - 1| \leqslant |z^n| + |-1| = |z|^n + 1 = OM^n + 1$$

Ce que l'on voulait démontrer.

• Dans le cas général, il existe $R \in R^{+*}$ et $\theta \in R$ tels que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, A_k a pour affixe $Re^{i\left(\frac{2k\pi}{n}+\theta\right)}$.

On suit un raisonnement analogue. Si le point M a pour affixe z, on a :

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1} A_k M = \prod_{k=0}^{n-1} \left| z - Re^{i\left(\frac{2k\pi}{n}+\theta\right)} \right| &= R^n \prod_{k=0}^{n-1} \left| \frac{z}{R} - e^{i\left(\frac{2k\pi}{n}+\theta\right)} \right| \\ &= R^n \prod_{k=0}^{n-1} \left| \frac{e^{-i\theta}}{R} - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right| = R^n \left| \left(\frac{e^{-i\theta}}{n} \cdot z \right)^n - 1 \right|.\end{aligned}$$

Or, d'après l'inégalité triangulaire :

$$R^n \left| \left(\frac{e^{-i\theta}}{n} \cdot z \right)^n - 1 \right| \leqslant R^n \left(\frac{|z|^n}{R^n} + 1 \right) = |z|^n + R^n = OM^n + R^n.$$

On a donc bien :

$$\prod_{k=0}^{n-1} A_k M \leqslant OM^n + R^n.$$

Exercice 429 (④) Par Lancelot Achour[∗]

Soit P une fonction polynomiale de degré $n \geq 2$ à coefficients réels. Montrer que le graphe de P ne peut contenir $n+1$ points distincts alignés.

Supposons que $M_1, \ldots, M_{n+1}$ sont $n+1$ points distincts alignés du graphe de p. La droite qui les porte est le graphe d'une fonction affine ℓ. Si $Q := P - \ell$, Q est une fonction polynomiale de degré n, admettant $n+1$ racines distinctes (les abscisses des M_i). C'est absurde.

11.4 Complément : l'équation du second degré dans $\mathbb{C}$

Exercice 430 (②) par Térence Marchi[∗]

Déterminer sous forme algébrique les racines carrées de $3+4i$, $3-3i$, $5-2i$ dans $\mathbb{C}$.

Soit $\delta = a + ib$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. L'équation $\delta^2 = 3 + 4i$ équivaut au système :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 & = 3 \\ a^2 + b^2 & = 25 \\ 2ab & = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 & = 28 \\ 2b^2 & = 22 \\ ab \geq 0 & \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 & = 14 \\ b^2 & = 11 \\ ab \geq & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{14} \text{ ou } a = -\sqrt{14} \\ b = \sqrt{11} \text{ ou } b = -\sqrt{11} \\ ab \geq 0 \end{cases}$$

Or, $ab \geq 0$ équivaut à ($a \geq 0$ et $b \geq 0$) ou ($a \leq 0$ et $b \leq 0$).

Les solutions du système sont :

$$S = \left\{ (\sqrt{14}; \sqrt{11}), (-\sqrt{14}; -\sqrt{11}) \right\}.$$

Les racines de $3+4i$ dans $\mathbb{C}$ sont donc :

$$\sqrt{14} + \sqrt{11}i \text{ et } -\sqrt{14} - \sqrt{11}i.$$

L'équation $\delta^2 = 3 - 3i$ équivaut au système :

$$\begin{cases} a^2 + b^2 & = 18 \\ a^2 - b^2 & = 3 \\ 2ab & = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 & = 21 \\ 2b^2 & = 15 \\ ab \leq 0 & \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{\dfrac{21}{2}} \text{ ou } a = -\sqrt{\dfrac{21}{2}} \\ b = \sqrt{\dfrac{15}{2}} \text{ ou } b = -\sqrt{\dfrac{15}{2}} \\ ab \leq 0 \end{cases}$$

Or, $ab \leq 0$ équivaut à ($a \geq 0$ et $b \leq 0$) ou ($a \leq 0$ ou $b \geq 0$).

Les solutions du système sont :

$$S = \left\{ (\sqrt{\frac{21}{2}}, -\sqrt{\frac{15}{2}}), (-\sqrt{\frac{21}{2}}, \sqrt{\frac{15}{2}}) \right\}.$$

Les racines de $3-3i$ dans $\mathbb{C}$ sont donc :

$$\sqrt{\frac{21}{2}} - i\sqrt{\frac{15}{2}} \text{ et } -\sqrt{\frac{21}{2}} + i\sqrt{\frac{15}{2}}.$$

L'équation $\delta^2 = 5 - 2i$ équivaut au système :

$$\begin{cases} a^2+b^2 & = 29 \\ a^2-b^2 & = 5 \\ 2ab & = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 & = 34 \\ 2b^2 & = 24 \\ ab \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{17} \text{ ou } a = -\sqrt{17} \\ b = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ ou } b = -2\sqrt{3} \\ ab \leq 0 \end{cases}$$

Or, $ab \leq 0$ équivaut à ($a \geq 0$ et $b \leq 0$) ou ($a \leq 0$ et $b \geq 0$).

Les solutions du système sont :

$$S = \left\{ (\sqrt{17}; -2\sqrt{3}), (-\sqrt{17}; 2\sqrt{3}) \right\}.$$

Les racines de $3+4i$ dans $\mathbb{C}$ sont donc :

$$\sqrt{17} - 2\sqrt{3}i \text{ et } -\sqrt{17} + 2\sqrt{3}i.$$

Exercice 431 (①) par Elies Kerkeni[*]

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 + 10z + 169 = 0.$$

L'équation $z^2 + 10z + 169 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ a pour discriminant $10^2 - 4 \times 1 \times 169 = -576$ strictement négatif. Elle possède donc 2 racines complexes distinctes, à savoir $12i - 5$ et $-12i - 5$.

Remarque. Si a, b, c sont réels et $\Delta = b^2 - 4ac$ avec $\Delta < 0$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet deux racines complexes disctinctes dans $\mathbb{C}$, $z_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Exercice 432 (②) par Quentin Lepine

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations

$$z^2 - 2iz + i = 0, \quad z^2 + iz - 1 = 0, \quad (1+2i)z^2 + 3iz - (4+i) = 0$$

On résout l'équation $z^2 - 2iz + i = 0$.
$\Delta = (-2i)^2 - 4 \times 1 \times i = -4 - 4i$

On détermine les racines carrées de Δ, et pour cela on cherche les couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$(x+iy)^2 = -4 - 4i, \text{ soit } x^2 - y^2 + 2ixy = -4 - 4i$$

Cela équivaut au système $\begin{cases} x^2 - y^2 = -4 \\ 2xy = -4 \end{cases}$

Or, $|x+iy|^2 = |\Delta|$, soit $x^2 + y^2 = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2}$

on obtient donc le système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -4 \\ x^2 + y^2 = 4\sqrt{2} \\ xy = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x^2 = -4 + 4\sqrt{2} \ (L_1 + L_2) \\ 2y^2 = 4\sqrt{2} + 4 \ (L_2 - L_1) \\ xy = -2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \pm\sqrt{2\sqrt{2} - 2} \\ y = \pm\sqrt{2\sqrt{2} + 2} \\ xy = -2 \end{cases}$$

On obtient donc quatre couples de x et y possibles, mais puisque leur produit doit être négatif, les deux racines carrées de Δ sont :

$$\sqrt{2\sqrt{2} - 2} - i\sqrt{2\sqrt{2} + 2} \text{ ou } -\sqrt{2\sqrt{2} - 2} + i\sqrt{2\sqrt{2} + 2}$$

Les solutions de l'équation sont donc :

$$z_1 = \frac{2i + \sqrt{2\sqrt{2} - 2} - i\sqrt{2\sqrt{2} + 2}}{2} = \frac{2\sqrt{2} - 2}{2} + i\frac{2 - \sqrt{2\sqrt{2} + 2}}{2}$$
$$z_2 = \frac{2i - \sqrt{2\sqrt{2} - 2} + i\sqrt{2\sqrt{2} + 2}}{2} = -\frac{\sqrt{2\sqrt{2} - 2}}{2} + i\frac{2 + \sqrt{2\sqrt{2} + 2}}{2}$$

On résout l'équation $z^2 + iz - 1 = 0$: $\Delta = i^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 3$. On remarque que $\Delta \in \mathbb{R}$, on obtient donc directement les solutions de l'équation :

$$z_1 = \frac{-i - \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-i - \sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}.$$

On résout l'équation $(1 + 2i)z^2 + 3iz - (4 + i) = 0$:

$\Delta = (3i)^2 - 4 \times (1 + 2i) \times (-4 - i) = -1 + 36i$. On détermine les racines carrées de Δ, et pour cela on cherche les couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$(x + iy)^2 = -1 + 36i, \text{ soit } x^2 - y^2 + 2ixy = -1 + 36i.$$

Cela équivaut au système $\begin{cases} x^2 - y^2 = -1 \\ 2xy = 36 \end{cases}$

Or, $|x + iy|^2 = |\Delta|$, soit $x^2 + y^2 = \sqrt{(-1)^2 + (36)^2} = \sqrt{1297}$

on obtient donc le système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -1 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{1297} \\ xy = 18 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x^2 = -1 + \sqrt{1297} \ (L_1 + L_2) \\ 2y^2 = \sqrt{1297} + 1 \ (L_2 - L_1) \\ xy = 18 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{1297} - 1}{2}} \\ y = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{1297} + 1}{2}} \\ yy = 18 \end{cases}$$

On obtient donc quatre couples de x et y possibles, mais puisque leur produit doit être positif, les deux racines carrées de Δ sont :

$$\sqrt{\frac{\sqrt{1297} - 1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{1297} + 1}{2}} \text{ ou } -\sqrt{\frac{\sqrt{1297} - 1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{1297} + 1}{2}}$$

Les solutions de l'équation sont donc :

$$\begin{aligned}
z_1 &= \frac{-3i + \sqrt{\frac{\sqrt{1297}-1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{1297}+1}{2}}}{2+4i} \\
&= \frac{\left(-3i + \sqrt{\frac{\sqrt{1297}-1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{1297}+1}{2}}\right)(2-4i)}{2^2+4^2} \\
&= \frac{\sqrt{\frac{\sqrt{1297}-1}{2}} + 2\sqrt{\frac{\sqrt{1297}+1}{2}} - 6}{10} + i\frac{-2\sqrt{\frac{\sqrt{1297}-1}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{1297}+1}{2}} - 3}{10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_2 &= \frac{-3i - \sqrt{\frac{\sqrt{1297}-1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{1297}+1}{2}}}{2+4i} \\
&= \frac{\left(-3i - \sqrt{\frac{\sqrt{1297}-1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{1297}+1}{2}}\right)(2-4i)}{2^2+4^2} \\
&= \frac{-\sqrt{\frac{\sqrt{1297}-1}{2}} - 2\sqrt{\frac{\sqrt{1297}+1}{2}} - 6}{10} + i\frac{2\sqrt{\frac{\sqrt{1297}-1}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{1297}+1}{2}} - 3}{10}
\end{aligned}$$

EXERCICE 433 (②) par Adrien Israël

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$z^8 - z^4 + 1 = 0.$$

Posons la substitution $x = z^4$. L'équation peut donc être réécrite en $x^2 - x + 1 = 0$. Or

$$x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - \frac{1}{2})^2 - (i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2})^2 = 0.$$

Les racines de cette équation appartiennent donc à l'ensemble

$$\left\{\frac{1}{2} + \frac{i\cdot\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2} - \frac{i\cdot\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

Dans un premier temps, traitons le cas $z^4 = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$. En posant la substitution $y = z^2$, nous obtenons $y^2 = \frac{1}{2} + \frac{i\cdot\sqrt{3}}{2}$. On cherche donc à déterminer les racines carrées de cette expression. On pose $y = a + ib$, avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On a donc $|y^2| = |y|^2 = a^2 + b^2 = 1$ et

$$y^2 = (a+ib)^2 = a^2 - b^2 + 2abi = \frac{1}{2} + \frac{i\cdot\sqrt{3}}{2}.$$

Donc par unicité du module, de la partie réelle, et de la partie imaginaire d'un complexe, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 &= \frac{1}{2} \\ a^2 + b^2 &= 1 \\ 2ab &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 &= \frac{3}{2} \\ 2b^2 &= \frac{1}{2} \\ 2ab \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \\ b = \pm\frac{1}{2} \\ 2ab \geq 0 \end{cases}$$

Donc, a et b sont du même signe. Donc

$$y_1 \in \left\{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right\}.$$

Traitons le cas où $y^2 = \frac{1}{2} + \frac{i \cdot \sqrt{3}}{2}$. Remarquons que $\frac{1}{2} + \frac{i \cdot \sqrt{3}}{2}$ est le conjugué de $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$. Comme a et b ne sont plus de même signe. On en déduit assez facilement

$$y_2 \in \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right\}.$$

Désormais, traitons le cas $z^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$

On pose $z = a + ib$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a donc $|z^2| = |z|^2 = a^2 + b^2 = 1$ et $z^2 = (a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2abi = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$. Donc par unicité du module, de la partie réelle, et de la partie imaginaire d'un complexe, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 & = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ a^2 + b^2 & = 1 \\ 2ab & = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a & = \pm \frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2} \\ b & = \pm \frac{\sqrt{-\sqrt{3}+2}}{2} \\ 2ab \geq 0 \end{cases}$$

Donc, a et b sont du même signe. Ainsi,

$$z_1 \in \left\{ \frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{-\sqrt{3}+2}}{2}; -\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{-\sqrt{3}+2}}{2} \right\}.$$

Traitons le cas où $z^2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$. Remarquons que $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ est l'opposé de $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$. a et b ne sont plus de même signe. Donc,

$$z_2 \in \left\{ \frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{-\sqrt{3}+2}}{2}; -\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{-\sqrt{3}+2}}{2} \right\}.$$

Finalement, dans les deux autres cas, on en déduit que

$$z \in \left\{ \frac{\sqrt{-\sqrt{3}+2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}; -\frac{\sqrt{-\sqrt{3}+2}}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}; \frac{\sqrt{-\sqrt{3}+2}}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}; \right.$$
$$\left. -\frac{\sqrt{-\sqrt{3}+2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2} \right\}.$$

EXERCICE 434 (③) Par Lancelot Achour[*]

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, Soit E_λ l'équation d'inconnue complexe z :

$$z^2 - 2\lambda z + 1 = 0.$$

Décrire l'ensemble des solutions de E_λ, lorsque λ parcourt $\mathbb{R}$.

On écrit le discriminant du polynôme concerné par E_λ, $\Delta = 4\lambda^2 - 4$, qui est un polynôme du second degré en λ. On distingue trois cas :

- Lorsque $|\lambda| = 1$, il n'y a qu'une seule racine, λ.
- Lorsque $|\lambda| > 1$, il y a deux racines réelles :

$$x_1(\lambda) = \lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1} \quad \text{et} \quad x_2(\lambda) = \lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}.$$

  Une étude de fonctions montre que, lorsque λ parcourt $]1; +\infty[$, $x_1(\lambda)$ parcourt $]1; +\infty[$. Il s'ensuit que $x_2(\lambda) = \frac{1}{x_1(\lambda)}$ parcourt $]0; 1[$.

  Par ailleurs, les fonctions x_1 et x_2 sont impaires. Par conséquent, lorsque λ parcourt $]-\infty; -1[$, $x_1(\lambda)$ parcourt $]-\infty; -1[$ et $x_2(\lambda) = \frac{1}{x_1(\lambda)}$ parcourt $]-1; 0[$.

— Lorsque $0 \leq |\lambda| < 1$, il y a deux racines complexes :

$$z_1(\lambda) = \lambda + i\sqrt{1-\lambda^2} \quad \text{et} \quad z_2(\lambda) = \lambda - i\sqrt{1-\lambda^2}.$$

Puisque $\lambda \in]-1;1[$, il existe $\theta \in]0;\pi[$, tel que $\lambda = \cos(\theta)$. Ainsi :

$$z_1 = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \quad \text{et} \quad z_2 = \cos(\theta) - i\sin(\theta) = \frac{1}{z_1(\lambda)},$$

donc z_1 et z_2 parcourent $\mathbb{U} \setminus \{\pm 1\}$, lorsque λ parcourt $]-1;1[$.

En réunissant les trois,cas, on obtient que l'ensemble cherché est $\mathbb{R}^* \cup \mathbb{U}$.

Exercice 435 (④) Par Lancelot Achour[*]

Adapter les exercices **11** et **12** de **1.4** aux suites complexes.

Soit a et b deux nombres complexes. On cherche à déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des suites complexes vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

On adapte les solutions des exercices 11 et 12 avec quelques modifications. On rappelle que le polynôme caractéristique d'une telle suite est :

$$P(X) := X^2 - aX - b,$$

dont on suppose dans un premier temps que les racines sont deux nombres complexes distincts λ et μ. On considère la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_n := \alpha\lambda^n + \beta\mu^n,$$

avec α et β deux complexes. On montre que $(W_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on calcule :

$$\begin{aligned} aW_{n+1} + bW_n &= a(\alpha\lambda^{n+1} + \beta\mu^{n+1}) + b(\alpha\lambda^n + \beta\mu^n) \\ &= \alpha\lambda^n(a\lambda + b) + \beta\mu^n(a\mu + b) \\ &= \alpha\lambda^{n+2} + \beta\mu^{n+2} \\ &= W_{n+2}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, pour z et z' dans $\mathbb{C}$, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta = z \\ \\ \alpha\lambda + \beta\mu = z" \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{z\mu - z'}{\mu - \lambda} \\ \\ \beta = \frac{z' - z\lambda}{\mu - \lambda} \end{array} \right.$$

Le système a donc une (unique) solution.

Soit maintenant $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}$. Le calcul précédent donne $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que

$$\alpha + \beta = u_0 \quad \text{et} \quad \alpha\lambda + \beta\mu = u_1.$$

On montre alors, par une récurrence double laissée au lecteur, que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \alpha\lambda^n + \beta\mu^n.$$

Supposons désormais que le polynôme de départ admet une racine double que l'on notera λ, et $b \neq 0$ de sorte que $\lambda \neq 0$. On considère la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_n := \alpha\lambda^n + n\beta\lambda^n,$$

pour α et β deux complexes. On montre que $(W_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on calcule :

$$\begin{aligned} aW_{n+1} + bW_n &= a(\alpha\lambda^{n+1} + \beta(n+1)\lambda^{n+1}) + b(\alpha\lambda^n + \beta n\lambda^n) \\ &= \alpha\lambda^n(a\lambda + b) + \beta\lambda^n a\lambda + n\beta\lambda^n(a\lambda + b) \\ &= \alpha\lambda^{n+2} + \beta(n+2)\lambda^{n+2} \qquad = W_{n+2}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, pour z et z' dans $\mathbb{C}$, on a :

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha = z \\ \\ \alpha\lambda + \beta\lambda = z' \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \alpha = z \\ \\ \beta = \frac{z'-z\lambda}{\lambda} \end{array}\right.$$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}$. On dispose de $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que

$$\alpha = u_0 \quad \text{et} \quad \alpha\lambda + \beta\lambda = u_1.$$

On montre alors, par une récurrence double laissée au lecteur, que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \alpha\lambda^n + \beta\lambda^n.$$

Exercice 436 (④) Par Lancelot Achour[∗]

1. Déterminer à l'aide de l'exercice précédent, les suites réelles $(u_n)_{n\geq 0}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{6}{5}u_{n+1} - u_n.$$

2. Montrer que ces suites sont bornées

1. D'après l'exercice précédent, il nous faut déterminer les racines du polynôme caractéristique qui ici se trouve être :

$$P(X) := X^2 - \frac{6}{5}X + 1.$$

Son discriminant est $-\frac{64}{5}$, il admet donc deux racines complexes conjuguées qui sont :

$$\lambda := \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \quad \text{et} \quad \mu := \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i.$$

D'après l'exercice précédent, les suites complexes solutions sont les $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\alpha\lambda^n + \beta\mu^n)_{n\in\mathbb{N}}$ conviennent, pour α et β deux complexes. Déterminons parmi elles les suites réelles. Comme $|\lambda| = |\mu| = 1$, on dispose de $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\lambda = e^{i\theta} \quad \text{et} \quad \mu = e^{-i\theta}.$$

Comme

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \cos(n\theta) = \frac{1}{2}(\lambda^n + \mu^n), \quad \sin(n\theta) = \frac{1}{2i}(\lambda^n - \mu^n),$$

on vérifie que les suites réelles $(\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient la relation donnée. Il en est de même de toutes leurs combinaisons linéaires réelles. Montrons inversement que, si $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite réelle vérifiant la relation donnée, c'est une combinaison linéaire réelle de $(\cos(n\theta))_{n\in N}$ et $(\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$. Pour cela, on note qu'il existe deux nombres réels α et β tels que

$$\alpha = u_0 \quad \text{et} \quad \alpha\cos(\theta) + \beta \in (\theta) = u_1,$$

à savoir

$$\alpha = u_0 \quad \text{et} \quad \beta = \frac{u_1 - u_0\cos(\theta)}{\sin(\theta)}.$$

On montre alors, par récurrence double, que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \alpha\cos(n\theta) + \beta\sin(n\theta).$$

2. Compte-tenu de la question précédente, il suffit de noter que, grâce à l'inégalité triangulaire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\alpha\cos(n\theta) + \beta\sin(n\theta)| \leq |\alpha\cos(n\theta)| + |\beta\sin(n\theta) \leq |\alpha + \beta|.$$

11.5 Complément : les équations du degré 3 et 4

Exercice 437 (④) par Daniel Caby[*]

Soient p et q des nombres complexes et P le polynôme défini par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = z^3 + pz + q.$$

Nous allons expliquer comment résoudre l'équation

$$P(z) = 0. \tag{1}$$

a) Soit z un nombre complexe. Expliquer pourquoi il existe deux nombres complexes u et v (éventuellement égaux) tels que

$$z = u + v \quad 3uv = -p.$$

b) On écrit le nombre complexe z sous la forme $u+v$, où $3uv = -p$. Montrer que l'équation(1) se réécrit : $u^3 + v^3 = -q$.

c) À partir des relations

$$3uv = -p, \quad u^3 + v^3 = -q$$

déterminer une équation du second degré dont u^3 et v^3 sont racines.

d) Montrer que l'on peut exprimer les solutions de (1) à partir des coefficients p et q par des formules faisant intervenir les opérations usuelles et l'exraction de racines carrées et cubiques.

1. On a
$$\begin{cases} z = u + v \\ 3uv = -p \end{cases} \iff \begin{cases} z = u + \dfrac{-p}{3u} \\ v = z - u \end{cases} \iff \begin{cases} u^2 - uz - \dfrac{p}{3} = 0 \\ v = z - u \end{cases}$$
L'équation $u^2 - uz - \dfrac{p}{3} = 0$ admet nécessairement une solution dans $\mathbb{C}$, donc il existe bien $(u, v) \in \mathbb{C}^3$ satisfaisant le système.

2. On a
$$\begin{aligned} (1) &\iff (u + v)^3 + (u + v)p + q = 0 \\ &\iff u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + (u + v)p + q = 0 \\ &\iff u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) = -q \end{aligned}$$
Or, $3uv + p = 0$, on obtient donc bien $u^3 + v^3 = -q$

3. $$\begin{cases} 3uv = -p \\ u^3 + v^3 = -q \end{cases} \iff \begin{cases} u^3v^3 = -\dfrac{p^3}{27} \\ u^3 + v^3 = -q \end{cases}$$
Les coefficients a, b, c de l'équation de la forme $aX^2 + bX + c = 0$ dont u^3 et v^3 sont racines vérient :
$$\begin{cases} \dfrac{-b}{a} = -q \\ \dfrac{c}{a} = -\dfrac{p^3}{27} \end{cases} \text{ En fixant } a = 1, \text{ on obtient : } \begin{cases} a = 1 \\ b = q \\ c = -\dfrac{p^3}{27} \end{cases}$$
En conclusion, l'équation recherchée est $X^2 + qX - \dfrac{p^3}{27}$

4. On peut donc exprimer u^3 et v^3 à partir de p et q à l'aide des opérations usuelles et de

l'extraction de racines carrées, puis u et v, donc z, par extraction de racines cubiques (pour plus de détails voir l'exercice suivant.)

EXERCICE 438 (⑤) par Daniel Caby[*]

On reprend les notations de l'exercice précédent. On suppose p et q réels et on note $\Delta = -4p^3 - 27q^2$

a) On sait depuis l'exercice 163 de **6.3.1** que si $\Delta < 0$ alors l'équation (1) a une unique racine réelle. Expliciter cette racine en fonction de p et q en utilisant les fonctions racine carrée et racine cubique ainsi que les opérations usuelles.
b) On sait depuis l'exercice 163 de **6.3.1** que si $\Delta > 0$ alors l'équation (1) admet trois racines réelles. Reprendre la question a)

a) Le discriminant δ du polynôme de l'exercice précédent est $\delta = q^2 + \dfrac{4p^3}{27}$. On remarque que $\delta = -\dfrac{\Delta}{27}$.
Par conséquent, si $\Delta < 0$ alors l'équation vérifiée par u^3 et v^3 admet deux racines réelles :

$$u^3 = \frac{-q-\sqrt{\delta}}{2} \quad v^3 = \frac{-q+\sqrt{\delta}}{2}.$$

On note u_0 et v_0 les racines cubiques réelles respectivement de u^3 et v^3. L'équation (1) admet donc une solution réelle $z = u_0 + v_0$, soit :

$$z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

b) De même, si $\Delta > 0$ alors l'équation de l'exercice précédent admet deux racines u^3 et v^3 complexes conjuguées. Il y a trois valeurs possibles de u et v dans $\mathbb{C}$. On choisit un couple de ces valeurs respectant l'équation $3uv = -p$ que l'on note (u_0, v_0). On a donc déjà une première solution z_0 de (1) : $z_0 = u_0 + v_0$.

Les autres valeurs possibles de u et v sont donc de la forme $j^k u_0$ et $j^{-k} v_0$ avec $0 \leqslant k \leqslant 2$ et $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ (cf. chapitre 10.10)
Les deux autres solutions z_1 et z_2 seront donc :

$$\begin{aligned} z_1 &= ju_0 + j^2 v_0 \\ z_2 &= j^2 u_0 + jv_0 \qquad \text{afin de respecter } 3uv = 3u_0v_0 = -p \end{aligned}$$

Par conséquent, les trois solutions sont :

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \\ z_1 &= j \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + j^2 \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \\ z_2 &= j^2 \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + j \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \end{aligned}$$

EXERCICE 439 (③) par Adrien Israël[*]

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 - 6z - 40 = 0$ par la méthode de Cardan. En déduire que

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4.$$

On utilise l'exercice précédent avec $p=-6, q=-40$, de sorte que

$$\Delta = -4p^3 - 27q^2 = 864 - 43200 = -42336 \quad \text{et} \quad \delta = 1568 = 2^5.7^2.$$

Il y a une unique racine réelle :

$$\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}.$$

Les deux autres racines (complexes, et conjuguées) sont

$$\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}j + \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}j^2 \quad \text{et} \quad \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}j^2 + \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}j.$$

En remarquant que 4 est une racine évidente, on a, par unicité de la racine réelle,

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = 4.$$

Remarque. En factorisant par $x-4$, on montre que les deux autres racines de l'équation sont $-2+\sqrt{6}i$ et $-2-\sqrt{6}i$. En considérant le signe de la partie imaginaire, on en déduit que

$$-2+\sqrt{6}i = \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}j^2 + \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}j.$$

EXERCICE 440 (③) par Adrien Israël[*]

Résoudre l'équation $z^3+5z-2=0$ et retrouver le résultat de l'exercice 33 de 2.1.

Nous devons ici montrer que a^3+5a *est entier, avec* $a = \sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{152}{27}}} - \sqrt[3]{-1+\sqrt{\frac{152}{27}}}$.

Nous devons résoudre l'équation du troisième degré $z^3+5z-2=0$. Cette équation peut s'écrire $z^3+pz+q=0$, avec $p=5$ et $q=-2$. Calculons le discriminant Δ de cette équation. D'après l'exercice 438, $\Delta = -4p^3-27q^2 = -284$. Le discriminant est donc négatif, et notre équation n'a qu'une unique racine.

Cette racine, toujours à l'aide de l'exercice 438 est donnée par :

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{1-\sqrt{\frac{152}{27}}} + \sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{152}{27}}} \\ &= -\sqrt[3]{-1+\sqrt{\frac{152}{27}}} + \sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{152}{27}}} \end{aligned}$$

car $\sqrt[3]{-1} = -1$.

Ainsi, a est solution de l'équation $z^3+5z-2=0$. C'est dire que $a^3+5a=2$, d'où le résultat (2 est entier).

EXERCICE 441 (③) Par Lancelot Achour[*]

On se propose d'indiquer comment résoudre une équation de degré 4 peut être ramenée à une équation de degré 3.

1. En adaptant le raisonnement fait au début de ce paragraphe, montrer que l'on peut se borner au cas d'une équation de la forme $P(z)=0$ où :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = z^4+pz^2+qz+r, \qquad \text{avec} \quad (p,q,r) \in \mathbb{C}^3.$$

2. Soit λ un nombre complexe. Expliciter un polynôme complexe T_λ de degré au plus 2 tel que :
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = \left(z^2 + \frac{\lambda}{2}\right) - T_\lambda(z).$$
3. Montrer que T_λ est le carré d'un polynôme de degré au plus 1 si et seulement si λ vérifie une équation de degré 3 que l'on précisera.
4. En déduire une méthode de résolution d'une équation du quatrième degré. Constater que les solutions peuvent s'exprimer à partir des coefficients à l'aide d'opérations usuelles et de racines carrées et cubiques de nombres complexes.

1. On part du polynôme $P(X) := X^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e$. On se sert de la méthode du début du paragraphe et on calcule, pour $(z, h) \in \mathbb{C}^2$:
$$\begin{aligned} P(z+h) =& (h^4 + 4h^3 z + 6h^2 z^2 + 4hz^3 + z^4) + \\ & b(h^3 + 2h^2 z + 3hz^2 + z^3) + \\ & c(z^2 + 2hz + h^2) + \\ & d(z+h) + e. \end{aligned}$$
Pour se ramener à un polynôme sans monôme de degré 3, il suffit alors de choisir $h = \frac{-b}{4}$.
2. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$. Pour $z \in \mathbb{C}$, on calcule :
$$\left(z^2 + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - az^2 - bz^2 - c = z^4 - z^2(\lambda + a) - bz - d + \frac{\lambda^2}{4}.$$
Pour que l'expression obtenue soit égale à $P(z)$, il faut alors déterminer la valeur de (a, b, c), soit le système :
$$\begin{cases} p = -\lambda - a \\ -b = q \\ r = \dfrac{\lambda^2}{4} - d \end{cases} \iff \begin{cases} a = -\lambda - p \\ b = -q \\ d = \dfrac{\lambda^2}{4} - r \end{cases}$$
En posant :
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad T_\lambda(z) := (-\lambda - p)z^2 - qz + \frac{\lambda^2}{4} - r,$$
on obtient un polynôme qui convient.
3. Un polynôme du second degré est le carré d'un polynôme de degré 1 si et seulement si il admet une racine double, soit un discriminant nul. On calcule alors ce dernier noté $\Delta(\lambda)$:
$$\Delta(\lambda) = q^2 + (\lambda + p)(\lambda^2 - 4r) = \lambda^3 + p\lambda^2 - 4r\lambda - 4pr,$$
autrement dit, λ doit être solution du polynôme de degré 3, $\Delta(\lambda)$.
4. Pour étudier les racines d'un polynôme de degré 4, on se ramène à l'étude d'un polynôme sans monôme de degré 3, qui peut alors s'exprimer comme somme de polynôme de degré 4 et 2, tout deux exprimable comme carré parfait. Obtenir une racine de P revient donc à résoudre des équations polynomiales de degré 2. Enfin, l'ensemble des manipulations algébriques n'a fait qu'utiliser les opérations arithmétiques standards, et la résolution entraîne l'utilisation de radicaux.

Remarque. Il s'avère qu'Abel et Ruffini ont eu l'intuition qu'au delà du degré 4, il n'était pas possible de déterminer des formules générales pour exprimer les racines des polynômes en fonction des coefficients, en utilisant les opérations arithmétiques élémentaires ainsi que les radicaux. Ce résultat fut montré un peu plus tard, d'une manière satisfaisante et transformant radicalement l'étude des algébriste, par Galois et avec lui, la naissante Théorie des groupes.

11.6 Complément : rigidité des polynômes

Exercice 442 (④) par Teiki Rigaud[*]

Soient $n \in \mathbb{N}$, $x_0, ..., x_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts. Pour $j \in \{0, ..., n\}$, on pose :

$$\forall x \in \mathbb{K}, L_j(x) = \prod_{\substack{0 \leq i \leq n \\ i \neq j}} \left(\frac{x - x_i}{x_j - x_i}\right)$$

a) Montrer que, pour j et k dans $\{0, ..., n\}$, $L_j(x_k)$ vaut 0 si $j \neq k$,1 si $j = k$.

b) Soit P une fonction polynômiale à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré au plus n. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \qquad P(x) = \sum_{i=0}^{n} P(x_i) L_i(x).$$

a) Soit $k \in \{0, ..., n\}$.
Si $j \neq k$:

$$L_j(x_k) = \frac{x_k - x_k}{x_j - x_k} \prod_{\substack{0 \leq i \leq n \\ i \neq j \\ i \neq k}} \left(\frac{x_k - x_i}{x_j - x_i}\right) = 0$$

Si $j = k$:

$$L_j(x_j) = \prod_{\substack{0 \leq i \leq n \\ i \neq j}} \left(\frac{x_j - x_i}{x_j - x_i}\right) = 1$$

b) Ainsi, pour tout k dans $\{0, ..., n\}$:

$$\sum_{i=0}^{n} P(x_i) L_i(x_k) = P(x_k) L_k(x_k) = P(x_k).$$

Soit Q le polynôme défini par

$$\forall x \in \mathbb{K}, \qquad Q(x) = \sum_{i=0}^{n} P(x_i) L_i(x).$$

Les polynômes P et Q sont de degré au plus n et coïncident en n+1 points distincts. Ainsi, par rigidité des polynômes :

$$\forall x \in \mathbb{K}, P(x) = Q(x) == \sum_{i=0}^{n} P(x_i) L_i(x).$$

Remarque. Ce résultat sera redémontré en sup.

Exercice 443 (④) Par Lancelot Achour

1. Soient $n \in \mathbb{N}$, P un polynôme de degré n à coefficients complexes. On suppose qu'il existe $n + 1$ nombres rationnels distincts $x_0, \ldots, x_n$ tels que :

$$\forall k \in \{0, \ldots, n\}, \quad P(x_k) \in \mathbb{Q}.$$

Montrer que P est à coefficients dans $\mathbb{Q}$.

2. Réciproquement, soient $n \in \mathbb{N}$, $x_0, \ldots, x_n$ des nombres rationnels distincts, $y_0, \ldots, y_n$ des nombres rationnels. Montrer qu'il existe un polynôme de degré au plus n à coefficients rationnels tel que :

$$\forall k \in \{0, \ldots, n\}\}, \quad P(x_k) = y_k.$$

1. On exprime P dans la base $(L_j)_{0\leq j\leq n}$ aux points $x_0,\ldots,x_k$:
$$\forall x\in\mathbb{C},\quad P(x)=\sum_{j=0}^{n}P(x_j)L_j(x).$$
Il reste à vérifier que les $(L_j)_{0\leq j\leq n}$ sont à coefficients rationnels. Pour cela, on fixe $j\in[\![0;n]\!]$, et observons que :
$$\forall x\in\mathbb{Q},\quad \forall i\in[\![0;n]\!]\backslash\{j\}=\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\in\mathbb{Q},$$
par conséquent L_j est bien à coefficients rationnels et le résultat suit.
2. Il suffit de considérer la fonction polynomiale définie par
$$\forall x\in\mathbb{C},\qquad P(x)=\sum_{j=0}^{n}y_jL_j(x),$$
où les $(L_j)_{0\leq j\leq n}$ sont les polynômes de Lagrange aux points $x_0,\ldots,x_k$.

EXERCICE 444 (④) Par Lancelot Achour[∗]

Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et P un polynôme complexe de degré au plus $n-1$.
1. Montrer que
$$P(0)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}P\left(\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)\right).$$
On pourra utiliser l'exercice 390 de **10.10**.
2. En déduire que, si $a\in\mathbb{C}^*$, alors
$$\forall z\in\mathbb{C},\quad P(z)=\sum_{k=0}^{n-1}P\left(z+a\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)\right).$$

1. On écrit :
$$\forall z\in\mathbb{C},\quad P(z)=\sum_{k=0}^{n-1}a_kz^k,$$
avec $(a_k)_{0\leq k\leq n-1}$ une certaine famille de complexes. Ainsi, $P(0)=a_0$. On calcule alors :
$$\sum_{j=0}^{n-1}P\left(\exp\left(\frac{2ij\pi}{n}\right)\right)=\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}a_k\exp\left(\frac{2ij\pi}{n}\right)^k=\sum_{k=0}^{n-1}a_k\sum_{j=0}^{n-1}\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)^j,$$
qui, avec l'exercice 390 donne na_0 et le résultat en découle.
2. Fixons $z\in\mathbb{C}$ et posons $Q(Z):=P(z+aZ)$, de sorte que $P(z)=Q(0)$. La question a. donne alors que :
$$Q(0)=\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}Q\left(\exp\left(\frac{2ij\pi}{n}\right)\right),$$
d'où l'on tire que :
$$P(z)=\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n}P\left(z+a\exp\left(\frac{2ij\pi}{n}\right)\right),$$
ce qu'il fallait obtenir.

11.7 Complément : polynômes de Tchebychev

EXERCICE 445 (②) par Ylan Marx

Montrer que la fonction polynomiale T_p est paire si p est pair, impaire si p est impair.

Soit p un entier pair. Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous avons, d'après le théorème 24 :

$$\begin{aligned}T_p(-x) &= \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} \binom{p}{2l} (-x)^{p-2l}(x^2-1)^l \\ &= \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} (-1)^{p-2l} \binom{p}{2l} x^{p-2l}(x^2-1)^l\end{aligned}$$

Comme p et $-2l$ sont pairs, $p-2l$ est pair également et donc $(-1)^{p-2l} = 1$, d'où :

$$T_p(-x) = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} \binom{p}{2l} x^{p-2l}(x^2-1)^l = T_p(x), \text{ donc :}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T_p(-x) = T_p(x), \text{ et donc } T_p \text{ est paire.}$$

De même, soit p un entier impair. Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous avons d'après le théorème 24 :

$$\begin{aligned}T_p(-x) &= \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} \binom{p}{2l} (-x)^{p-2l}(x^2-1)^l \\ &= \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} (-1)^{p-2l} \binom{p}{2l} x^{p-2l}(x^2-1)^l\end{aligned}$$

Comme p est impair et $-2l$ est pair, $p-2l$ est impair et donc $(-1)^{p-2l} = -1$, d'où :

$$T_p(-x) = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} -\binom{p}{2l} x^{p-2l}(x^2-1)^l = -\sum_{l=0}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} \binom{p}{2l} x^{p-2l}(x^2-1)^l = -T_p(x), \text{ donc :}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T_p(-x) = -T_p(x), \text{ et donc } T_p \text{ est impaire.}$$

Exercice 446 (③) par Ylan Marx

a) Montrer que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad T_p(x) + T_{p+2}(x) = 2xT_{p+1}(x).$$

b) Retrouver à l'aide de la question a) le degré et le coefficient dominant de T_p si $p \in \mathbb{N}^*$

a) Soit $p \in \mathbb{N}$, soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$T_p(\cos(\theta)) + T_{p+2}(\cos(\theta)) = \cos(p\theta) + \cos((p+2)\theta) = \cos((p+1)\theta - \theta) + \cos((p+1)\theta + \theta).$$

En utilisant la formule :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b).$$

il vient

$$T_p(\cos(\theta)) + T_{p+2}(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta)\ \cos((p+1)\theta).$$

Comme tout élément de $[-1;1]$ admet au moins un antécédent par cos :

$$\forall x \in [-1;1], \quad T_p(x) + T_{p+2}(x) = 2xT_{p+1}(x).$$

Les fonctions polynômiales T_p, T_{p+2} et $2xT_{p+1}$ coïncident sur $[-1,1]$ qui est un ensemble infini. Elles sont donc égales grâce au théorème 23. Ainsi,

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad T_p(x) + T_{p+2}(x) = 2xT_{p+1}(x)$$

b) D'après la question a, nous avons :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad T_{p+2}(x) = 2xT_{p+1}(x) - T_p(x)$$

Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$\mathcal{P}_n : \quad T_n \text{ est de degré } n \text{ et de coefficient dominant } 2^{n-1}$$

Montrons par récurrence double que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Initialisation. On a, pour x réel : $T_1(x) = x$, donc T_1 a pour coefficient dominant $1 = 2^0 = 2^{1-1}$ et pour degré 1, et donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.
On a, pour x réel : $T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1$, donc T_2 a pour coefficient dominant $2 = 2^1 = 2^{2-1}$ et pour degré 2 et donc $\mathcal{P}_2$ est également vraie.
Hérédité. Supposons $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ vraies pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On a alors T_{n+1} de degré $n+1$ et de coefficient dominant 2^n et T_n de degré n. Nous avons donc :

$$T_{n+1}(x) = 2^n x^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \text{ et :}$$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k, \text{ avec } a_0, ..., a_n \text{ et } b_0, ..., b_n \text{ des réels. On a donc :}$$

$$\begin{aligned} T_{n+2}(x) &= 2xT_{n+1}(x) + T_n(x) \\ &= 2x\left(2^n x^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right) + \sum_{k=0}^{n} b_k x^k \\ &= 2^{n+1}x^{n+2} + \sum_{k=1}^{n+1} 2a_{k-1}x^k + \sum_{k=0}^{n} b_k x^k \end{aligned}$$

Le fonction T_{n+2} est polynomiale de degré $n+2$ et de coefficient dominant $2^{n+1} = 2^{n+2-1}$. Ainsi, $\mathcal{P}_{n+2}$ est alors vraie, ce qui achève la démonstration.

Exercice 447 (①) par Ylan Marx

Expliciter les fonctions polynômiales T_3 et T_4.

D'après l'exercice 446, nous avons :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad T_{p+2}(x) = 2xT_{p+1}(x) - T_p(x)$$

Nous avons de plus, pour $x \in \mathbb{R}$: $T_0(x) = 1$, et $T_1(x) = x$. On a donc, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$T_2(x) = 2x \times x - 1 = 2x^2 - 1, \text{ puis :}$$

$$T_3(x) = 2x(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 2x - x = 4x^3 - 3x, \text{ et :}$$

$$T_4(x) = 2x(4x^3 - 3x) - (2x^2 - 1) = 8x^4 - 6x^2 - 2x^2 + 1 = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

Exercice 448 (③) par Ylan Marx

a) Pour p dans $\mathbb{N}^*$, déterminer les réels θ tels que $\cos(p\theta) = 0$

b) Pour p dans $\mathbb{N}^*$, établir la factorisation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T_p(x) = 2^{p-1} \prod_{k=0}^{p-1} \left(x - \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2p}\right)\right)$$

a) Sur $[-\pi;\pi]$, les solutions de l'équation $\cos(x)=0$ sont $-\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2}$.

Or, cos est 2π-périodique, donc les solutions de l'équation $\cos(x)=0$ sur $\mathbb{R}$ sont donc les $-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ et $\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ où k varie dans $\mathbb{Z}$, i.e. les $\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ où k varie dans $\mathbb{Z}$.

Soit $\theta\in\mathbb{R}$. On a $\cos(p\theta)=0$ si et seulement s'il existe $k\in\mathbb{Z}$, tel que $p\theta=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, i.e. $2p\theta=\pi+2k\pi=\pi(2k+1)$, i.e. $\theta=\dfrac{(2k+1)\pi}{2p}$.

b) Pour tout $k\in\{0,...,p-1\}$, la question précédente montre que $\cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2p}\right)$ est racine de T_p.
Montrons que ces racines sont distinctes. Si $k\in\{0,...,p-1\}$,

$$\frac{(2k+1)\pi}{2p}\in[0,\pi].$$

Mais la fonction cos est strictement écroissante sur $[0,\pi]$, donc la suite $\left(\cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2p}\right)\right)_{0\leq k\leq p-1}$ est strictement décroissante, et ses termes sont distincts.
Nous venons de produire p racines distinctes de T_p. Or, T_p est de degré p et de coefficient dominant 2^{p-1}, donc d'après les théorèmes 19 et 20, les racines de T_p sont les $\cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2p}\right)$, avec $k\in\{0,...,p-1\}$, et T_p admet la factorisation suivante :

$$T_p(x)=2^{p-1}\prod_{k=0}^{p-1}\left(x-\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2p}\right)\right)$$

Exercice 449 (②) Par Lancelot Achour

Soit $p\in\mathbb{N}^*$. Déterminer les éléments x de $[-1;1]$ tels que $|T_p(x)|=1$ et les ranger par ordre croissant.

On part de l'identité vérifiée par T_p :

$$\forall\theta\in\mathbb{R},\qquad T_p(\cos(\theta))=\cos(p\theta).$$

L'équation $\cos(p\theta)=1$, a pour solutions les θ tels que $p\theta$ soit de la forme $k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

D'autre part, l'application cos est une bijection strictement décroissante de $[0;\pi])$ sur $[-1,1]$. Il en résulte que l'équation $|T_p(x)|=1$ admet $p+1$ solutions sur $[-1,1]$, à savoir les nombres :

$$\cos(\pi)<\cos\left(\frac{(p-1)\pi}{p}\right)<\cdots<\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)<\cos(0).$$

Exercice 450 (④) Par Lancelot Achour

1. Soit $p\in\mathbb{N}$. En dérivant l'égalité qui définit T_p, montrer qu'il existe une unique fonction polynômiale U_p telle que :

$$\forall\theta\in\mathbb{R},\quad \sin(\theta)\,U_p(\cos(\theta))=\sin(p\theta).$$

Préciser le degré, le coefficient dominant, et la parité de U_p.

2. Pour quels $p\in\mathbb{N}$ existe-t-il une fonction polynomiale P telle que :

$$\forall\theta\in\mathbb{R},\quad \sin(p\theta)=P(\sin(\theta))?$$

1. Par définition de T_p, on a que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T_p(\cos(\theta)) = \cos(p\theta),$$

En dérivant cette relation et en multipliant par -1, on obtient :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \sin(\theta)\, T_p'(\cos(\theta)) = p \sin(p\theta).$$

En posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad U_p(x) = \frac{1}{p} T_p'(x),$$

on obtient un polynôme vérifiant la relation demandée.
Si P est un polynôme vérifiant la même relation, $P - U_p$ s'annule sur l'ensemble infini $[-1, 1]$ et est donc le polynôme nul, ce qui justifie l'unicité.
On a vu dans l'exercice 446 que, si $p \in \mathbb{N}^*$, T_p est de degré p et de coefficient dominant 2^{p-1}. On en déduit que U_p est de degré $p - 1$ et de coefficient dominant 2^{p-1}.
Enfin, on a vu dans l'exercice 445 que, si p est pair, T_p est pair, et que, si p est impair, T_p est impair. Grâce à l'exercice 151, on conclut que ,si p est pair, U_p est impair, et que, si p est impair, U_p est pair.

2. On sait (remarque 2, **11.1**) qu'une fonction polynomiale est paire si et seulement si elle est combinaison linéaire de monômes pairs (resp. impairs). En particulier, si P est une fonction polynomiale réelle paire, il existe une fonction polynomiale réelle Q telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = Q(x^2).$$

— Si p est impair, U_p est pair. Il existe donc un polynôme réel Q_p vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad U_p(x) = Q_p(x^2),$$

de sorte que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad \sin(n\theta) = \sin(\theta)\, U_p(\cos(\theta)) = \sin(\theta)\, Q_p(\cos^2(\theta)) = \sin(\theta)\, Q_p(1 - \sin^2(\theta)).$$

Il suffit alors de définir la fonction polynomiale P par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = x\, Q_p(1 - x^2)$$

pour que soit vérifiée l'égalité désirée.

— Supposons p pair. Notons $p = 2m$ avec $m \in \mathbb{N}$ et considérons P vérifiant la relation de l'énoncé. Alors, en dérivant cette relation par rapport à θ, on obtient

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos(\theta)\, P'(\sin(\theta)) = p\, \cos(p\theta).$$

Prenant $\theta = \frac{\pi}{2}$, on a la contradiction

$$0 = p\, \cos\left((p\frac{\pi}{2}\right) = 2m(-1)^m.$$

Exercice 451 (⑤) par Ylan Marx (Équations réciproques.)

Soit P un polynôme de degré n $\in \mathbb{N}^*$ à coefficients complexes :

$$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

On suppose que P est un polynôme réciproque, ce qui signifie que :

$$\forall k \in \{0, ..., n\}, a_k = a_{n-k}$$

a) Montrer que les racines de P dans $\mathbb{C}$ sont non nulles et que si z est racine de P, il en est de même de $\frac{1}{z}$.

b) Si $p \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}^*$, montrer que :

$$T_p\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(z^p+\frac{1}{z^p}\right).$$

c) En déduire que, si n est pair égal à 2m et si on pose $Z = z+\frac{1}{z}$, l'équation $P(z) = 0$ équivaut à une équation de degré m en Z.

d) Que se passe-t-il si n est impair ?

a) On a $P(0) = a_0 = a_n \neq 0$ car P est de degré n, donc 0 n'est pas racine de P.

D'autre part, pour $z \in \mathbb{C}^*$,

$$P(z)=0 \Longleftrightarrow \frac{1}{z^n}\sum_{k=0}^{n} a_k z^k = 0 \Longleftrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k z^{k-n} = 0 \Longleftrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\left(\frac{1}{z}\right)^{n-k} = 0 \Longleftrightarrow P(\frac{1}{z}) = 0.$$

b) Nous avons d'après l'exercice 446 :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad T_p(x)+T_{p+2}(x) = 2xT_{p+1}(x).$$

$T_p + T_{p+2}$ et $2xT_{p+1}$ sont des polynômes qui coïncident sur $\mathbb{R}$ qui est un ensemble infini. Ils sont donc égaux sur $\mathbb{C}$ d'après le théorème 23, et donc :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, \quad T_p(z)+T_{p+2}(z) = 2zT_{p+1}(z).$$

Nous avons donc :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, \quad T_{p+2}(z) = 2zT_{p+1}(z) - T_p(z).$$

La fonction S_p définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \qquad S_p(z) = z^p T_p\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)$$

est la restriction d'une fonction polynomiale définie sur $\mathbb{C}$. Pour $\theta \in \mathbb{R}$,

$$S_p(e^{i\theta}) = e^{ip\theta}\ T_p(\cos(\theta)) = e^{ip\theta}\ \cos(p\theta) = \frac{1}{2}\left(1+e^{2ip\theta}\right).$$

La fonction polynomiale

$$z \in \mathbb{C} \longmapsto S_p(z) - \frac{1}{2}(1+z^{2p})$$

est polynomiale et s'annule sur l'ensemble infini $\mathbb{U}$. Elle est donc identiquement nulle. C'est dire que

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \qquad T_p\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(z^p+\frac{1}{z^p}\right).$$

c) On note (S), l'équation suivante d'inconnue z :

$$(S): \quad a_m + 2\sum_{k=1}^{m} a_{m-k} T_k\left(\frac{1}{2}z\right) = 0$$

Pour tout $k \in \{1;...;m\}$, T_k est de degré k donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_{m-k}T_k\left(\frac{1}{2}z\right)$ est de degré m en z, et donc (S) correspond à une équation de degré m.

Soit z une racine de P. On a alors $z \neq 0$ d'après la question a, et :

$$\sum_{k=0}^{2m} a_k z^k = 0, \text{ puis comme } z \neq 0 :$$

$$z^{-m}\sum_{k=0}^{2m} a_k z^k = 0, \text{ d'où :}$$

$$\sum_{k=0}^{2m} a_k z^{k-m} = 0, \text{ puis en séparant les sommes :}$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} a_k z^{k-m} + a_m + \sum k = m + 1^{2m} a_k z^{k-m} = 0$$

Comme P est un polynôme réciproque, on a :

$$\sum_{k=0}^{m-1} a_k \left(\frac{1}{z}\right)^{m-k} + a_m + \sum_{k=m+1}^{2m} a_{2m-k} z^{k-m} = 0, \text{ puis en posant } i = 2m-k \text{ dans la seconde somme, on obtient :}$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} a_k \left(\frac{1}{z}\right)^{m-k} + a_m + \sum_{i=0}^{m-1} a_i z^{m-i} = 0, \text{ d'où :}$$

$$a_m + \sum_{k=0}^{m-1} a_k \left(z^{m-k} + \left(\frac{1}{z}\right)^{m-k}\right) = 0$$

Nous avons alors d'après la question b :

$$a_m + 2\sum_{k=0}^{m-1} a_k T_{m-k}\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) = 0, \text{ puis en posant } i = m-k, \text{ on obtient :}$$

$$a_m + 2\sum_{i=1}^{m} a_{m-i} T_i\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) = 0, \text{ d'où :}$$

$$a_m + 2\sum_{i=1}^{m} a_{m-i} T_i\left(\frac{1}{2}Z\right) = 0, \text{ et donc } Z \text{ est alors solution de } (S).$$

Réciproquement, si Z est solution de (S), alors on a :

$$a_m + 2\sum_{k=1}^{m} a_{m-k} T_k\left(\frac{1}{2}Z\right) = 0, \text{ d'où :}$$

$$a_m + 2\sum_{k=0}^{m-1} a_k T_{m-k}\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) = 0, \text{ d'où :}$$

$$a_m + \sum_{k=0}^{m-1} a_k \left(z^{m-k} + \left(\frac{1}{z}\right)^{m-k}\right) = 0, \text{ puis par réciprocité de } P \text{ :}$$

$$a_m + \sum_{k=0}^{m-1} a_{2m-k} z^{m-k} + \sum_{k=0}^{m-1} a_k z^{k-m} = 0, \text{ puis en posant } i = 2m-k \text{ dans la 1ère somme :}$$

$$a_m z^0 + \sum_{i=m+1}^{2m} a_i z^{i-m} + \sum_{k=0}^{m-1} a_k z^{k-m} = 0, \text{ d'où :}$$

$$\sum_{k=0}^{2m} a_k z^{k-m} = 0, \text{ d'où :}$$

$$z^{-m}\sum_{k=0}^{2m} a_k z^k = 0, \text{ d'où :}$$

$$z^{-m}P(z) = 0, \text{ puis comme } z^{-m} \neq 0,\ P(z) = 0, \text{ et donc } z \text{ est racine de } P.$$

L'équation $P(z) = 0$ équivaut donc à une équation de degré m en Z.

d) On considère n impair. On a alors $n = 2m + 1$, avec m un entier.
Montrons que -1 est racine de P. Nous avons :

$$P(-1) = \sum_{k=0}^{2m+1} a_k(-1)^k = \sum_{k=0}^{m} a_k(-1)^k + \sum_{k=m+1}^{2m+1} a_k(-1)^k, \text{ puis par réciprocité de } P :$$

$$P(-1) = \sum_{k=0}^{m} a_k(-1)^k + \sum_{k=m+1}^{2m+1} a_{2m+1-k}(-1)^k, \text{ puis en posant } i = 2m+1-k, \text{ dans la 2ème somme, on obtient :}$$

$$P(-1) = \sum_{k=0}^{m} a_k(-1)^k + \sum_{i=0}^{m} a_i(-1)^{2m+1-i} = \sum_{k=0}^{m} a_k \left((-1)^k + (-1)^{2m+1-k}\right)$$

Nous avons k et -k de même parité donc k et $2m+1-k$ de parité différente et donc $(-1)^k + (-1)^{2m+1-k} = 0$, d'où :

$$P(-1) = \sum_{k=0}^{m} a_k \times 0 = 0$$

-1 est donc bien racine de P

Il existe donc, d'après le théorème 18, un polynôme Q de degré $2m$ tel que :

$$P(z) = (z+1)Q(z)$$

On note $Q(z) = \sum_{k=0}^{2m} b_k z^k$, avec $b_0, ..., b_{2m}$, des complexes.

Montrons que Q est un polynôme réciproque.
Nous avons : $P(z) = (z+1)Q(z)$, donc : $P(z) = zQ(z) + Q(z)$, d'où :

$$\sum_{k=0}^{2m+1} a_k z^k = \sum_{k=1}^{2m+1} b_{k-1} z^k + \sum_{k=0}^{2m} b_k z^k, \text{ puis en considérant } b_{-1} = b_{2m+1} = 0, \text{ on obtient :}$$

$$\sum_{k=0}^{2m+1} a_k z^k = \sum_{k=0}^{2m+1} \left(b_k + b_{k-1}\right) z^k$$

On a alors d'après le théorème 16 :

$$\forall k \in \{0, ..., 2m+1\}, \quad a_k = b_{k-1} + b_k, \text{ avec } b_0 = a_0 \text{ et } b_{2m} = a_{2m+1}$$

Soit $\mathcal{R}_p$ la propriété définie pour tout $p \in \{0, ..., 2m\}$ par :

$$\mathcal{R}_p : \quad b_p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} a_k$$

Montrons par récurrence que $\mathcal{R}_p$ est vraie pour tout $p \in \{0, ..., 2m\}$.

Initialisation. On a : $b_0 = a_0$, et : $\sum_{k=0}^{0} (-1)^{0-k} a_k = a_0$, donc : $b_0 = \sum_{k=0}^{0} (-1)^{0-k} a_k$, et donc $\mathcal{R}_0$ est vraie.

Hérédité. Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{R}_p$ vraie pour un certain $p \in \{0, ..., 2m-1\}$ fixé. On a alors :

$$b_p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} a_k$$

Nous avons par ailleurs $p+1 \in \{0, ..., 2m\}$, donc :

$$a_{p+1} = b_{p+1} + b_p, \text{ d'où :}$$

$$b_{p+1} = a_{p+1} - b_p = a_{p+1} - \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} a_k$$

$$= (-1)^{p+1-(p+1)}a_{p+1} + \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p+1-k} a_k$$

$$= \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^{p+1-k} a_k, \text{ et donc } \mathcal{R}_{p+1} \text{ est alors vraie.}$$

Conclusion. $\mathcal{R}_0$ est vraie et $\mathcal{R}_p$ est héréditaire donc par récurrence, est vraie pour tout $p \in \{0, ..., 2m\}$, et donc :

$$\forall p \in \{0, ..., 2m\}, \quad b_p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} a_k$$

Montrons que :

$$\forall p \in \{0, ..., 2m\}, \quad b_{2m-p} = b_p$$

On peut se limiter sans perte de généralité à $p \leq m-1$, le cas $p = m$ étant immédiat et le cas $p > m$ pouvant se ramener par symétrie au cas $p \leq m-1$.
Soit $p \in \{0, ..., m-1\}$. Nous avons :

$$b_{2m-p} - b_p = \sum_{k=0}^{2m-p} (-1)^{2m-p-k} a_k - \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} a_k.$$

Comme p et $-p$ sont de même parité et que $2m$ est pair, $2m - p - k$ et $p - k$ sont de même parité, donc $(-1)^{2m-p-k} a_k = (-1)^{p-k} a_k$, et donc :

$$b_{2m-p} - b_p = \sum_{k=p+1}^{2m-p} (-1)^{2m-p-k} a_k,$$

puis, en séparant les sommes et en utilisant la réciprocité de P :

$$b_{2m-p} - b_p = \sum_{k=p+1}^{m} (-1)^{2m-p-k} a_k + \sum_{k=m+1}^{2m-p} (-1)^{2m-p-k} a_{2m+1-k}$$

On pose $i = 2m + 1 - k$ dans la 2ème somme. On a alors :

$$b_{2m-p} - b_p = \sum_{k=p+1}^{m} (-1)^{2m-p-k} a_k + \sum_{i=p+1}^{m} (-1)^{i-p-1} a_i$$

$$= \sum_{k=p+1}^{m} a_k \left((-1)^{2m-p-k} + (-1)^{k-p-1} \right)$$

Nous avons k et $-k$ de même parité donc comme $2m$ est pair et -1 impair, $2m - p - k$ et $k - p - 1$ sont de parité différente, et donc $(-1)^{2m-p-k} + (-1)^{k-p-1} = 0$, d'où $b_{2m-p} - b_p = 0$, et donc :

$$\forall p \in \{0, ..., 2m\}, \quad b_{2m-p} = b_p$$

Q est donc un polynôme réciproque de degré $2m$, donc en utilisant la question c, l'équation $Q(z) = 0$ équivaut à (R), une équation de degré m en Z.
Comme $P(z) = (z + 1)Q(z)$, l'équation $P(z) = 0$ équivaut donc à $z = -1$ ou à Z est solution de (R).

11.8 Complément : vers les formules de Viète

EXERCICE 452 (②) par Antonin Demairé

On conserve les notations précédentes. Exprimer $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ en fonction de a,b,c,d.

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) = \frac{b^2}{a^2} + \frac{2c}{a} = \frac{b^2 + 2ac}{a^2}$$

EXERCICE 453 (③) Par Lancelot Achour

En utilisant l'exercice 400, de **10.10**, calculer la somme et le produit des trois réels,

$$\cos\left(\frac{2k\pi}{7}\right), \quad k \in \{1, 2, 3\}.$$

On reprend le polynôme de l'exercice 400 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) := x^3 + x^2 - 2x - 1.$$

La méthode utilisée dans l'exercice 400 laisse remarquer que les nombres :

$$2\cos\left(\frac{k\pi}{7}\right), \quad k \in [\![1; 3]\!],$$

sont racines de P. en particuliers, les nombres :

$$\cos\left(\frac{k\pi}{7}\right), \quad k \in [\![1; 3]\!],$$

sont racines du polynôme $Q(X) := P(\frac{1}{2}X)$. Par conséquent, on déduit des formules de Viète que :

$$\sum_{k=1}^{3} \cos\left(\frac{k\pi}{7}\right) = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^{3} \cos\left(\frac{k\pi}{7}\right) = \frac{1}{8}.$$

EXERCICE 454 (③) par Antonin Demairé

Soient x_1, x_2, x_3, trois nombres complexes. On note P le polynôme unitaire défini par :

$$\forall x \in \mathbb{C}, \quad P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

On note aussi

$$\forall x \in \mathbb{C}, \quad P(x) = x^3 - sx^2 + ux - p.$$

En sommant les égalités

$$x_i^3 = sx_i^2 - ux_i + p \quad \text{pour } i \in \{1, 2, 3\},$$

obtenir une identité remarquable à

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3x_1x_2x_3.$$

On a

$$p = x_1x_2x_3,\ u = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 \ et\ s = x_1 + x_2 + x_3$$

Première formule

$$\underbrace{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3}_{\text{en remplaçant par les données de l'énoncé}} = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_1x_3)$$

Deuxième formule

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3)[(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2]$$

EXERCICE 455 (④) Par Lancelot Achour

On reprend les notations de l'exercice précédent et on suppose que x_2, x_2, x_3 sont dans $\mathbb{R}_+^*$, que $x_1x_2, x_3 = 1$ et que
$$x_1 + x_2 + x_3 > \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}.$$
Montrer que l'un exactement des trois réels x_1, x_2, x_3 est strictement supérieur à 1.

D'après l'exercice précédent, on a que :

$\forall x \in \mathbb{R},\ \ P(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)x-x_1x_2x_3.$

En évaluant ces expressions en 1 il vient que :
$$(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 - x_1 - x_2 - x_3.$$
Utilisons maintenant nos hypothèses. De l'inégalité vérifiée par les réels x_1, x_2, x_3, on déduit que :
$$0 > x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 - x_1 - x_2 - x_3,$$
donc :
$$0 > (1-x_1)(1-x_2)(1-x_3).$$
Deux cas sont donc possibles.

- L'un des réels x_1, x_2, x_3 est strictement plus grand que 1.
- Les trois réels x_1, x_2, x_3 sont strictement plus grand que 1. Mais alors $x_1x_2x_3 > 1$ ce qui est absurde.

Par conséquent, on en déduit que exactement l'un des trois réels x_1, x_2, x_3 est strictement plus grand que 1, ce qu'il fallait montrer.

EXERCICE 456 (②) Par Lancelot Achour

Écrire les formules de Viète pour un polynôme de degré 4.

Pour résoudre cet exercice, on considère le polynôme
$$P(X) := X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d.$$
Supposons que
$$P(X) = (X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)(X-x_4).$$
On a
$$\begin{aligned} P(x) =& X^4 - (x_1+x_2+x_3+x_4)X^3 + \\ & (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1x_4 + x_2x_4 + x_3x_4)X^2 + \\ & X(-x_1x_2x_3 - x_1x_2x_4 - x_1x_3x_4 - x_2x_3x_4)X + \\ & x_1x_2x_3x_4, \end{aligned}$$
ce qui permet d'obtenir les relations de Viète
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -a,\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1 + x_2x_3 = b,$$
$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -x,\ x_1x_2x_3x_4 = d.$$

EXERCICE 457 (③) Par Lancelot Achour

1. Déterminer le coefficient de x^{n-2} dans le membre de droite de (1).
2. Exprimer la somme $\sum_{j=1}^n x_j$ en fonction de a_n, a_{n-1} et a_{n-2}.

1. En essayant de développer le produit, on se rend compte que :

$$a_{n-2} = a_n \sum_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n\\i\ne j}} x_i x_j,$$

d'où :

$$\frac{a_{n-2}}{a_n} = \sum_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n\\i\ne j}} x_i x_j.$$

(pour mieux s'en rendre compte on peut regarder l'exercice précédent)

2. On calcule :

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\ne i}}^{n} x_i x_j \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} x_i x_j.\end{aligned}$$

Observons alors que :

$$\sum_{j=1}^{i-1} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} x_i x_j = 2\sum_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n\\i\ne j}} x_i x_j,$$

dont il découle que :

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) - 2\sum_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n\\i\ne j}} x_i x_j,$$

qui, combinée avec a. et les formules de Viète, donne :

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^2 = \left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^2 - 2\frac{a_{n-2}}{a_n}.$$

Exercice 458 (②) Par Lancelot Achour

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme et le produit des racines n-ièmes de 1 à partir de la factorisation :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}\left(z - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right).$$

En utilisant les formules de Viète, il vient que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = -\frac{0}{1} = 0,$$

et que :

$$\prod_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = -1^n\frac{-1}{1} = (-1)^{n+1}.$$

11.9 Problème : un second calcul de $\zeta(2)$

Problème 2 (⑤) par Octave Koenig

1. Démontrer que pour tout t dans $]0,\pi/2]$, les inégalités :

$$\operatorname{cotan}(t) \leqslant \frac{1}{t}, \quad \frac{1}{t^2} - 1 \leqslant \operatorname{cotan}^2(t) \leqslant \frac{1}{t^2}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$
   a) Pour $z \in \mathbb{C}$, établir la formule :

$$(z+i)^n - (z-i)^n = 2ni \prod_{k=1}^{n-1} \left(z - \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)$$

   b) Soit $m \in \mathbb{N}$. Pour z dans $\mathbb{C}$, montrer :

$$(z-i)^{2m+1} - (z-i)^{2m+1} = (4m+2)i \prod_{k=1}^{m} \left(z^2 - \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)\right)$$

3. a) Soit m dans $\mathbb{N}^*$. En utilisant la formule du binôme, calculer le coefficient de z^{2m-2} dans le développement de

$$(z+i)^{2m-1} - (z-i)^{2m-1}$$

   b) Soit m dans $\mathbb{N}^*$. Déduire des questions 3.*a*) et 2.*b*) la formule :

$$\sum_{k=1}^{m} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right) = \frac{m(2m-1)}{3}$$

   On pourra utiliser le polynôme Q_m défini par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Q_m(t) = \prod_{k=1}^{m} \left(t - \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)\right)$$

4. Déduire des questions 1. et 3.*b*) la valeur de $\zeta(2)$

1. Soit Δ la droite d'équation $y = x$
Δ est tangente à la courbe représentative de la fonction sinus en 0.
Par concavité et positivité de sinus sur $[0,\pi/2]$ on a :

$$\begin{aligned}
&\forall t \in]0,\pi/2], \sin(t) \leqslant t \\
&\Longrightarrow \frac{1}{\sin^2(t)} \geqslant \frac{1}{t^2} \quad \text{et} \quad \cos^2(t) \geqslant 1 - t^2 \\
&\Longrightarrow \operatorname{cotan}^2(t) \geqslant \frac{1}{t^2} - 1
\end{aligned}$$

De plus, Δ est tangente à la courbe représentative de la fonction tangente en 0.
Par convexité et positivité de la tangente sur $[0;\pi/2[$, on a :

$$\begin{gathered}
\forall t \in]0,\pi/2[, \tan(t) \leqslant t \implies \operatorname{cotan}^2(t) \leqslant \frac{1}{t^2} \\
\text{et } \operatorname{cotan}^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \implies \operatorname{cotan}^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \leqslant \frac{1}{\frac{\pi}{2}}
\end{gathered}$$

D'où : $\forall t \in]0,\pi/2], \dfrac{1}{t^2} - 1 \leqslant \operatorname{cotan}^2(t) \leqslant \dfrac{1}{t^2}$

2.a) On note $(z+i)^n - (z-i)^n = P_n(z)$
D'après le résultat de l'exercice 400, P_n a pour racine les éléments de l'ensemble S tel que

$$S = \left\{ -\operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{2}\right) : k \in [\![1; n-1]\!] \right\}$$

On utilise la formule du binôme de Newton pour déterminer le coefficient de z^n et z^{n-1} de $P_n(z)$
Le coefficient de z^n vaut 0 et celui de de z^{n-1} vaut $2ni$

On en déduit que $P_n(z)$ est de degré $n-1$ et de coefficient dominant $2ni$
C'est pratique puisque cela nous dispensera de nous occuper de la multiplicité des racines dans la forme factorisée (le cardinal de S valant $n-1$)
Ecrivons $P_n(z)$ sous forme factorisée :

$$P_n(z) = 2ni \prod_{k=1}^{n-1} \left(z - \text{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)$$

On a établi la formule souuhaitée.

2.b) Soit a un réel. On démontre sans difficulté que si $\text{cotan}(a)$ est défini, alors :

$$\begin{cases} \text{cotan}(\pi - a) & = -\text{cotan}(a) \\ \text{cotan}(\pi + a) & = \text{cotan}(a) \end{cases}$$

Ceci étant dit, continuons :

$$\begin{aligned} P_{2m+1}(z) &= 2(2m+1)i \prod_{k=1}^{2m} \left(z - \text{cotan}\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)\right) \\ &= (4m+2)i \prod_{k=1}^{m} \left(z - \text{cotan}\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)\right) \prod_{k=m+1}^{2m} \left(z - \text{cotan}\left(\pi - \frac{k\pi}{2m+1}\right)\right) \\ &= (4m+2)i \prod_{k=1}^{m} \left(z + \text{cotan}\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)\right) \prod_{k=m+1}^{2m} \left(z - \text{cotan}\left(\frac{(2m+1-k)\pi}{2m+1}\right)\right) \end{aligned}$$

En effectuant un changement d'indice sur le second produit on obtient :

$$\begin{aligned} &= (4m+2)i \prod_{k=1}^{m} \left(z - \text{cotan}\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)\right) \prod_{k=1}^{m} \left(z + \text{cotan}\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)\right) \\ &= (4m+2)i \prod_{k=1}^{m} \left(z - \text{cotan}\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)\right) \left(z + \text{cotan}\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)\right) \\ &= (4m+2)i \prod_{k=1}^{m} \left(z^2 - \text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)\right) \end{aligned}$$

3.a) En utilisant la formule du binôme on montre que le coefficient (noté c_1) de z^{2m-2} de P_{2m+1} vaut :

$$\begin{aligned} c_1 &= \binom{2m+1}{2m-2} \cdot (i^3 - (-i)^3) \\ &= -i\frac{(2m-1)2m(2m+1)}{3} \\ &= -i\frac{(2m+1)m(4m+2)}{3} \end{aligned}$$

3.b)

$$\begin{aligned} Q_m(t) &= \prod_{k=1}^{m} \left(t - \text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)\right) \\ &= t \prod_{k=2}^{m} \left(z - \text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)\right) - \text{cotan}^2\left(\frac{\pi}{2m+1}\right) \prod_{k=2}^{m} \left(z - \text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)\right) \end{aligned}$$

Or le polynôme $\text{cotan}^2\left(\frac{\pi}{2m+1}\right) \prod_{k=2}^{m} \left(z - \text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)\right)$ est de degré $m-1$ et de coefficiant dominant $\text{cotan}^2\left(\frac{\pi}{2m+1}\right)$ et :

$$t \prod_{k=2}^{m} \left(z - \text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)\right) = t^2 \prod_{k=3}^{m} \left(z - \text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)\right) - t\text{cotan}^2\left(\frac{2\pi}{2m+1}\right) \prod_{k=3}^{m} \left(z - \text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)\right)$$

En répétant $m-1$ fois cette opération et en remarquant à chaque fois que

$$-t^n\text{cotan}^2\left(\frac{n\pi}{2m+1}\right)\prod_{k=n+1}^{m}\left(z-\text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)\right)$$

est le polynôme de degré $m-1$ et de coefficient $-\text{cotan}^2\left(\frac{n\pi}{2m+1}\right)$ on obtient, en notant c_2 le coefficient de t^{m-1} dans $Q_m(t)$:

$$c_2 = -\sum_{k=1}^{m}\text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)$$

En considérant $Q_m(z^2)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&c_1 = c_2 \times (4m+2)i \\
\implies &-c_2 = -\frac{c_1}{(4m+2)i} \\
\implies &\sum_{k=1}^{m}\text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right) = \frac{m(2m+1)}{3}
\end{aligned}$$

4. De la question 1. découle directement l'inégalité $\forall t \in]0,\pi/2], \text{cotan}^2(t) \leqslant \frac{1}{t^2} \leqslant 1+\text{cotan}^2(t)$
Cela implique (en reprenant les notations des questions précédentes) :

$$\begin{aligned}
&\text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right) \leqslant \frac{(2m+1)^2}{k^2\pi} \leqslant 1+\text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right) \\
\implies &\sum_{k=1}^{m}\text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right) \leqslant \frac{(2m+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=1}^{m}\left(1+\text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)\right) \\
\implies &\frac{m(2m-1)}{3} \leqslant \frac{(2m+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{m(2m-1)+3m}{3} \\
\implies &\frac{\pi^2}{3}\frac{m(2m+1)}{(2m+1)^2} \leqslant \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{\pi^2}{3}\frac{m(2m+2)}{(2m+1)^2}
\end{aligned}$$

Or, $\frac{m(2m-1)}{(2m+1)^2}$ et $\frac{m(2m+2)}{(2m+1)^2}$ tendent vers $\frac{1}{2}$ quand m tend vers $+\infty$, donc d'après le théorème des gendarmes :

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

12 Arithmétique

12.1 Divisibilité, division euclidienne, congruences

Exercice 459 (②) par Macéo Pereira et Quentin Lepine [∗]
Déterminer les couples $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $x^2-y^2=12$.

On cherche les couples $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que

$$x^2-y^2 = 12 \Leftrightarrow (x+y)(x-y) = 12.$$

On en déduit que $(x+y)$ et $(x-y)$ sont des diviseurs de 12 de même signe. De plus :

$$\frac{(x+y)+(x-y)}{2} = x \in \mathbb{Z}.$$

La somme $(x+y)+(x-y)$ est paire donc $(x+y)$ et $(x-y)$ sont de même parité. Donc :

$$((x+y),(x-y)) \in \{(-2,-6),(-6,-2),(2,6),(6,2)\}.$$

En résolvant chacun des quatre systèmes, on obtient que l'ensemble des couples solutions est : $S = \{(-4,-2),(-4,2),(4,-2),(4,2)\}$

EXERCICE 460 (②) par Alexandre Paresy [*]

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, n^2$ divise $(n+1)^n - 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(n+1)^n - 1 = (n+1-1)((n+1)^{n-1} + (n+1)^{n-2} + ... + (n+1) + 1) = n\left(\sum_{k=0}^{n-1}(n+1)^k\right).$$

On regarde le facteur de droite modulo n.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}(n+1)^k &\equiv \sum_{k=0}^{n-1} 1^k [n] \\ &\equiv 0[n]\end{aligned}$$

Ainsi, les deux facteurs sont divisibles par n, donc leur produit est divisible par n^2.

EXERCICE 461 (②) par Alexandre Paresy[*]

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, a et b dans $\mathbb{Z}$.

a) Montrer que $a-b$ divise $a^n - b^n$.
b) On suppose que n est impair. Montrer que $a+b$ divise $a^n + b^n$.

a) Il suffit d'écrire
$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$
et de noter que
$$a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1} \in \mathbb{Z}.$$
b) On se ramène à la question précédente en notant que $(-b)^n = -b^n$, d'où le fait que
$$a^n - (-b)^n = a^n + b^n$$
est divisible par $a - (-b) = a + b$.

EXERCICE 462 (③) par Alexandre Paresy [*]

Soient m et n deux éléments de $\mathbb{N}^*$, $a \geq 2$ un entier.

a) Montrer que, si m divise n, $a^m - 1$ divise $a^n - 1$.
b) On suppose que le reste de la division euclidienne de n par m est r. Montrer que le reste de la division euclidienne de $a^n - 1$ par $a^m - 1$ est $a^r - 1$.

a) Posant $q = \dfrac{n}{m}$, on a
$$a^n - 1 = a^{mq} - 1 = (a^m)^q - 1 = (a^m - 1)\left(\sum_{k=0}^{q-1}(a^m)^k\right) \quad \text{donc} \quad (a^m - 1) \mid (a^n - 1),$$
ce qui montre le résultat. Il s'agit en fait d'un cas particulier du a) de l'exercice précédent.

b) On note q le quotient de la division euclidienne de n par m, $r$le reste de cette division. On a $n = qm + r$ avec $0 \leq r < m$.

On a alors :

$$a^n - 1 = a^{mq+r} - 1 = (a^m)^q \times a^r - 1.$$

Afin de déterminer le reste de la division euclidienne par $a^m - 1$, on regarde l'expression modulo $a^m - 1$. On note que $a^m \equiv 1\ [a^m - 1]$, d'où

$$a^n - 1 \equiv 1^q \times a^r - 1\ [a^m - 1] \quad \text{i.e.} \quad a^n - 1 \equiv a^r - 1\ [a^m - 1].$$

Puisque $0 \leq r < m$, on a $a^r - 1 < a^m - 1$, donc $a^r - 1$ est bien le reste de la division euclidienne de $a^n - 1$ par $a^m - 1$.

EXERCICE 463 (②) par Alexandre Paresy [*]

Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la factorisation $(n+1)(n-1) = n^2 - 1$, montrer que $n+1$ divise $n^2 + 1$ si et seulement si $n+1$ divise 2. En déduire l'ensemble des $n \in \mathbb{N}$ tels que $n+1$ divise $n^2 + 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+1) \mid (n^2+1) \iff (n+1) \mid ((n+1)(n-1)+2).$$

Comme $(n+1)$ divise $(n+1)(n-1)$, on en déduit que

$$(n+1) \mid (n^2+1) \iff (n+1) \mid 2 \iff n+1 \in \{1, 2\}.$$

Ainsi, l'ensemble des $n \in \mathbb{N}$ tels que $n+1$ divise n^2+1 est $\{0, 1\}$.

EXERCICE 464 (③) par Alexandre Paresy [*]

En adaptant la méthode de l'exercice précédent, déterminer les $n \in \mathbb{Z}$ tels que $n+3$ divise $n^3 + 3$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On adapte l'argument de l'exercice précédent, en écrivant :

$$(n+3) \mid (n^3+3) \iff (n+3) \mid \big((n+3)(n^2 - 3n + 9) - 24\big).$$

Comme $(n+3)$ divise $(n+3)(n^2 - 3n + 9))$, on en déduit que

$$(n+3) \mid (n^3+3) \iff (n+3) \mid -24.$$

L'ensemble des diviseurs supérieurs ou égaux à 3 de -24 est $\{3, 4, 6, 8, 12, 24\}$, donc l'ensemble des $n \in \mathbb{N}$ tels que $n+3$ divise $n^3 + 3$ est $\{0, 1, 3, 5, 9, 21\}$.

EXERCICE 465 (④) par Alexandre Paresy et Paul Perrier[*]

En utilisant l'exercice 30 de 2.1, déterminer les $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ tels que

$$x + y + z = 3 \quad \text{et} \quad x^3 + y^3 + z^3 = 3.$$

Analyse. D'après l'exercice 30,

$$(x+y+z)^3 - (x^3+y^3+z^3) = 24 = 3(x+y)(y+z)(z+x) \quad \text{i.e.} \quad 8 = (x+y)(y+z)(z+x).$$

Or, $x + y + z = 3$ d'où $x + y = 3 - z$, $y + z = 3 - x$ et $z + x = 3 - y$.

En posant $a = 3 - x$, $b = 3 - y$ et $c = 3 - z$, on obtient

$$abc = 8 \quad \text{et} \quad a + b + c = 3 - x + 3 - y + 3 - z = 6.$$

Trouvons les solutions de $abc = 8$ et $a + b + c = 6$ dans $\mathbb{Z}^3$.

Les conditions étant symétriques (c'est-à-dire invariantes par une permutation quelconque de a, b, c), on peut supposer sans perte de généralité que $a \geq b \geq c$.

Comme $abc = 8$, on sait que $a \in 8, 4, 2, 1, -1, -2, -4, -8$.

Si $a = 8$, alors soit $b = c = 1$ absurde car $a + b + c = 6$ soit $b = c = -1$, ce qui est possible.

Si $a = 4$, alors $bc = 2$ et $b + c = 2$; il y a donc deux possibilités car $b \geq c$: $b = 2$ et $c = 1$, absurde car $b + c = 2$ ou alors $b = -1$ et $c = -2$, absurde car $b + c = 2$.

Si $a = 2$, alors $bc = 4$ et $b + c = 4$. Si $b = 4$ alors $c = 1$, ce qui est absurde. Si $b = 2$ alors $c = 2$ et on bien $b + c = 4$. Si $b \leq 1$ alors $b + c \leq b + b = 2 < 4$ ce qui n'est pas possible car $b + c = 4$.

Si $a \leq 1$, alors $a + b + c \leq a + a + a = 3 < 4$, ce qui n'est pas possible car $a + b + c = 8$.

Lorsque $a \geq b \geq c$, on obtient donc deux possibilités : $a = 8$, $b = c = -1$, soit $x = -5$, $y = z = 4$ ou alors $a = b = c = 2$, soit $x = y = z = 1$.

Synthèse. Vérifions les solutions potentielles. Pour $x = -5$, $y = z = 4$ on a bien $x + y + z = 3$ et $x^3 + y^3 + z^3 = -125 + 64 + 64 = 3$. Pour $x = y = z = 1$, on a bien $x + y + z = 3 = x^3 + y^3 + z^3$.

On avait supposé que $a \geq b \geq c$. En tenant compte des permutations, on voit finalement qu'il y a quatre triplets solutions :

$$(1, 1, 1), (-5, 4, 4), (4, -5, 4), (4, 4, -5).$$

EXERCICE 466 (③) par Alexandre Paresy [*]

a) Montrer par un raisonnement arithmétique que le produit de trois entiers relatifs consécutifs est divisible par 6 .
b) Montrer que, si $k \in \mathbb{N}^*$, le produit de k entiers relatifs consécutifs est divisible par $k\,!$. On utilisera les coefficients binomiaux.

a) Parmi trois entiers consécutifs, il y a exactement un entier qui est divisible par 3 et au moins un entier qui est pair, donc leur produit est divisible par 2 et par 3, donc par 6.
b) On sait que, pour tout n naturel et pour tout k inférieur ou égal à n,
$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$
est entier. Ainsi, cela implique que $k!$ divise $\dfrac{n!}{(n-k)!}$. Or,
$$\frac{n!}{(n-k)!} = (n-k+1).(n-k+2)...(n-1).n$$
peut désigner n'importe quel produit de k entiers consécutifs, ce qui conclut.

EXERCICE 467 (①) par Alexandre Paresy [*]

Déterminer le reste de la division euclidienne de $n(n+1)$ par 6 .

On regarde le tableau de congruences mod 6 suivant :

n	0	1	2	3	4	5
$n(n+1)$	0	2	0	0	2	0

EXERCICE 468 (①) par Alexandre Paresy [*]

Soit $x \in \mathbb{Z}$. Quelles sont les valeurs possibles de x^2 modulo 4 ? modulo 8 ?

Modulo 4 : 0 et 1.

Modulo 8 : 0, 1, et 4.

Exercice 469 (①) par Alexandre Paresy [*]

Quels sont les $x \in \mathbb{Z}$ tels que $x^2 \equiv x$ [10] ?

Soit $x \in \mathbb{Z}$. La condition de l'énoncé s'écrit $x(x-1) \equiv 0$ [10].

En regardant séparément chaque possibilité pour x modulo 10, on montre que les solutions sont les entiers congrus à $0, 1, 5, 6$ modulo 10.

Exercice 470 (②) par Alexandre Paresy [*]

Quel est le reste de la division de 5^{2022} par 8 ?

On a $5^2 \equiv 1$ [8], donc $5^{2022} = (5^2)^{1011} \equiv 1$ [8]. Le reste de la division euclidienne de 5^{2022} par 8 est 1.

Exercice 471 (②) par Alexandre Paresy[*]

Montrer que, si $x \in \mathbb{Z}, 11 \mid (2x+3) \iff 11 \mid (5x+2)$.

Pour $x \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} 11 \mid (2x+3) &\iff 2x+3 \equiv 0\ [11] \iff 2x \equiv 8\ [11] \iff x \equiv 48\ [11] \\ &\iff x \equiv 4\ [11] \iff 5x \equiv 9\ [11], \end{aligned}$$

ce qui équivaut bien à $5x + 2 \equiv 0$ [11].

La troisième et la cinquième équivalence se déduisent de l'inversibilité de 2 et 5 modulo 11 (ces deux entiers sont premiers à 11 ; ils admettent pour inverse modulo 11 respectivement 6 et 9).

Exercice 472 (②) par Alexandre Paresy [*]

Quels sont les $x \in \mathbb{Z}$ tels que 12 divise $x^2 - 1$? tels que 12 divise $x^2 - 2$?

On a

$$12 \mid (x^2 - 1) \iff x^2 \equiv 1\ [12].$$

En examinant, pour $x \in \mathbb{Z}$, la classe de x^2 modulo 12 en fonction de la classe de x modulo 12, on voit que les solutions sont les entiers congrus à $1, 5, 7$ et 11 modulo 12.

De même

$$12 \mid (x^2 - 2) \iff x^2 \equiv 2\ [12].$$

Il n'y a aucune solution.

Exercice 473 (②) par Alexandre Paresy [*]

Trouver le dernier chiffre de l'écriture décimale de 3^{2022}.

On a $3^4 \equiv 1$ [10]. Donc, $3^{2022} = (3^4)^{505} \times 3^2 \equiv 9$ [10]. Le reste de la division euclidienne de 3^{2022} par 10 est 9.

EXERCICE 474 (②) par Matei Klee [*]

Retrouver l'exercice 461 en utilisant les congruences modulo $a-b$ et $a+b$.

On a $a \equiv b\ [a-b]$, d'où $a^n \equiv b^n\ [a-b]$, i.e. $(a-b) \mid (a^n - b^n)$.

De même, $a \equiv -b\ [a+b]$, d'où $a^n \equiv (-b)^n\ [a+b]$, c'est-à-dire, puisque n est impair, $a^n \equiv -b^n\ [a+b]$, i.e. $(a+b) \mid (a^n + b^n)$.

EXERCICE 475 (②) par Matei Klee [*]

a) Vérifier que, si $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+3)^3 \equiv n^3\ [9] \text{ et } 7^{n+3} \equiv 7^n\ [9].$$

b) Quel est le reste de la division euclidienne de $7^n + n^3$ par 9 ?

a) Pour $n \in \mathbb{N}$, $(n+3)^3 = n^3 + 9n^2 + 27n + 27 = n^3 + 9(n^2 + 3n + 3)$, donc $(n+3)^3 \equiv n^3\ [9]$.

De même, $7^{n+3} = 7^n \times 7^3 = 7^n \times 343 = 7^n(9 \times 38 + 1) = 7^n + 9 \times 7^n \times 38$, donc,

$$7^{n+3} \equiv 7^n\ [9]$$

b) On peut faire un tableau de congruences pour répondre à cette question.

$n \equiv \dots\ [3]$	0	1	2
$n^3 \equiv \dots\ [9]$	0	1	8
$7^n \equiv \dots\ [9]$	1	7	4
$7^n + n^3 \equiv \dots\ [9]$	1	8	3

EXERCICE 476 (③) par Matei Klee[*]

Soit $(F_n)_{n\geq 0}$ la suite de Fibonacci. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer le reste de la division euclidienne de F_n par 8.

La suite de Fibonacci est définie par

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_n + F_{n+1}.$$

Ainsi, par définition, $F_{n+2} \equiv F_n + F_{n+1}\ [8]$. On peut calculer les congruences modulo 8 des premiers termes de la suite de Fibonacci pour chercher un motif récurrent :

$$\begin{array}{lllll} F_0 \equiv 0\ [8] & F_1 \equiv 1\ [8] & F_2 \equiv 1\ [8] & F_3 \equiv 2\ [8] & F_4 \equiv 3\ [8] \\ F_5 \equiv 5\ [8] & F_6 \equiv 0\ [8] & F_7 \equiv 5\ [8] & F_8 \equiv 5\ [8] & F_9 \equiv 2\ [8] \\ F_{10} \equiv 7\ [8] & F_{11} \equiv 1\ [8] & F_{12} \equiv 0\ [8] & F_{13} \equiv 1\ [8] & \end{array}.$$

On remarque que $F_{12} \equiv F_0\ [8]$ et $F_{13} \equiv F_1\ [8]$.

On peut donc émettre la conjecture que $F_{n+12} \equiv F_n\ [8]$ et initialiser la preuve par récurrence qui aura pour objet de démontrer cette récurrence.

Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on note P_n la propriété

$$F_{n+12} \equiv F_n\ [8]$$

Initialisation. On vient de montrer que $F_{12} \equiv F_0\ [8]$ et $F_{13} \equiv F_1\ [8]$.

(On a besoin de vérifier pour F_0 et F_1 car on veut faire une récurrence forte et que (F_n) est elle-même définie par récurrence double.)

Hérédité. Supposons qu'il existe un $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ tel que, $\forall k' \leq k$, $F_{k'+12} \equiv F_{k'}\ [8]$.

Montrons que,
$$F_{k+1+12} \equiv F_{k+1}\ [8].$$
Or, avec la définition,
$$F_{k+13} \equiv F_{k+11} + F_{k+12}\ [8]$$
et, par hypothèse de récurrence forte,
$$F_{k+11} \equiv F_{k-1}\ [8] \quad \text{et} \quad F_{k+12} \equiv F_k\ [8].$$
Donc,
$$F_{k+13} \equiv F_{k-1} + F_k \equiv F_{k+1}\ [8],$$
ce qui est exactement P_{k+1}.

On peut donc répondre à la question par un tableau de congruences :

$n \equiv \dots$ [12]	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$F_n \equiv \dots$ [8]	0	1	1	2	3	5	0	5	5	2	7	1

Exercice 477 (③) par Léo Baciocchi [∗]

Soient a et b dans $\mathbb{Z}$. On suppose que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, il existe $x \in \mathbb{Z}$ tel que $ax+b \equiv 0\ [m]$. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{Z}$ tel que $ax + b = 0$

En prenant $m = a$, on a $x \in \mathbb{Z}$ tel que $ax + b \equiv 0\ [a]$, ce qui entraîne que $b \equiv 0\ [a]$.

On a donc $b = ak$ avec $k \in \mathbb{Z}$, et $x = -k$ vérifie $ax + b = 0$.

Exercice 478 (①) par Lancelot Achour[∗]

Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que Montrer que n est divisible par 2 si et seulement si son dernier chiffre en base 10 est pair.

b) Montrer que n est divisible par 5 si et seulement si son dernier chiffre en base 10 est 0 ou 5.

On écrit n en base 10 :
$$n = \sum_{k=0}^{m} a_k 10^k, \qquad \text{où} \ \ \forall k \in [\![0, m]\!], \ \ a_k \in [\![0, 9]\!].$$

a) On remarque que toutes les puissances de 10 non nulles sont des multiples de 2. Par conséquent :
$$n = \sum_{k=0}^{m} a_k 10^k \equiv a_0\ [2].$$
Donc n est divisible par 2 si et seulement si son chiffre des unités est divisible par 2.

b) On remarque que toutes les puissances de 10 non nulles sont des multiples de 5. Par conséquent :
$$n = \sum_{k=0}^{m} a_k 10^k \equiv a_0\ [5].$$
Donc n est divisible par 5 si et seulement si son chiffre des unités est soit 0 soit 5.

Exercice 479 (②) par Lancelot Achour [∗]

Soient n un entier naturel, que l'on écrit en base 10 :
$$n = \sum_{k=0}^{m} a_k 10^k, \qquad \text{où} \ \ \forall k \in \{0, \dots, m\}, \ \ a_k \in \{0, \dots, 9\}.$$

a) Montrer que

$$n \equiv \sum_{k=0}^{m} a_k \ [9].$$

b) Montrer de même que :

$$n \equiv \sum_{k=0}^{m} a_k(-1)^k \ [11].$$

a) Remarquons que $10 \equiv 1$ [9] donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $10^k \equiv 1$ [9]. Des propriétés des congruences il découle alors que :

$$n = \sum_{k=0}^{m} a_k 10^k \equiv \sum_{k=0}^{m} a_k \ [9].$$

b) De même, remarquons que $10 \equiv -1$ [11] donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $10^k \equiv (-1)^k$ [11]. Il suit alors des propriétés des congruences que :

$$n = \sum_{k=0}^{m} a_k 10^k \equiv \sum_{k=0}^{m} a_k(-1)^k \ [11].$$

Exercice 480 (④) par Teiki Rigaud [∗]

Montrer que l'équation $x^2 + y^2 = 3z^2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}^3$ autre que (0,0,0). On commencera par montrer que, si (x, y, z) est une solution, alors x, y, z sont divisibles par 3.

Soit (x, y, z) une solution de l'équation. On a alors

$$(1) \qquad x^2 + y^2 \equiv 0 \ [3].$$

Or, les carrés modulo 3 étant exactement 0 et 1, la relation (1) implique que x^2 et y^2 sont congrus à 0 modulo 3, c'est-à-dire que x et y sont divisibles par 3.

Il s'ensuit que $x^2 + y^2$ est divisible par 9, donc que $3z^2$ est divisible par 9, donc que z^2 est divisible par 3, donc que z est divisible par 3.

Si $z = 0$, $x = y = 0$, par positivité d'un carré.

Supposons maintenant qu'il existe une solution de l'équation avec $z \neq 0$. Considérons une telle solution tel que $|z|$ soit minimal.

Alors, on dispose de $(x', y', z') \in (\mathbb{Z})^3$ tels que $x = 3x', y = 3y'$ et $z = 3z'$.

Ainsi, $9x'^2 + 9y'^2 = 3.9z'^2$, d'où $x'^2 + y'^2 = 3z'^2$.

Le triplet (x', y', z') est solution de l'équation. Or, $|z'| < |z|$, et $z' \neq 0$, ce qui contredit la minimalité de $|z|$: c'est absurde.

Ainsi, la seule solution de l'équation est (0,0,0).

Exercice 481 (④) par Wéline Pujol [∗]

Soit n un entier qui peut s'écrire comme somme de trois carrés d'entiers.

a) Montrer que n n'est pas congru à 7 modulo 8.

b) Montrer que n n'est pas de la forme $4^a(8b + 7)$ avec $(a, b) \in \mathbb{N}^2$.

a) Soit $a \in \mathbb{Z}$. Déterminons la congruence de a^2 modulo 8. On pourrait discuter selon la congruence de a modulo 8, mais il est plus court d'observer les points suivants.
Si a est impair, a s'écrit $2b + 1$ avec $b \in \mathbb{Z}$. Alors

$$a^2 = 4b^2 + 4b + 1 = 4b(b + 1) + 1 \equiv 1 \ [8],$$

car $b(b+1)$ est pair comme produit de deux entiers consécutifs.

Si a est pair, a s'écrit $2b$ avec $b \in \mathbb{Z}$. Alors $a^2 = 4b^2$ est divisible par 4, donc congru à 0 ou 4 modulo 8.

On ne peut pas obtenir par addition de trois entiers égaux soit à 0, soit à 1, soit à 4, un nombre congru à 7 modulo 8, ce qui permet de conclure.

b) Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}_k$ suivante : « si n est de la forme $4^k(8\ell+7)$ avec $\ell \in \mathbb{N}$, alors n n'est pas somme de trois carrés. »
La propriété $\mathcal{P}_0$ a été prouvée en a).
Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_k$ soit vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$ une somme de trois carrés d'entiers :

$$n = a^2 + b^2 + c^2 \quad \text{où} \quad (a, b, c) \in \mathbb{N}^3.$$

Supposons par l'absurde l'existence de $\ell \in \mathbb{N}$ tel que n s'écrive $4^{k+1}(8\ell+7)$. Alors 4 divise $a^2 + b^2 + c^2$. Si l'un des nombres a, b, c est impair, l'étude des carrés modulo 8 menée dans la question précédente montre que n est congru à $1, 2, 3, 4, 5, 6$ modulo 8 (car a^2, b^2, c^2 sont congrus à $0, 1$ ou 4 modulo 8, et au moins l'un d'entre eux est congru à 1 modulo 8). Il y a donc contradiction. Ainsi, a, b, c sont pairs, et il existe a', b', c' dans $\mathbb{N}$ tels que $a = 2a'$, $b = 2b'$, $c = 2c'$. On a donc

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = 4^k(8\ell+7).$$

L'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}_k$ montre que ceci est impossible. Il n'existe donc pas de n de la forme $4^{k+1}(8\ell+7)$ et somme de trois carrés d'entiers.

12.2 Nombres premiers

Exercice 482 (①) par Wéline Pujol [*]

Soient a et b deux entiers naturels non premiers entre eux. Montrer que l'ensemble $E_{a,b} = \{ka + b \ ;\ k \in \mathbb{N}\}$ contient au plus un nombre premier.

Comme a et b ne sont pas premier entre eux, il existe un nombre premier p et deux entiers naturels a' et b' tel que : $a = pa'$ et $b = pb'$. Soit c un entier naturel appartenant à l'ensemble $E_{a,b}$. Alors

$$c = ka + b = kpa' + pb' = p(ka' + b').$$

Pour que c soit premier, il faut et il suffit que $c = p$. On en déduit le résultat.

Exercice 483 (②) par Antoine Charki [*]

Montrer que, pour tout nombre premier $p \geq 5$, 24 divise $p^2 - 1$.

On a $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$. Les deux nombres $p-1$ et $p+1$ sont deux nombres pairs consécutifs (car p impair), donc l'un d'eux est divisible par 4 et leur produit est divisible par 8. Par ailleurs, p n'est pas divisible par 3, donc l'un des deux nombres $p-1$ ou $p+1$ l'est (sur trois nombres consécutifs, l'un au moins est divisible par 3). Comme 3 et 8 sont premiers entre eux, $p^2 - 1$ est divisible par $3.8 = 24$.

Exercice 484 (③) par Léo Baciocchi [*]

Soient a et n deux entiers $\geqslant 2$. On suppose que l'entier naturel $a^n - 1$ est premier.

a) Montrer que $a = 2$.
b) Montrer que n est premier.
c) Montrer que $2^{11} - 1$ n'est pas premier.

a) On a la factorisation

$$a^n - 1 = (a-1)\left(\sum_{i=0}^{n-1} a^i\right).$$

Donc, si $a^n - 1$ est premier, $a - 1 = 1$, donc $a = 2$ (sinon $a^n - 1$ serait produit de deux entiers strictement supérieurs à 1, donc non premier).

b) Supposons par l'absurde que n n'est pas premier. On a $n = pq$, où $p \geq 2$ et $q \geq 2$ sont deux entiers, et

$$2^n - 1 = 2^{pq} - 1 = (2^q)^p - 1 = (2^q - 1)\left(\sum_{j=0}^{p-1} 2^{jq}\right),$$

qui n'est évidemment pas premier.

c) On a $2^{11} - 1 = 2048 - 1$ (les amateurs de 2048 le savent bien). Donc, $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$ n'est pas premier !

Exercice 485 (③) par Léo Baciocchi [∗]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $2^n + 1$ soit premier. Montrer que n est une puissance de 2.

On rappelle la formule suivante, si p est un nombre impair, alors

$$a^p + 1 = (a + 1) \cdot \left(\sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i a^i\right).$$

Par l'absurde, on suppose que n n'est pas une puissance de 2, c'est-à-dire que $n = 2^q p$, où p est impair et ≥ 3.

On a donc

$$2^n + 1 = \left(2^{2^q}\right)^p + 1 = (2^{2^q} + 1)\left(\sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i 2^{i2^q}\right).$$

Comme $p > 1$, $2^n + 1 > 2^{2^q} + 1$, et donc $2^n + 1$ est produit de deux entiers strictement supérieurs à 1, donc non premier. Le résultat suit.

Exercice 486 (④) par Adrien Israël [∗]

Déterminer parmi les nombres 101, 10101, 1010101, ... ceux qui sont premiers.

Les nombres de l'énoncé sont les termes de la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad a_n = \sum_{k=0}^{n} 100^k.$$

En utilisant la formule donnant la somme d'une progression géométrique, on a

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} 100^k = \frac{1 - 100^{n+1}}{1 - 100} = \frac{(10^{n+1} - 1)(10^{n+1} + 1)}{99}.$$

On a

$$a_1 = \frac{(10^{1+1} - 1)(10^{1+1} + 1)}{99} = \frac{99 \cdot 101}{99} = 101.$$

Il est aisé de constater que 101 est premier, donc a_1 est premier. Montrons que, si $n \geq 2$, a_n n'est pas premier.

Si n est impair, $n = 2m + 1$ avec $m \in \mathbb{N}^*$. Or, $100 \equiv 1$ [99]. En élevant à la puissance $m + 1$ cette congruence, il vient $10^{2m+2} \equiv 1$ [99], donc 99 divise $10^{n+1} - 1$. Comme $n \geq 3$, $\dfrac{10^{n+1} - 1}{99}$ est donc un entier strictement supérieur à 1, et

$$a_n = \frac{(10^{n+1} - 1)}{99}(10^{n+1} + 1)$$

est produit de deux nombres entiers strictement supérieurs à 1, donc non premier.

Si n est pair, $n = 2m$ avec $m \in \mathbb{N}^*$. On a $10 \equiv 1$ [9], donc $10^{n+1} \equiv 1$ [9] et $\dfrac{10^{n+1}-1}{9}$ est un entier strictement supérieur à 1. De plus, $10 \equiv -1$ [9] et donc $10^{2m+1} \equiv (-1)^{2m+1}$ [11], c'est-à-dire $10^{n+1} \equiv -1$ [11]. Ainsi, $\dfrac{10^{n+1}+1}{11}$ est un entier strictement supérieur à 1. Ainsi,

$$a_n = \frac{10^{n+1}-1}{9} \times \frac{10^{n+1}+1}{11}$$

est le produit de deux entiers strictement supérieurs à 1, donc n'est pas premier.

Exercice 487 (②) par Adrien Israël [$*$]

En utilisant l'exercice 32 de **2.1**, montrer que, si m et n sont dans $\mathbb{N}^*$, $m^4 + 4n^4$ est premier si et seulement si $m = n = 1$.

On rappelle la factorisation établie dans l'exercice 32 : si x et y sont deux nombres réels, alors

$$x^4 + 4y^4 = (x^2 + 2y^2 + 2xy)(x^2 + 2y^2 - 2xy).$$

Si $m = n = 1$. Alors $m^4 + 4n^4 = 1 + 4 \cdot 1 = 5$, et 5 est premier.

Supposons maintenant $m^4 + 4n^4$ premier. On a

$$m^4 + 4n^4 = (m^2 + 2n^2 + 2mn)\,(m^2 + 2n^2 - 2mn).$$

On a

$$m^2 + 2n^2 + 2mn \geq 5.$$

Puisque $m^4 + 4n^4$ est premier, c'est que

$$m^2 + 2n^2 - 2mn = 1 \quad \text{i.e.} \quad (m-n)^2 + n^2 = 1.$$

Comme $n^2 \geq 1$ et $(m-n)^2 \geq 0$, il faut donc $n^2 = 1$ et $(m-n)^2 = 0$, i.e. $m = 1 = n$.

Exercice 488 (③) Par Alexandre Paresy [$*$]

Montrer que, si $n \geq 2$, aucun des nombres $n! + k, 2 \leq k \leq n$, n'est premier.
Il existe donc des suites d'entiers consécutifs de longueur arbitraire dont aucun n'est premier.

Si $n \geq 2$ et $2 \leq k \leq n$, $n!$ est divisible par k (car $n! = 1.2.\ldots.k.\ldots.n$) donc $n! + k$ est divisible par k et strictement supérieur à k, donc non premier.

Exercice 489 (③) Par Paul Perrier [($*$)]

Quels sont les $k \in \mathbb{N}$ tels que l'ensemble des entiers n tels que $k + 1 \leq n \leq k + 10$ contienne le plus grand nombre de nombres premiers ? On s'intéressera aux nombres pairs et aux nombres impairs divisible par 3.

Étant donné qu'un nombre sur 2 est pair, parmi 10 entiers consécutifs, exactement 5 sont pairs. De plus, les nombres impairs divisibles par 3 sont de la forme $3(2k+1) = 6k+3$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi, sur six nombres entiers consécutifs, au moins un est impair et divisible par 3.

Pour $k \geq 3$, chacun de nos 10 nombres est strictement plus grand que 3 et donc ni les 5 nombres pairs, ni le nombre impair divisible par 3 n'est premier. Donc, parmi les 10 nombres, il y a au plus $10 - 5 - 1 = 4$ nombres premiers.

Pour $k = 2$, il y a 4 nombres premiers dans l'ensemble $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$: $3, 5, 7, 11$.

Pour $k = 1$, il y a 5 nombres premiers dans l'ensemble $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$: $2, 3, 5, 7, 11$.

Pour $k = 0$, il y a 4 nombres premiers dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$: $2, 3, 5, 7$.

Ainsi, le seul $k \in \mathbb{N}$ tel que l'ensemble des entiers n tels que $k + 1 \leq n \leq k + 10$ contienne le plus grand nombre de nombres premiers est $k = 1$.

EXERCICE 490 (④) par Lancelot Achour [*]

a) Soit $n \in \mathbb{N}$ congru à 3 modulo 4. Montrer que n admet au moins un diviseur premier congru à 3 modulo 4.

b) En adaptant la démonstration du Théorème 27, en déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 3 modulo 4.

a) Soit n un entier naturel congru à 3 modulo 4. On raisonne par l'absurde. Supposons donc que n n'admet aucun diviseur premier congru à 3 modulo 4. Comme n est impair, les diviseurs premiers de n le sont aussi, et sont donc congrus à 1 modulo 4. Par conséquent, on écrit n sous forme factorisée :

$$n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}.$$

Ainsi :

$$n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i} \equiv \prod_{i=1}^{r} 1^{\alpha_i} \ [4],$$

ce qui est absurde, donc au moins l'un des diviseurs premiers de n est congru à 3 modulo 4.

b) On raisonne une nouvelle fois par l'absurde. Supposons que $\mathcal{M}$ soit l'ensemble fini des nombres premiers congrus à 3 modulo 4. Considérons l'entier :

$$N := 4 \prod_{p \in \mathcal{M}} p - 1.$$

Ainsi, N est congru à 3 modulo 4, il admet donc, d'après a), au moins un diviseur premier q congru à 3 modulo 4. Comme $q \in \mathcal{M}$, q divise $N + 1$. Ainsi, q divise $(N + 1) - N = 1$, contradiction. L'ensemble des nombres premiers congrus à 3 modulo 4 est donc infini.

EXERCICE 491 (④) par Teiki Rigaud [*]

Soit P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

a) Montrer que :

$$\forall (k, m, n) \in \mathbb{Z}^3, \qquad P(n + km) \equiv P(n) \ [m].$$

b) En déduire que :

$$\forall (k, n) \in \mathbb{Z}^2, \qquad P(n) \mid P(n + kP(n)).$$

c) Conclure que, si P n'est pas constant et si $n \in \mathbb{N}$ est tel que $P(n)$ soit premier, l'ensemble des $k \in \mathbb{Z}$ tels que $P(n + kP(n))$ soit premier est fini.

a) Notons

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i,$$

où les a_k sont dans $\mathbb{Z}$. Soient k, m, n dans $\mathbb{Z}$. Alors $n + km$ est congru à n modulo m, d'où

$$\forall i \in \{0, \ldots, d\}, \qquad (n + km)^i \equiv n^i \ [m].$$

En multipliant ces congruences respectivement par $a_0, \ldots, a_d$, puis en sommant les congruences obtenues, il vient

$$P(n + km) \equiv P(n) \ [m].$$

b) Fixons k et n dans $\mathbb{Z}$. On applique la question a) avec $m = P(b)$. Ainsi,

$$P(n + kP(n)) \equiv P(n) \ [P(n)],$$

soit exactement :

$$P(n) | P(n + kP(n)).$$

c) Soit alors un polynôme P à coefficients dans $\mathbb{Z}$ tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit premier et tel que l'ensemble des $k \in \mathbb{Z}$ tels que $P(n+kP(n))$ soit premier est infini.
D'après b),
$$\forall (k,n) \in \mathbb{Z}^2, \qquad P(n) \mid P(n+kP(n)).$$
Ainsi, si $P(n+kP(n))$ est premier, $P(n+kP(n)) = P(n)$.
L'hypothèse entraîne donc que P prend la valeur $P(n)$ sur une infinité de points. Il s'ensuit que P est constant.
D'où le résultat par contraposée.

12.3 PGCD de deux entiers, théorème de Bézout

EXERCICE 492 (①) par Loïse Launay [*]

Écrire l'algorithme d'Euclide pour $a = 1771$ et $b = 276$. Déterminer $a \wedge b$, ainsi qu'un couple de Bézout.

On écrit l'algorithme d'Euclide pour déterminer $a \wedge b$:
$$1771 = 6 \cdot 276 + 115$$
$$276 = 2 \cdot 115 + 46$$
$$115 = 2 \cdot 46 + 23$$
$$46 = 2 \cdot 23 + 0.$$
Ainsi :
$$a \wedge b = 23.$$
Remontons l'algorithme d'Euclide pour déterminer un couple de Bézout :
$$23 = 115 - 2 \cdot 46$$
$$23 = 115 - 2(276 - 2 \cdot 115)$$
$$23 = -2 \cdot 276 + 5 \cdot 115$$
$$23 = -2 \cdot 276 + 5(1771 - 6 \cdot 276)$$
$$23 = -32 \cdot 276 + 5 \cdot 1771$$
Un couple de Bézout est donc $(-32; 5)$.

EXERCICE 493 (②) par Matilde Cruz [*]

Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que les nombres entiers $14n+3$ et $21n+4$ sont premiers entre eux. On explicitera une relation de Bézout.

On a
$$3 \cdot (14n+3) = 42n + 9 \quad \text{et} \quad 2 \cdot (21n+4) = 42n+8.$$
Ainsi :
$$3 \cdot (14n+3) - 2 \cdot (21n+4) = 1.$$
Il existe donc un couple $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ (ici, $(3,-2)$) tel que :
$$a(14n+3) + b(21n+4) = 1.$$

D'après la réciproque du théorème de Bézout, les entiers $14n+3$ et $21n+4$ sont premiers entre eux.

EXERCICE 494 (②) par Lancelot Achour [*]

Soit $(F_n)_{n\geq 0}$ la suite de Fibonacci (**1.3**, exemple 1). Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $F_n \wedge F_{n+1}$.

On donne les premières valeurs de la suite de Fibonacci, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34. On remarque que deux nombres consécutifs sont premiers entre eux. On peut alors tenter de le montrer par récurrence. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ la propriété $F_n \wedge F_{n+1} = 1$.

— *Initialisation.* Compte tenu de la remarque qui nous a mené à effectuer ce raisonnement, $\mathcal{P}_0$ est naturellement vérifiée.

— *Hérédité.* On fixe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. On a que :

$$F_{n+2} \wedge F_{n+1} = (F_{n+1} + F_n) \wedge F_{n+1},$$

qui, part les propriétés du PGCD, est $F_n \wedge F_{n+1}$ qui vaut 1 par hypothèse de récurrence. Finalement $F_{n+2} \wedge F_{n+1} = 1$ ce qui est exactement $\mathcal{P}_{n+1}$.

Du principe de récurrence, on déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+1} \wedge F_n = 1.$$

EXERCICE 495 (②) par Lancelot Achour [*]

Soient a et b deux éléments de $\mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Montrer que x^a et x^b sont des nombres rationnels si et seulement si $x^{a\wedge b}$ est un nombre rationnel.

D'après le théorème 28, il existe deux entiers (p, q) tels que :

$$a \wedge b = ap - qb.$$

On raisonne par double implication. Pour le sens direct, supposons que x^a et x^b sont rationnels. Alors $x^{ap} = (x^a)^p$ et $x^{-bp} = \dfrac{1}{(x^b)^p}$ sont rationnels, donc il en est de même de leur produit $x^{a\wedge b}$.

Réciproquement, supposons que $x^{a\wedge b}$ est rationnel. Par définition du PGCD, il existe k et ℓ deux entiers tels que $a = k(a \wedge b)$ et $b = \ell(a \wedge b)$. Par conséquent on a que :

$$x^a = (x^{a\wedge b})^k \in \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad x^b = (x^{a\wedge b})^\ell \in \mathbb{Q},$$

ce qui achève l'exercice.

EXERCICE 496 (②) par Alexandre Camelin [*]

Soient a et b deux éléments de $\mathbb{N}^*$. Montrer que a et b sont premiers entre eux si et seulement si $a + b$ et ab sont premiers entre eux.

Montrons dans un premier temps l'implication directe. Supposons que a et b sont premiers entre eux. Alors

$$(a + b) \wedge a = b \wedge a = 1 \quad \text{et} \quad (a + b) \wedge b = a \wedge b = 1.$$

Le théorème 30 montre alors que $a + b$ et ab sont premiers entre eux, ce qu'on voulait démontrer.

Réciproquement, remarquons que si d est un nombre entier tel que d divise a et d divise b, alors d divise ab et d divise $a + b$ donc d divise $ab \wedge (a + b)$. Ainsi, $a \wedge b$ divise $ab \wedge (a + b)$ si bien que $ab \wedge (a + b) = 1$ implique que $a \wedge b = 1$, ce qui démontre l'implication réciproque.

EXERCICE 497 (③) par Lancelot Achour[*]

Soient a et b deux entiers relatifs premiers entre eux, $(k, \ell) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

a) Montrer que a^k et b sont premiers entre eux. On déduira d'une relation de Bézout entre a et b une relation de Bézout entre a^k et b.

b) Montrer que a^k et b^ℓ sont premiers entre eux.

a) Supposons a et b premiers entre eux. On dispose de $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $ap + bq = 1$. On élève à la puissance k :

$$1 = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (bq)^j (ap)^{k-j} = a^k p^k + b \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} b^{j-1} q^j (ap)^{k-j}.$$

Comme

$$\sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} b^{j-1} q^j (ap)^{k-j}$$

est dans $\mathbb{Z}$, le théorème 29, entraîne que a^k et b sont premiers entre eux.

b) Puisque a^k et b sont premiers entre eux, on peut appliquer le même raisonnement qu'à la question précédente pour obtenir que a^k et b^ℓ sont premiers entre eux.

Exercice 498 (③) par Lancelot Achour[∗]

Soient m et n deux éléments de $\mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n = \mathbb{U}_{n \wedge m}$.

On raisonne par double inclusion pour montrer que $\mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n = \mathbb{U}_{n \wedge m}$.

— On a clairement que $\mathbb{U}_{n \wedge m} \subseteq \mathbb{U}_m$ et $\mathbb{U}_{n \wedge m} \subseteq \mathbb{U}_m$ (cf. exercice 397), donc $\mathbb{U}_{n \wedge m} \subseteq \mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n$.

— Remarquons que $\mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n$ n'est pas vide car 1 en est un élément. Soit alors $z \in \mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n$. On a que :

$$z^m = z^n = 1.$$

La relation de Bézout du théorème 28 donne qu'il existe a et b dans $\mathbb{Z}$ vérifiant :

$$am + bn = m \wedge n.$$

On a alors que :

$$z^{m \wedge n} = z^{am+bn} = (z^m)^a (z^n)^b = 1,$$

autrement dit $z \in \mathbb{U}_{m \wedge n}$. On a donc que $\mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n \subseteq \mathbb{U}_{m \wedge n}$.

Exercice 499 (③) par Térence Marchi [∗]

Soient m et n deux éléments de $\mathbb{N}^*$ premiers entre eux. Montrer que tout élément de z de $\mathbb{U}_{mn}$ s'écrit $z = uv$ avec $u \in \mathbb{U}_m$ et $v \in \mathbb{U}_n$.

Soit $z \in \mathbb{U}_{mn}$. Le théorème de Bézout donne $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $am + bn = 1$. On écrit

$$z = z^{bn} z^{am},$$

et on note que z^{bn} appartient à $\mathbb{U}_m$ (car $(z^{bn})^m = z^{bmn} = (z^m n)^b = 1^b = 1$). De même z^{am} appartient à $\mathbb{U}_n$.

Exercice 500 (③) par Lancelot Achour [∗]

Soient u et v deux entiers supérieurs ou égaux à 2 et premiers entre eux. Montrer que le nombre $\dfrac{\ln(v)}{\ln(u)}$ est irrationnel.

C'est une généralisation de l'exercice 19 ; on procède de la même manière. On raisonne par l'absurde et on suppose que $\dfrac{\ln(v)}{\ln(u)}$ est rationnel. Par conséquent, il existe $(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\frac{\ln(v)}{\ln(u)} = \frac{p}{q} \quad \text{i.e.} \quad q\ln(v) = \ln(u)p \quad \text{i.e.} \quad v^q = u^p.$$

Or d'après l'exercice 497, comme u est premier à v, p et q dans $\mathbb{N}^*$, alors v^q et u^p sont premiers entre eux et égaux, donc égaux à 1, ce qui n'est pas.

Exercice 501 (④) par Alexandre Camelin

En utilisant l'exercice 462, montrer que si $a \geq 2$ est un entier, m et n deux éléments de $\mathbb{N}^*$, alors $a^m - 1$ et $a^n - 1$ ont pour pgcd $a^{m \wedge n} - 1$.

Démontrons par récurrence forte sur $k \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathcal{P}(k)$ suivante :

$$\text{"}\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \quad \text{Si} \quad \max(m,n) = k \quad \text{alors} \quad (a^m - 1) \wedge (a^n - 1) = a^{m \wedge n} - 1\text{"}$$

$\mathcal{P}(1)$: Si $\max(m,n) = 1$ on a nécessairement $m = n = 1$ (car $m, n \in \mathbb{N}^*$) donc

$(a^m - 1) \wedge (a^n - 1) = (a - 1) \wedge (a - 1) = a - 1 = a^{1 \wedge 1} - 1$ donc $\mathcal{P}(1)$ est bien vérifée.

$\mathcal{P}(1), \mathcal{P}(2), \ldots, \mathcal{P}(k) \Rightarrow \mathcal{P}(k+1)$:

Supposons $\mathcal{P}(1), \mathcal{P}(2), \ldots, \mathcal{P}(k)$ vérifiées et montrons $\mathcal{P}(k+1)$.

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $\max(m,n) = k+1$.

• Si $m = n = k+1$ on a évidemment :

$$(a^m - 1) \wedge (a^n - 1) = a^{k+1} - 1 = a^{m \wedge n} - 1$$

et la propriété est vérifiée.

• Sinon, m et n jouant des rôles symétriques, on peut supposer sans perte de généralité que $m = k+1 > n$.

D'après l'exercice 462 on sait que si r désigne le reste de la division euclidienne de m par n on a :

$$(a^m - 1) \wedge (a^n - 1) = (a^n - 1) \wedge (a^r - 1).$$

Par définition de r, on a $r < n < k+1$ si bien que $n = \max(r,n) < k+1$ et $\mathcal{P}(n)$ étant vraie on sait que :

$$(a^n - 1) \wedge (a^r - 1) = a^{n \wedge r} - 1.$$

Or, comme r est le reste de la division euclidienne de m par n, on sait que $m \wedge n = n \wedge r$ (c'est ainsi que fonctionne l'algorithme d'Euclide) donc finalement :

$$(a^m - 1) \wedge (a^n - 1) = (a^n - 1) \wedge (a^r - 1) = a^{n \wedge r} - 1 = a^{m \wedge n} - 1$$

donc $(a^m - 1) \wedge (a^n - 1) = a^{m \wedge n} - 1$, ce qu'on voulait démontrer. Ainsi $\mathcal{P}(k+1)$ est vérifiée.

Conclusion : Quelque soit $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(k)$ est vérifiée donc :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \quad (a^m - 1) \wedge (a^n - 1) = a^{m \wedge n} - 1.$$

Rédaction alternative :

On raisonne par double divisibilité.

• Montrons d'abord que $a^{m \wedge n} - 1$ divise $(a^m - 1) \wedge (a^n - 1)$. Pour cela, on remarque que si $k \mid n$, disons $n = k\ell$, on a

$$a^n \equiv (a^k)^\ell \equiv 1 \pmod{a^k - 1}.$$

Comme $m \wedge n$ divise m et n, $a^{m \wedge n} - 1$ divise donc bien $a^m - 1$ et $a^n - 1$, c'est-à-dire qu'il divise $(a^m - 1) \wedge (a^n - 1)$.

• Posons désormais $d = (a^m - 1) \wedge (a^n - 1)$ de sorte que d divise $a^m - 1$ et $a^n - 1$ et montrons que d divise $a^{m \wedge n} - 1$. Modulo d, on a $a^m \equiv 1$ et $a^n \equiv 1$ donc $a^{um+vn} \equiv 1 \pmod{d}$ pour tous $u, v \in \mathbb{Z}$. (Ici, le calcul de puissance est fait modulo d, et a^{-1} désigne l'inverse de a modulo d.) En particulier, pour $um + vn = m \wedge n$ (théorème de Bézout), on trouve

$$a^{m \wedge n} \equiv 1 \pmod{d}$$

c'est-à-dire $d \mid a^{m \wedge n} - 1$.

En conclusion, on a montré que d divisait et était divisible par $a^{m\wedge n}-1$, donc les deux sont égaux, étant des nombres entiers positifs.

Exercice 502 (④) par Daniel Caby et Lilu [*]

Selon la valeur de $n \in \mathbb{Z}$, déterminer le pgcd de n^3+n et $2n+1$.

On note $d = (n^3+n) \wedge (2n+1)$.

On remarque que $-8(n^3+n)+(4n^2-2n+5)(2n+1) = 5$. [2]

On a donc : $d \mid 5$ soit $d=1$ ou $d=5$.

Le problème est désormais considérablement simplifié, puisqu'il suffit de raisonner modulo 5 :

$n \equiv \dots [5]$	$n^3+n \equiv \dots [5]$	$2n+1 \equiv \dots [5]$
0	0	1
1	2	3
2	0	0
3	0	2
4	3	4

Ainsi, si $n \equiv 2$ [5], alors $d=5$. Si $n \not\equiv 2$ [5] alors $d=1$.

12.4 Lemme de Gauss, inversion modulaire

Exercice 503 (③) par Térence Marchi [*]

Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Vérifier que

$$(2n+1)\binom{2n}{n} = (n+1)\binom{2n+1}{n}.$$

b) Montrer que $n+1$ divise $\binom{2n}{n}$.

a) On a

$$\begin{aligned}(n+1)\binom{2n+1}{n} &= \frac{(n+1)(2n+1)!}{n!(2n+1-n)!} = \frac{(n+1)(2n+1)(2n)!}{n!(n+1)n!} = (2n+1)\frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} \\ &= (2n+1)\binom{2n}{n}.\end{aligned}$$

b) Ainsi,

$$(n+1)\binom{2n}{n} = (2n+1)\binom{2n}{n} \quad \text{et} \quad \binom{2n+1}{n} \in \mathbb{N}$$

alors $n+1$ divise $(2n+1)\binom{2n}{n}$. De plus, $2(n+1)-(2n+1)=1$,

donc $(n+1)$ et $(2n+1)$ sont premiers entre eux (réciproque du théorème de Bézout).

Ainsi, d'après le théorème de Gauss, $(n+1)$ divise $\binom{2n}{n}$.

Exercice 504 (②) par Wéline Pujol [*]

On se propose de déterminer l'ensemble E des couples $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $6x-15y=3$.

2. Cette égalité peut sembler parachutée. On l'a trouvée en cherchant à faire s'annuler, une par une, les puissances de n. Ce raisonnement est plus naturel avec la division euclidienne des polynômes.

a) Montrer que, si $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, on a :

$$(x, y) \in E \quad \Longleftrightarrow \quad 2\,(x-3) = 5\,(y-1)\,.$$

b) En utilisant le lemme de Gauss, montrer que :

$$E = \{(5t+3, 2t+1)\ ;\ t \in \mathbb{Z}\}\,.$$

a) Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. Alors

$$\begin{aligned}(x, y) \in E &\Longleftrightarrow 6x - 15y = 3 \Longleftrightarrow 3\,(2x - 5y - 1) = 0 \Longleftrightarrow 2x - 5y - 1 = 0\\ &\Longleftrightarrow 2\,(x-3) = 5\,(y-1)\,.\end{aligned}$$

b) Soit $(x, y) \in E$. Alors, $2 \mid 5\,(y-1)$ et 2 est premier à 5. D'après le lemme de Gauss $2 \mid (y-1)$. Il existe donc $t \in \mathbb{Z}$ tel que $y - 1 = 2t$, i.e. $y = 2t+1$.
Mais, si $y = 2t+1$,

$$2(x-3) = 5(y-1) \Longleftrightarrow 2(x-3) = 10t \Longleftrightarrow x = 5t+3.$$

Comme $5t+3$ est dans $\mathbb{Z}$ si t est dans $\mathbb{Z}$, on en déduit le résultat.

Exercice 505 (④) par Wéline Pujol [*]

Soient a et b deux élèments de $\mathbb{N}^*$ et $c \in \mathbb{Z}$. On note δ le pgcd de a et b. On se propose de déterminer l'ensemble E des couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $ax + by = c$. On écrit $a = \delta a'$ et $b = \delta b'$ où a' et b' sont deux entiers premiers entre eux.

a) Montrer que E est non vide si et seulement si $\delta \mid c$.

On suppose dans la suite que $\delta \mid c$. On fixe un élément (x_0, y_0) de E.

b) Pour $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, vérifier que :

$$(x, y) \in E \quad \Longleftrightarrow \quad a'\,(x - x_0) = b'\,(y_0 - y)\,.$$

c) Montrer que :

$$E = \{(x_0 + tb', y_0 - ta')\ ;\ t \in \mathbb{Z}\}.$$

a) Supposons E non vide. Soit alors $(x, y) \in E$. L'égalité $ax + by = c$ s'écrit $d\delta(a'x + b'y) = c$, ce qui montre que δ divise c.
Supposons que δ divise c. On écrit alors $c = \delta c'$ où $c' \in \mathbb{Z}$. Si $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, on a

$$(x, y) \in E \quad \Longleftrightarrow \quad a'x + b'y = c'.$$

Mais, grâce au théorème de de Bézout, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a'u + b'v = 1$. Et alors $(c'u, c'v) \in E$.

b) Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. Alors

$$(x, y) \in E \Longleftrightarrow ax + by = ax_0 + by_0 \Longleftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \Longleftrightarrow a'(x - x_0) + b'(y - y_0) = 0.$$

c) Soit $(x, y) \in E$. Alors b' divise $a'(x - x_0)$. Puisque a' et b' sont premiers entre eux, le lemme de Gauss entraîne que b' divise $x - x_0$. On peut donc écrire $x = x_0 + tb'$ avec $t \in \mathbb{Z}$. Mais alors,

$$a'(x - x_0) + b'(y - y_0) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y = y_0 - tb',$$

ce qui achève l'exercice.

Exercice 506 (⑤) par Daniel Caby [*]

Soient a et b deux éléments de $\mathbb{N}^*$ premiers entre eux.

a) Montrer que $ab-a-b$ n'est pas de la forme $au+bv$ avec u et v dans $\mathbb{N}$.

b) Montrer que, si n est un entier $\geq ab-a-b+1$, alors n s'écrit $au+bv$ où $(u,v)\in\mathbb{N}^2$. On pourra remarquer que les $n-au$ pour $u\in\{0,\ldots,b-1\}$ sont supérieurs ou égaux à $1-b$ et ont des classes modulo b distinctes.

a) On suppose que $ab-a-b=au+bv$ avec $(u,v)\in\mathbb{Z}^2$. Alors

$$au+bv-ab+a+b=0 \quad \text{i.e.} \quad a(u+1-b)=-b(v+1).$$

Donc $a \mid b(v+1)$, et, d'après le lemme de Gauss, $a \mid (v+1)$.
De même, $b \mid a(u+1-b)$, donc $b \mid u+1-b$ et $b \mid (u+1)$.
Ainsi, $v\geq a-1$, $u\geq b-1$, puis

$$ab-a-b\geq a(b-1)+b(a-1) \quad \text{i.e.} \quad ab-a-b\geq 2ab-a-b,$$

ce qui est absurde car $ab>0$.

b) On a, si $u\in\{0,\ldots,b-1\}$,

$$n-au\geq ab-a-b+1-a(b-1) \quad \text{i.e.} \quad n-au\geq 1-b.$$

Montrons que les $n-au$ ont des classes modulo b distinctes.
Soit donc $(u,u')\in[\![0,b-1]\!]^2$ tel que

$$n-au\equiv n-au'\ [b].$$

Alors, $au\equiv au'\ [b]$. Ainsi, b divise $a(u-u')$, donc $u-u'$ grâce au lemme de Gauss. Mais

$$-(b-1)\leq u-u'\leq b-1.$$

Par conséquent, $u-u'=0$ et $u=u'$.
Les b entiers $n-au$ ont donc des classes modulo b distinctes. Or il y a exactement b classes de congruence modulo b. Donc :

$$\forall r\in[\![0,b-1]\!],\quad \exists u\in[\![0,b-1]\!],\qquad n-au\equiv r\ [b].$$

Et notamment, il existe $u\in[\![0,b-1]\!]$ tel que

$$n-au\equiv 0\ [b],$$

c'est-à-dire qu'il existe $v\in\mathbb{Z}$ tel que

$$n-au=bv \quad \text{i.e.} \quad n=au+bv.$$

Or $bv\geq 1-b$, donc, puisque bv est divisible par b, $bv\geq 0$ et $v\in\mathbb{N}$.
On obtient bien $(u,v)\in\mathbb{N}^2$ tel que $n=au+bv$.

Exercice 507 (⑤) par Adrien Rezzouk et Daniel Caby [*]

Les notations sont celles de l'exercice précédent.

a) Montrer que si l'entier $n\leq ab-a-b$ s'écrit $au+bv$ avec u et v dans $\mathbb{N}$, alors cette écriture est unique.

b) Soit $N=ab-a-b$. Dénombrer l'ensemble $\{(x,y)\in\mathbb{N}^2,\ ax+by\leq N\}$.

c) Déterminer le nombre d'entiers naturels qui ne peuvent pas s'écrire sous la forme $au+bv$ avec $(u,v)\in\mathbb{N}^2$.

a) On remarque que, si $n \leq ab - a - b$, alors $u \leq b - 1$.
Supposons qu'il existe $(u, u') \in [\![0, b-1]\!]^2$ et $(v, v') \in \mathbb{N}^2$ tels que

$$n = au + bv = au' + bv'.$$

Alors, $a(u - u') = b(v' - v)$ et $b \mid a(u - u')$. Donc, d'après le lemme de Gauss, $b \mid (u - u')$. Donc $b \leq |u - u'|$, donc $b \leq b - 1$ d'après la remarque, ce qui est absurde.
Une autre démonstration est possible, en partant de la même remarque, et en utilisant la résolution d'équations diophantiennes : en effet, l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ de $ax + by = n$ est $S = \{(u + kb, v - ka),\ k \in \mathbb{Z}\}$. Ici seul $k = 0$ satisfait $u \in [\![0, b-1]\!]$.

b) On pose $N = ab - a - b$. On veut dénombrer $E = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2,\ ax + by \leq N\}$.

Soit n un entier. On pose $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $n = au + bv$ et $0 \leq u \leq b - 1$. (En effet, l'existence d'un couple (u_0, v_0) tel que $au_0 + bu_0 = n$ est garantie par le théorème de Bézout. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ de $ax + by = n$ étant $S = \{(u_0 + kb,\ v_0 - ka), k \in \mathbb{Z}\}$, si on pose la division euclidienne de u_0 par b, $u_0 = bq + r$, alors r est solution et appartient à $[\![0, b-1]\!]$.)
On suppose $n \leq N$. On note P_n le nombre de couple $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tel que $ax + by = n$. On sait d'après le a) que $P_n \leq 1$ et d'après l'exercice précédent que $P_N = 0$.
On veut montrer que $P_n = 0$ si et seulement si $P_{N-n} = 1$.
Supposons $P_n = P_{N-n} = 1$. Alors il existe $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n = ax + by$ et $(x', y') \in \mathbb{N}^2$ tel que $N - n = ax' + by'$, alors $N = a(x + x') + b(y + y')$, absurde. Ainsi $P_{N-n} = 1$ implique que $P_n = 0$.

Supposons $P_n = 0$. On a $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $n = au + bv$ et $0 \leq u \leq b - 1$. On a alors $v < 0$. Ainsi :

$$N - n = ab - a - b - (au + bv) = a(b - u - 1) + b(-v - 1).$$

Or, $-b + 1 \leq -u \leq 0$ donc $0 \leq b - u - 1$ et $v < 0$ donc $-v - 1 \geq 0$ donc $N - n$ s'écrit sous la forme $au' + bv'$ où u' et v' sont des entiers naturels. On a $P_n = 0$ implique $P_{N-n} = 1$.
Dès lors, pour tout $0 \leq n \leq N$, on a :

$$P_n + P_{N-n} = 1 \qquad \text{donc} \qquad |E| = \sum_{n=0}^{N} P_n = \sum_{n=0}^{N} P_{N-n}.$$

Ainsi,

$$2|E| = \sum_{n=0}^{N} (P_n + P_{N-n}) = \sum_{n=0}^{N} 1.$$

On a donc $|E| = \dfrac{N+1}{2} = \dfrac{(a-1)(b-1)}{2}$

c) On sait d'après l'exercice précédent que tout nombre supérieur à N peut s'écrire $au + bv$. L'ensemble des nombres ne pouvant pas s'écrire sous la forme $au + bv$ est $\{0, \ldots, N\} \backslash E$ de cardinal

$$N + 1 - |E| = \frac{(a-1)(b-1)}{2}.$$

Remarque On peut résoudre l'exercice en interprétant E comme l'ensemble des points entiers dans un triangle rectangle, en dénombrant les points entiers dans le triangle associé, ceux de la diagonale, et en utilisant un argument de symétrie.

Exercice 508 (①) par Wéline Pujol [*]

Déterminer l'inverse de 7 modulo 100, puis résoudre dans $\mathbb{Z}$ la congruence $7x \equiv 54\ [100]$

On sait que 7 et 100 sont premiers entre eux. Il existe donc un entier naturel k tel que $k \in [\![0, 99]\!]$ et que :

$$7k \equiv 1\ [100]\,.$$

Si on prend $k = 43$, on obtient :

$$43 \times 7 \equiv 301\ [100]\,,$$

et $301 \equiv 1\ [100]$, ce qui nous permet d'affirmer que :

$$43 \times 7 \equiv 1\ [100]\,.$$

(Notons que l'on pouvait obtenir 43, parachuté ici, à l'aide de l'algorithme d'Euclide.)

Pour $x \in \mathbb{Z}$, on a donc

$$7x \equiv 54\ [100] \Longleftrightarrow 43 \times 7x \equiv 43 \times 54\ [100] \Longleftrightarrow x \equiv 2322\ [100] \Longleftrightarrow x \equiv 22\ [100]\,.$$

Exercice 509 (①) par Alexandre Camelin [*]

a) Calculer les inverses modulo 8 des entiers de $\{0, \dots, 7\}$ premiers à 8.

b) Calculer les inverses modulo 10 des entiers de $\{0, \dots, 9\}$ premiers à 10.

a) Les entiers de $\{0, \dots, 7\}$ premiers à $8 = 2^3$ sont les entiers impairs c'est-à-dire $1, 3,\ 5,\ 7$. On trouve que
   — l'inverse de 1 modulo 8 est 1 (car $1 \times 1 \equiv 1$ [8]),
   — l'inverse de 3 modulo 8 est 3 (car $3 \times 3 \equiv 9 \equiv 1$ [8]),
   — l'inverse de 5 modulo 8 est 5 (car $5 \times 5 \equiv 25 \equiv 1$ [8]),
   — l'inverse de 7 modulo 8 est 7 (car $7 \times 7 \equiv (-1) \times (-1) \equiv 1$ [8]).

b) Les entiers de $\{0, \dots, 9\}$ premiers à $10 = 2 \times 5$, sont les entiers impairs de $\{0, \dots, 9\}$ sauf 5, c'est-à-dire $1, 3, 7, 9$. On trouve que
   — l'inverse de 1 modulo 10 est 1 (car $1 \times 1 \equiv 1$ [10]),
   — l'inverse de 3 modulo 10 est 7 (car $3 \times 8 \equiv 21 \equiv 1$ [10]),
   — l'inverse de 7 modulo 10 est 3,
   — l'inverse de 9 modulo 10 est 9 (car $9 \times 9 \equiv 81 \equiv 1$ [10]).

Exercice 510 (②) par Wéline Pujol [*]

Soit $n \geq 2$ un entier. Montrer que n est premier si et seulement si tout élément de $\{1, ..., n-1\}$ admet un inverse modulo n.

Si n est premier, tout élément de $\{1, ..., n-1\}$ est premier à n, donc admet un inverse modulo n.

Inversement, si n n'est pas premier, on dispose de $k \in \{2, \dots, n-1\}$ divisant n. Cet entier k n'est pas premier à n, et n'admet donc pas d'inverse modulo n.

Exercice 511 (④) par Léo Baciocchi [*]

Soit p un nombre premier

a) Justifier que tout $a \in \{1, \dots, p-1\}$ admet un unique inverse modulo p, que l'on note $i(a)$.

b) Montrer que les seuls $a \in \{1, \dots, p-1\}$ tels que $i(a) = a$ sont 1 et $p-1$ (qui sont égaux si $p = 2$ et distincts sinon).

c) En regroupant judicieusement les facteurs du produit $\prod_{a=1}^{p-1} a$, établir le théorème de Wilson :

$$(p-1)! \equiv -1\ [p].$$

d) On suppose que $n \geqslant 2$ est un entier tel que $(n-1)! \equiv -1\ [n]$. Montrer que tout élément de $\{1, ..., n-1\}$ admet un inverse modulo n et en déduire que n est premier.

a) Puisque p est premier, tous les éléments de $\{1, \dots, p-1\}$ sont premiers à p et donc inversibles modulo p. On achève en utilisant l'unicité de l'inverse modulo p (théorème 33).

b) Soient $a \in \{1, \ldots, p-1\}$. On a :

$$\begin{aligned} i(a) = a &\iff a^2 \equiv 1 \ [p] \\ &\iff (a-1)(a+1) \equiv 0 \ [p] \\ &\iff a \equiv 1 \ [p] \text{ ou } a \equiv -1 \ [p] \\ &\iff a = 1 \text{ ou } a = p-1 \end{aligned} \tag{2}$$

La troisième équivalence résulte du fait que, si un nombre premier p divise un produit, il divise l'un des facteurs.

c) Puisque tous les éléments de $\{1, \ldots, p-1\}$ admettent un unique inverse dans $\{1, ..., p-1\}$, il suffit de les regrouper à l'intérieur du produit :

$$\prod_{a=1}^{p-1} a \equiv 1 \times \left(\underbrace{2 \times i(2)}_{\equiv 1 [p]} \right) \times \left(\underbrace{3 \times i(3)}_{\equiv 1 [p]} \right) \times \cdots \times (p-1) \ [p] \equiv p-1 \ [p] \equiv -1 \ [p].$$

d) Il suffit de remarquer que

$$\forall a \in \{1, ..., n-1\}, \quad -a \prod_{i \in \{1, \ldots, n-1\} \setminus \{a\}} i \equiv 1 \ [n].$$

Par conséquent, tous les éléments de cet ensemble sont inversibles modulo n, i.e. ils sont tous premiers avec n, donc n est premier (exercice 510).

Exercice 512 (④) par Quentin Langé [$*$]

Soit $n \geq 6$ un entier non premier. Montrer que n divise $(n-1)!$.

Distinguons deux cas :

- Cas 1. L'entier n n'est pas le carré d'un nombre premier. Il peut alors s'écrire ab avec a et b dans $[\![2, n-1]\!]$ et $a < b$. Alors $(n-1)! = 1 \times ... \times a \times ... \times b \times ... \times (n-1)$ donc n divise $(n-1)!$.

- Cas 2. L'entier n s'écrit p^2 où p est premier. Comme $p > 2$ on a $n = p^2 > 2p > p$ et

$$(n-1)! = 1 \times ... \times p \times ... \times 2p \times ... \times (n-1),$$

donc n divise encore $(n-1)!$.

12.5 Complément : racines rationnelles d'un polynôme

Exercice 513 (②) par Alexandre Camelin [$*$]

On a montré en **6.3.1** que l'équation $x^5 - 5x + 7 = 0$ admet une unique solution réelle. Déduire du théorème 34 que cette solution est un nombre irrationnel.

On raisonne par l'absurde. On suppose que l'unique solution réelle de l'équation

$$x^5 - 5x + 7 = 0$$

est rationnelle. D'après le théorème 34, cette solution, notée n, est entière et divise 7. Donc $n \in \{\pm 1, \pm 7\}$. Mais on vérifie qu'aucun des entiers $\pm 1, \pm 7$ n'est solution de l'équation.

Exercice 514 (②) par Lancelot Achour [$*$]

Déduire du théorème 34 que, si $k \geq 2$ est un entier et $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre $\sqrt[k]{n}$ est un rationnel si et seulement s'il est entier, i.e. si et seulement si n est puissance k-ième d'un entier.

Soient $k \geq 2$ un entier et n un entier naturel non nul. On considère le polynôme :

$$P(X) = X^k - n.$$

Supposons que $\sqrt[k]{n}$ soit un rationnel, que l'on écrit sous forme irréductible $\dfrac{p}{q}$ avec $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Ainsi, $\sqrt[k]{n}$ est une racine rationnelle du polynôme P, qui est unitaire à coefficients entiers. Le théorème 34 entraîne que $\sqrt[k]{n}$ est entier, soit que n est la puissance k-ième d'un entier.

La réciproque est évidente.

EXERCICE 515 (③) par Alexandre Camelin [*]

Trouver un polynôme unitaire de degré 4 à coefficients dans $\mathbb{Z}$ dont $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ soit racine et en déduire que $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ est irrationnel, ce que l'on a établi autrement dans l'exercice 21 de **1.4**.

On a :

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = 5+2\sqrt{6}, \qquad (\sqrt{2}+\sqrt{3})^4 = (5+2\sqrt{6})^2 = 25+4\times 6+20\sqrt{6} = 49+20\sqrt{6},$$

si bien que $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^4 - 10(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 + 1 = 0$.

Ainsi, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ est racine du polynôme unitaire à coefficients entiers : $X^4 - 10X^2 + 1$. Alors, d'après le théorème 34, si par l'absurde $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ était rationnel, il serait entier.
Or, on peut vérifier facilement que $3 < \sqrt{2}+\sqrt{3} < 4$ donc $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ne peut être entier, ce qui est donc absurde.

Ainsi, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ est irrationnel.

EXERCICE 516 (④) par Alexandre Camelin [*]

a) Soient x_1 et x_2 deux nombres rationnels tels que x_1+x_2 et x_1x_2 soient entiers. Montrer que x_1 et x_2 sont entiers.
b) Donner deux nombres réels irrationnels x_1 et x_2 tels que x_1+x_2 et x_1x_2 soient entiers.
c) Soient x_1, x_2 et x_3 trois nombres rationnels tels que $x_1+x_2+x_3$, $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$ et $x_1x_2x_3$ soient entiers. Montrer que x_1, x_2 et x_3 sont entiers.

a) Les rationnels x_1 et x_2 sont des racines du polynôme unitaire à coefficients entiers P défini par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = (x-x_1)(x-x_2) = x^2 - (x_1+x_2)x + x_1x_2.$$

Ils sont donc entiers en vertu du théorème 34.

b) En posant $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ on a :

$$x_1+x_2 = 1 \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad x_1x_2 = \frac{(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}{2\times 2} = -1 \in \mathbb{Z}.$$

c) Le polynôme

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = x^3 - (x_1+x_2+x_3)x^2 + (x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)x - x_1x_2x_3$$

est un polynôme unitaire à coefficients entiers. Ses racines rationnelles x_1, x_2, x_3 sont des entiers d'après le théorème 34.

EXERCICE 517 (④) par Lancelot Achour [*]

a) Montrer que, si $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme P_n à coefficients réels tels que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad P_n(2\cos(\theta)) = 2\cos(n\theta).$$

b) Expliciter, P_0, P_1, P_2, P_3.
c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est à coefficients dans $\mathbb{Z}$.
d) Montrer que, si $n \geq 1$, P_n est unitaire.
e) En utilisant la question c) de l'exercice précédent, montrer que, si r est un nombre rationnel tel que $\cos(\pi r)$ soit rationnel, alors $2\cos(\pi r)$ est entier : c'est le résultat de l'exercice 396.

a) Soit n un entier naturel. Alors on a :
$$2\cos(n\theta) = 2\,T_n(\cos(\theta)),$$
Il suffit alors de poser :
$$P_n(X) = 2\,T_n\left(\frac{X}{2}\right).$$
Observons que son unicité provient du fait que, si un autre polynôme existait, alors les deux polynômes coïncideraient sur $[-2, 2]$ qui est un intervalle infini.

b) En se servant des premiers polynômes de Tchebychev, on a que :
$$P_0 = 1, \quad P_1 = X, \quad P_2 = X^2 - 1P_3 = X^3 - 3X.$$

c) On montre ce résultat par récurrence double sur n.
— *Initialisation.* Question précédente.
— *Hérédité.* On fixe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et tel que P_n et P_{n-1} soient à coefficients entiers. En utilisant la relation de récurrence vérifiée par les polynômes de Tchebychev on obtient que :
$$T_{n+2}\left(\frac{X}{2}\right) = XT_{n+1}\left(\frac{X}{2}\right) - T_n\left(\frac{X}{2}\right),$$
soit :
$$2T_{n+2}\left(\frac{X}{2}\right) = 2XT_{n+1}\left(\frac{X}{2}\right) - 2T_n\left(\frac{X}{2}\right),$$
ce qui est également :
$$P_{n+2}(X) = XP_{n+1}(X) - P_n(X),$$
d'où P_{n+2} est à coefficients entiers, puisque somme de polynômes qui le sont.

Du principe de récurrence on déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme P_n est à coefficients entiers.

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que T_n est de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1} (cf exercice 446). Par suite le coefficient dominant de P_n est
$$\text{dom}(P_n) = 2 \times 2^{n-1} \times \frac{1}{2^n} = 1,$$
d'où P_n est unitaire.

e) Soit r un rationnel tel que $\cos(\pi r)$ soit rationnel. On écrit
$$2\cos(\pi r) = \frac{p}{q} \quad \text{avec} \quad (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*.$$
On a alors que :
$$P_{2q}(2\cos(\pi r)) - 2 = 0,$$
ainsi, $2\cos(\pi r)$ est racine d'un polynôme unitaire à coefficients entiers, donc en vertu du théorème 34, $q = 1$. Donc $2\cos(\pi r)$ est entier ce qu'il fallait démontrer.

12.6 Décomposition en facteurs premiers

Exercice 518 (②) par Quentin Lepine [*]

Déduire le théorème 30 de l'énoncé précédent et de la remarque 2 de **12.3**.

Soient a, b, n, des entiers relatifs. On veut montrer que, si n n'est pas premier à ab, alors n n'est pas premier à a ou à b.

On a n qui n'est pas premier à ab donc, d'après la remarque 2 de **12.3**, il existe p premier tel que $p \mid n$ et $p \mid ab$.

Or, d'après le théorème 35, si $p \mid ab$ alors $p \mid a$ ou $p \mid b$.

On a donc $p \mid n$ et $p \mid a$ ou $p \mid n$ et $p \mid b$. Alors p est un diviseur premier de n et a, ou p est un diviseur premier de n et b.

Ainsi, d'après la remarque 2, n n'est pas premier à a ou n n'est pas premier à b.

On a donc montré que, si n n'est pas premier à ab, alors n n'est pas premier à a ou b.

Par contraposée, si n est premier à a et b, alors n est premier à ab.

On retrouve donc bien la première partie du théorème 30 ; la seconde s'en déduit par récurrence.

EXERCICE 519 (①) par J.Hoarau [$*$]

a) Déterminer les diviseurs 75000. Quel est leur nombre ?
b) Même question pour 2022.

a) Les diviseurs de $75000 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^5$ sont :

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 25, 30, 40, 50, 60, 75, 100, 120, 125, 150, 200, 250, 300, 375,$$

$$500, 600, 625, 750, 1000, 1250, 1500, 1875, 2500, 3000, 3125, 3750,$$

$$5000, 6250, 7500, 9375, 12500, 15000, 18750, 25000, 37500, 75000.$$

Nous pouvons tous les compter, mais une manière plus élégante et moins chronophage pour déterminer le nombre de diviseurs est de faire le raisonnement suivant :
Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les exposants des n facteurs premiers d'un nombre N. Pour chaque facteur premier, on peut choisir jusqu'à $a_i + 1$ exposants possibles. L'entier N admet donc exactement

$$(a_1 + 1)(a_2 + 1)...(a_n + 1)$$

diviseurs.
Ainsi, 75000 admet exactement $(3 + 1)(1 + 1)(5 + 1) = 48$ diviseurs.

b) Puisque $2022 = 2 \times 3 \times 337$, ses diviseurs sont au nombre de $2 \times 2 \times 2 = 8$ et sont :
$1, 2, 3, 6, 337, 674, 1011$ et 2022.

EXERCICE 520 (②) par Adrien Israël [$*$]

Déterminez les couples (x, y) d'éléments de $\mathbb{N}^*$ tels que $x \wedge y = 5$ et $xy = 300$.

Soient x et y, deux entiers naturels vérifiant les conditions de l'énoncé. Puisque $x \wedge y = 5$, il existe deux entiers naturels x' et y' tels que $x = 5x'$ et $y = 5y'$. Les conditions se réécrivent alors $25x'y' = 300$, c'est-à-dire $x'y' = 12$, et $x' \wedge y' = 1$.

Les diviseurs de 12 dans $\mathbb{N}^*$ sont $1, 2, 3, 4, 6, 12$. On en déduit que les couples (x', y') de $\mathbb{N}^{*2}$ tels que $x'y' = 12$ et $x' \wedge y' = 1$ sont $(1, 12), (3, 4), (4, 3), (12, 1)$. Les couples solutions au problème de l'énoncé sont donc

$$(5, 60),\ (15, 20),\ (20, 15),\ (60, 5).$$

EXERCICE 521 (②) par Paul Perrier [$*$]

Quels sont les entiers naturels n pouvant s'écrire sous la forme ab où a et b sont deux entiers supérieurs ou égaux à 2 et premiers entre eux ?

Si n est puissance d'un nombre premier p, les diviseurs de n sont également des puissances de p. On ne peut donc pas écrire n sous la forme ab où a et b sont deux entiers supérieurs ou égaux à 2 et premiers entre eux.

Sinon, soient p un diviseur premier de n et $m = v_p(n)$. Alors, $m \geq 1$ et $n = p^m b$ où $b \in \mathbb{N}^*$ est différent de 1 et n'est pas divisible par p, donc premier à p^m. Posant $a = p^m$, l'écriture $n = ab$ vérifie les conditions requises.

Ainsi, les solutions sont les entiers naturels non nuls qui ne sont pas de la forme p^m avec $p \in \mathcal{P}$ et $m \in \mathbb{N}^*$.

EXERCICE 522 (②) par Adrien Israël [∗]

Déterminer les $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \vee 6 = 96$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si n est solution, n divise $96 = 2^5.3$. Il appartient donc à l'ensemble

$$\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96\}.$$

De plus, on doit avoir $v_2(n) = 5$, ce qui signifie que 32 divise n. Donc n est égal à 32 ou 96. Réciproquement, ces deux entiers conviennent.

EXERCICE 523 (②) par Adrien Israël [∗]

Quel est le plus petit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $d(n) = 10$?

Remarquons que $10 = 2 \cdot 5 = 1 \cdot 10$, et que ce sont là les seules façons d'écrire 10 comme produit d'éléments de $\mathbb{N}^*$ (à l'ordre près).

Ainsi, d'après la remarque 1 du cours, dire que l'élément n de $\mathbb{N}^*$ vérifie $d(n) = 10$, c'est dire que soit n s'écrit p^9 avec p premier, soit que n s'écrit pq^4 avec p et q premiers distincts.

Dans le premier cas, $n \geq 2^9$, i.e. $n \geq 512$.

Dans le second cas, $n \geq 2^4.3$, i.e. $n \geq 48$.

Le plus petit n tel que $d(n) = 10$ est 48.

EXERCICE 524 (②) par Lancelot Achour [∗]

Soient a et b dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que a divise b si et seulement si a^2 divise b^2.

On raisonne par double implication. Si a divise b, il existe un entier k tel que : $ka = b$. Donc $k^2a^2 = b^2$. Donc a^2 divise b^2.

Supposons maintenant que a^2 divise b^2. Pour tout nombre premier p, on a donc

$$v_p(a^2) \leq v_p(b^2) \quad \text{i.e.} \quad 2v_p(a) \leq 2v_p(b) \quad \text{i.e.} \quad v_p(a) \leq v_p(b),$$

ce qui signifie que a divise b.

Remarquons que la première implication aurait également pu être traitée à partir de la décomposition en facteurs premiers. La rédaction suivie souligne que le sens réciproque est plus subtil que le sens direct.

EXERCICE 525 (③) par Mathieu Bizieux Soient a et b dans $\mathbb{N}^*$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a^n divise b^{n+1}. Montrer que a divise b.

Rappelons que, pour m et n dans $\mathbb{N}^*$:

$$m \mid n \iff \forall p \in \mathcal{P},\, v_p(m) \leq v_p(n).$$

Soient a et b comme dans l'énoncé et $p \in \mathcal{P}$. Alors, si $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_p(a^n) \leq v_p(b^{n+1}).$$

Cela donne alors,

$$n\, v_p(a) \leq (n+1)\, v_p(b) \quad \text{i.e.} \quad v_p(a) \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot v_p(b).$$

Le membre de droite tend vers $v_p(b)$ lorsque n tend vers $+\infty$, donc, par passage à la limite,

$$v_p(a) \leq v_p(b).$$

Puisque cette inégalité est vraie pour tout nombre premier p, a divise b.

EXERCICE 526 (③) par Paul Perrier [*]

Soient a et b deux éléments de $\mathbb{N}^*$ tels que $a^2 = b^3$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{N}^*$ tel que $a = c^3$ et $b = c^2$.

Pour tout p premier tel que p divise a, on a p divise $a^2 = b^3$ donc p divise b. De même, pour tout p premier tel que p divise b, on a p divise $b^3 = a^2$ donc p divise a. Ainsi, a et b ont les mêmes facteurs premiers dans leurs décomposition en facteurs premiers. On peut donc écrire :

$$a = p_1^{e_1} \times \cdots \times p_n^{e_n} \quad \text{et} \quad b = p_1^{f_1} \times \cdots \times p_n^{f_n},$$

où $p_1, \ldots, p_n$ sont des nombres premiers et $e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n$ des éléments de $\mathbb{N}^*$.

Or, si $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$v_{p_i}(a^2) = v_{p_i}(b^3) \quad \text{i.e.} \quad 2e_i = 3f_i,$$

d'où, par le théorème de Gauss :

$$3 \mid e_i \quad \text{et} \quad 2 \mid f_i.$$

On peut donc écrire $e_i = 3e_i'$ et $f_i = 2f_i'$ mais comme $2e_i = 3f_i$, on a $e_i' = f_i'$. On note alors, pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, $a_i = e_i' = f_i'$. Soit

$$c = p_1^{a_1} \times \cdots \times p_n^{a_n}.$$

On a bien

$$c^3 = p_1^{3a_1} \times \cdots \times p_n^{3a_n} = p_1^{e_1} \times \cdots \times p_n^{e_n} = a \quad \text{et} \quad c^2 = p_1^{2a_1} \times \cdots \times p_n^{2a_n} = p_1^{f_1} \times \cdots \times p_n^{f_n} = b.$$

EXERCICE 527 (③) par Paul Perrier [*]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer en fonction de la décomposition en facteurs premiers de n le nombre de couples $(x, y) \in \mathbb{N}^{*2}$ tels que $n = xy$ et $x \wedge y = 1$.

Soit $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{e_i}$, la décomposition en facteurs premiers de n. Trouvons une condition nécessaire et suffisante sur de tels (x, y).

Comme $n = xy$, on a $n \mid xy$ soit

$$\forall i \in \{1, 2, ..., k\}, \quad p_i^{e_i} \mid xy.$$

Or, $x \wedge y = 1$. Donc, d'après le théorème de Gauss, soit $p_i \mid x$ soit $p_i \mid y$.

Donc les décompositions en facteurs premiers de x et de y sont de la forme :

$$x = \prod_{i \in A} p_i^{e_i} \text{ et } y = \prod_{i \in \bar{A}} p_i^{e_i}$$

avec A un sous ensemble de $\{1, 2, ..., k\}$.

De plus on vérifie facilement que de tels x et y vérifient les conditions de l'énoncé.

Il existe donc une bijection entre les couples (x, y) vérifiant l'énoncé et les sous ensembles $\{1, \ldots, k\}$, il y en a donc le même nombre.

Or on sait qu'il existe 2^k sous ensembles de $\{1, 2...k\}$ (pour chaque élément, il existe 2 possibilités : soit ce dernier appartient au sous ensemble soit il n'y appartient pas), on en déduit qu'il existe donc 2^k tels couples (x, y) .

EXERCICE 528 (②) par Adrien Israël [*]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que n est le carré d'un nombre entier si et seulement si $d(n)$ est impair.

Raisonnons par double implication.

$\Rightarrow$ Supposons que n est le carré d'un nombre entier m. Alors, d'après le théorème fondamental de l'arithmétique, il existe des nombres premiers distincts $p_1, p_2, ..., p_r$ et des entiers naturels non nuls $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ tel que $m = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$. D'où

$$n = m^2 = \prod_{i=1}^{r} p_i^{2\alpha_i} \quad \text{et} \quad d(m^2) = \prod_{i=1}^{r} (2\alpha_i + 1).$$

Or, le produit de nombres impairs est impair, donc $d(n)$ est impair. L'implication est vraie.

$\Leftarrow$ Supposons $d(n)$ impair. On écrit $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ où les p_i sont des nombres premiers distincts et les α_i dans $\mathbb{N}^*$. Alors

$$d(n) = \prod_{i=1}^{r} (\alpha_i + 1).$$

Comme $d(n)$ est impair, pour tout $1 \leq i \leq r$, $(\alpha_i + 1)$ est impair, donc α_i est pair. Il existe donc des entiers naturels $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r$ tels que, pour tout $1 \leq i \leq r$, $\alpha_i = 2\beta_i$.

On a donc

$$n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{2\beta_i} = \left(\prod_{i=1}^{r} {p_i}^{\beta_i}\right)^2,$$

qui est le carré d'un nombre entier.

EXERCICE 529 (③) par Alexandre Camelin [*]

a) Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$. Quel est le minimum de la fonction

$$x \in [1, +\infty[\mapsto \frac{1 + ax}{1 + x} \ ?$$

b) Soient $n \geq 2, k \geq 2$ et $r \geq 1$ des entiers. On suppose que n admet r diviseurs premiers. Montrer que

$$d(n^k) \geq \left(\frac{1 + k}{2}\right)^r d(n).$$

a) Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et soit $f : x \in [1, +\infty[\mapsto \dfrac{1 + ax}{1 + x} \in \mathbb{R}$. La fonction f est dérivable sur $[1, +\infty[$ et

$$\forall x \in [1, +\infty[, \qquad f'(x) = \frac{a(1 + x) - (1 + ax)}{(1 + x)^2} = \frac{a - 1}{(1 + x)^2}.$$

Ainsi :

• Si $a < 1$, f est décroissante sur $[1, +\infty[$ et son image admet pour borne inférieure sa limite quand $x \longrightarrow +\infty$ c'est-à-dire a.

• Si $a > 1$, f est croissante sur $[1, +\infty[$ donc atteint son minimum en 1 qui vaut $\dfrac{1+a}{2}$.

b) Posons $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ la décomposition en facteurs premiers de n.

On a

$$d(n^k) = \prod_{i=1}^{r} (k\alpha_i + 1)$$

donc

$$\frac{d(n^k)}{d(n)} = \prod_{i=1}^{r} \left(\frac{k\alpha_i + 1}{\alpha_i + 1}\right) \geq \left(\frac{1+k}{2}\right)^r$$

ce qui conclut.

On notera que l'inégalité précédente est une égalité si et seulement si tous les α_i valent 1.

Exercice 530 (③) par Adrien Rezzouk [*]

Soit $E = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*;\ m^2 - 1 = 2^n\}$.

a) Montrer que, si $(m, n) \in E$, $m - 1$ et $m + 1$ sont de la formes 2^k avec $k \in \mathbb{N}$.

b) Déterminer E.

---

a) Si $(m, n) \in E$, alors $(m-1)(m+1) = 2^n$ donc $(m-1)$ et $(m+1)$ sont diviseurs associés de 2^n donc sont de la forme 2^k avec $k \in \mathbb{N}$.

b) On pose $(k, k') \in \mathbb{N}^2$, $k \leq k'$ tel que $m - 1 = 2^k$ et $m + 1 = 2^{k'}$. On procède par disjonction de cas en supposant $(m, n) \in E$:
Si $k = 0$, $m - 1 = 1$ et $m + 1 = 3$ donc $2^n = 3$ ce qui est absurde.
Si $k = 1$, $m - 1 = 2$ et $m + 1 = 4$ donc $2^n = 8$ c'est-à-dire $(m, n) = (3, 3)$. Réciproquement $(3, 3) \in E$.
Si $k \geq 2$, $m + 1 = (m-1) + 2 = 2^k + 2$ et $m + 1 = 2^{k'}$ donc $2^{k'-1} = 2^{k-1} + 1$ or $2^{k'-1}$ est pair et $2^{k-1} + 1$ est impair ce qui est absurde.
Ainsi, E est un singleton : $E = \{(3, 3)\}$.

Exercice 531 (④) par Adrien Rezzouk [*]

Soit $E = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*;\ 3^m - 1 = 2^n\}$

a) Montrer que, si $(m, n) \in E$ et $n \geq 3$, alors m est pair. On pourra utiliser une congruence avec un module bien choisi.

b) Déterminer E.

---

a) On étudie les congruences de 3^m modulo 8.
On a $3^0 \equiv 1\ [8]$, $3^1 \equiv 3\ [8]$, $3^2 \equiv 1\ [8]$.
Si m est pair, $m = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$. Alors $3^m \equiv (3^2)^k\ [8] \equiv 1\ [8]$.
Si m est impair, $3^m = 3 \times 3^{m-1}$ et $m - 1$ est impair, donc $3^m \equiv 3\ [8]$ et $3^m - 1 \equiv 2\ [8]$. En particulier, $3^m - 1$ n'est pas divisible par $8 = 2^3$, a fortiori par 2^n (car $n \geq 3$).
Par contraposée, si $(m, n) \in E$, $n \geq 3$, alors m est pair car 8 divise 2^n donc divise $3^m - 1$.

b) Soit $(m, n) \in E$ avec $n \geq 3$. La question a) entraîne que m est pair. On écrit $m = 2k$ où $k \in \mathbb{N}$. Il vient

$$\left(3^k\right)^2 - 1 = 2^n,$$

ce qui nous ramène à l'exercice précédent. Le couple solution doit satisfaire $3^k = 3$ et $n = 3$.
Réciproquement le couple $(m, n) = (2, 3)$ est solution.
Il reste à étudier le cas où $0 \leq n \leq 2$. Il n'y a pas de solution pour $n = 0$. Pour $n = 1$, l'équation s'écrit $3^m = 3$, soit $m = 1$. Il n'y a pas de solution pour $n = 2$.
Finalement, $E = \{(1, 1), (2, 3)\}$.

Exercice 532 (②) par Inasse [$*$]

Soient p un nombre premier, a et b deux éléments de $\mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$v_p(a+b) \geqslant \min(v_p(a),\, v_p(b)).$$

Si $v_p(a) \neq v_p(b)$, montrer que l'inégalité précédente est une égalité.

Notons $v_p(a) = m$ et $v_p(b) = n$.

Il existe donc deux éléments r et s de $\mathbb{N}^*$, non divisibles par p, tels que $a = p^m r$ et $b = p^n s$.
On suppose sans perte de généralité que $m \geqslant n$, on a alors :

$$a + b = p^n \left(p^{m-n} + s\right)$$

Si $m = n$, alors $a + b = p^m(r+s)$ donc $v_p(a+b) \geqslant \min(m,n)$ comme voulu.

Si $m > n$ alors $a + b = p^n \left(p^{m-n} + s\right)$ donc $v_p(a+b) = n$. En effet, si $v_p(a+b) > n$ on aurait $p \mid s$ ce qui est faux.

Exercice 533 (③) par Inasse [$*$]

Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n^2+n+1}$ est un nombre irrationnel. On pourra appliquer la remarque 7.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a : $n^2 < n^2+n+1 < (n+1)^2$, donc, n^2+n+1 n'est pas le carré d'un élément de $\mathbb{N}^*$. La remarque 7 entraîne alors que le nombre réel $\sqrt{n^2+n+1}$ est irrationnel.

Exercice 534 (③) par Mathieu Bizieux [$*$]

Soient $k \geq 2$ un entier, a et b deux éléments de $\mathbb{N}^*$ premiers entre eux, $c \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $ab = c^k$. Montrer qu'il existe a' et b' dans $\mathbb{N}^*$ tels que $a = (a')^k$ et $b = (b')^k$.

On décompose c en produit de nombres premiers distincts :

$$c = \prod_{i=1}^{\ell} p_i^{\alpha_i}, \qquad c^k = \prod_{i=1}^{\ell} p_i^{k\times\alpha_i}.$$

Soit $i \in \{1,\dots,\ell\}$. On a $v_{p_i}(ab) = v_{p_i}(a) + v_{p_i}(b) = k \times \alpha_i$. Comme a et b sont premiers entre eux, on a $v_{p_i}(a) = 0$ ou $v_{p_i}(b) = 0$. Ainsi k divise $v_{p_i}(a)$ et $v_{p_i}(b)$.

On conclut en utilisant la caractérisation des puissances k-ièmes.

Exercice 535 (④) par Mathieu Bizieux [$*$]

Soient $k \geq 2$ un entier, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que $n(n+1)$ n'est pas de la forme m^k avec $m \in \mathbb{N}^*$. On utilisera l'exercice précédent.
b) Montrer que $n(n+1)(n+2)$ n'est pas de la forme m^k avec $m \in \mathbb{N}^*$. On utilisera l'exercice précédent.

a) Puisque :

$$(n+1) \times 1 + (-1) \times n = 1,$$

la réciproque du théorème de Bézout entraîne que $n \wedge (n+1) = 1$.
Supposons que $n(n+1) = m^k$ avec $m \in \mathbb{N}^*$. L'exercice précédent entraîne qu'il existe deux éléments a et b de $\mathbb{N}^*$ tels que $n = a^k$ et $n+1 = b^k$. De plus

$$n < n+1 \quad \text{donc} \quad a^k < b^k \quad \text{i.e.} \quad a < b \quad \text{i.e.} \quad b \geq a+1.$$

Mais alors, en utilisant la formule du binôme :

$$b^k \geq (a+1)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^{k-i} = a^k + 1 + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i} a^{k-i} \quad \text{donc} \quad a^k + 1 \geq a^k + 1 + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i} a^{k-i}.$$

Comme $a \geq 1$ et $k-1 \in \mathbb{N}^*$, la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i} a^{k-i}$ est strictement positive. Il y a contradiction.

b) On écrit

$$n(n+2) = n^2 + 2n \quad \text{et} \quad (n^2 + 2n) \times (-1) + (n+1) \times (n+1) = 1.$$

La réciproque du théorème de Bezout entraîne que $n+1$ et $n(n+2)$ sont premiers entre eux. Supposons $n(n+1)(n+2) = m^k$ avec $m \in \mathbb{N}^*$. L'exercice précédent entraîne qu'il existe deux éléments a et b de $\mathbb{N}^*$ tels que $n(n+2) = a^k$ et $n+1 = b^k$. Mais alors $n(n+2) = a^k$ et $(n+1)^2 = (b^2)^k$ sont deux éléments de $\mathbb{N}^*$ consécutifs de $\mathbb{N}^*$ qui sont des puissances k-ièmes d'entiers. La fin du raisonnement fait en a) donne la contradiction désirée.

Exercice 536 (④) par Alexandre Camelin [∗]

Les triplets pythagoriciens sont les (x, y, z) de $\mathbb{N}^{*3}$ tels que

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Le triplet pythagoricien (x, y, z) est dit primitif si le seul diviseur commun de x, y et z dans $\mathbb{N}^*$ est 1. Exemple : $(3, 4, 5)$.

Le but de l'exercice est de décrire les triplets pythagoriciens.

a) Montrer que tout triplet pythagoriciens s'écrit (du, dv, dw) où $d \in \mathbb{N}^*$ et où (u, v, w) est un triplet pythagoricien primitif.

Dans les questions b) à d), (x, y, z) est un triplet pythagoricien primitif.

b) Montrer que x et y n'ont pas la même parité et que z est impair.

c) Montrer qu'il existe deux éléments u et v de $\mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que

$$z + x = 2u \text{ et } z - x = 2v.$$

d) Montrer qu'il existe r et s dans $\mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que $r > s$ et que

$$(x, y, z) = \left(r^2 - s^2,\ 2rs,\ r^2 + s^2\right).$$

e) Soient r et s deux éléments premiers entre eux de $\mathbb{N}^*$ tels que $r > s$ et que r ou s soit pair. Montrer que

$$(x, y, z) = (r^2 - s^2, 2rs, r^2 + s^2)$$

est un triplet pythagoricien primitif.

a) Soit (x, y, z) un triplet pythagoricien et d le plus grand entier de $\mathbb{N}^*$ tel que $d \mid x$, $d \mid y$ et $d \mid z$. On dispose de u, v, w dans $\mathbb{N}^*$ tels que :

$$x = du, \quad y = dv, \quad z = dw.$$

Comme (x, y, z) est un triplet pythagoricien, on a :
$x^2 + y^2 = z^2$ donc $d^2u^2 + d^2v^2 = d^2w^2$ et, puisque $d \neq 0$, $u^2 + v^2 = w^2$. Ainsi, (u, v, w) est un triplet pythagoricien. En outre, il n'existe aucun diviseur commun à u, v, w et strictement supérieur à 1 : dans le cas contraire, cela contredirait la maximalité de d.
On a bien trouvé $d \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$(x, y, z) = (du, dv, dw) \text{ où } (u, v, w) \text{ est un triplet pythagoricien primitif.}$$

b) Les entiers x et y ne sont pas tous deux impairs. En effet, si c'était le cas, on aurait

$$z^2 = x^2 + y^2 \equiv (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2_; [4] \equiv 2\ [4]$$

donc on aurait $1 = v_2(z^2) = 2v_2(z)$ avec $v_2(z) \in \mathbb{N}$ donc $2 \mid 1$ ce qui est absurde.

Supposons x et y pairs. Alors, $4 \mid x^2 + y^2 = z^2$, donc $2 \mid z$ et z est pair. Le triplet (x, y, z) n'est pas primitif, contradiction.
Ainsi, x et y sont de parités différentes, $z^2 = x^2+y^2$ est impair. Par suite, z est également impair.

c) On peut, quitte à échanger x et y, supposer que x est impair et y est pair. Comme z est impair et que $z > x$ (car $y \in \mathbb{N}^*$ et $z^2 = x^2 + y^2$) on a :

$$u = \frac{z+x}{2} \in \mathbb{N}^* \qquad \text{et} \qquad v = \frac{z-x}{2} \in \mathbb{N}^*.$$

Par l'absurde, supposons qu'il existe $p \in \mathbb{R}$ tel que $p \mid u$ et $p \mid v$. Alors :

$$p \mid (u+v) = z, \quad p \mid (u-v) = x$$

et, puisque p est premier,

$$p \mid (z^2 - x^2) = y^2$$

donc p divise y. Le triplet pythagoricien (x, y, z) n'est pas primitif, ce qui est absurde.
Finalement, u et v sont bien dans $\mathbb{N}^*$, premiers entre eux, tels que $z + x = 2u$ et $z - x = 2v$.

d) Le triplet (x, y, z) étant pythagoricien primitif, d'après la question précédente, il existe $u, v \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$u \wedge v = 1, \quad x = u - v, \quad z = u + v.$$

On a alors :

$$y^2 = z^2 - x^2 = 4uv \quad \text{donc} \quad \left(\frac{y}{2}\right)^2 = uv.$$

Comme $u \wedge v = 1$, u et v sont des carrés parfaits (exercice 534). Il existe donc $r \in \mathbb{N}^*$ et $s \in \mathbb{N}^*$ tels que $u = r^2$ et $v = s^2$. Comme $u \wedge v = 1$, on a $r \wedge s = 1$.
On a maintenant : $y = \sqrt{4uv} = 2rs$ et $(x, y, z) = (r^2 - s^2, 2rs, r^2 + s^2)$ avec $r \wedge s = 1$. C'est le résultat désiré.

e) D'abord,

$$(r^2 - s^2)^2 + (2rs)^2 = r^4 - 2(rs)^2 + s^4 + 4(rs)^2 = r^4 + 2(rs)^2 + s^4 = (r^2 + s^2)^2.$$

Le triplet $(r^2 - s^2, 2rs, r^2 = s^2)$ est pythagoricien.
Montrons que le triplet $(r^2-s^2, 2rs, r^2+s^2)$ est primitif. Le nombre r^2-s^2 est impair. Supposons, par l'absurde, qu'il existe un nombre premier p divisant $2rs$ et $r^2 - s^2$. Comme $p \neq 2$, $p \mid rs$ (lemme d'Euclide) et $p \mid (r^2 - s^2)$.
Toujours par le lemme d'Euclide, $p \mid rs$ entraîne que $p \mid r$ ou $p \mid s$.
Si $p \mid r$, comme $p \mid (r^2 - s^2)$, alors $p \mid s^2$ donc $p \mid s$, ce qui est absurde car $r \wedge s = 1$.
Si $p \mid s$, comme $p \mid (r^2 - s^2)$, alors $p \mid r^2$ donc $p \mid r$, ce qui est absurde car $r \wedge s = 1$.
Ainsi, $(2rs) \wedge (r^2 - s^2) = 1$. Le triplet $(r^2 - s^2, 2rs, r^2 + s^2)$ est bien primitif.

EXERCICE 537 (④) par Daniel Caby [*]

Un entier naturel $n \geq 2$ est parfait si la somme des diviseurs de n autres que n dans $\mathbb{N}^*$ est égale à n, autrement dit si la somme des diviseurs de n dans $\mathbb{N}^*$ est égale à $2n$.

a) Vérifier que 6 et 28 sont des nombres parfaits.
b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $p = 2^n - 1$ soit premier (i.e. un nombre de Mersenne, exercice 484). On pose $N = 2^{n-1}(2^n - 1)$. Montrer que N est parfait.

a) Les diviseurs de 6 dans $\mathbb{N}^*$ sont $1, 2, 3, 6$. Leur somme est 12, donc 6 est parfait.
De même, les diviseurs de 28 dans $\mathbb{N}^*$ sont $1, 2, 4, 7, 14, 28$. Leur somme est 56, donc 28 est parfait.

b) D'après la remarque 1 suivant le théorème 36, les diviseurs de N sont les $2^{\beta_1}(2^n-1)^{\beta_2}$ avec $\beta_1 \in [\![0, n-1]\!]$ et $\beta_2 \in \{0,1\}$. La somme S des diviseurs de N dans $\mathbb{N}$ vaut donc :

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i + \sum_{i=0}^{n-1}(2^n-1)2^i = 2^n \sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n(2^n-1)2N,$$

donc N est parfait.

EXERCICE 538 (⑤) par Daniel Caby [*]

Montrer que tout nombre parfait pair est de la forme décrite dans l'exercice précédent.

Soit N un nombre pair et parfait. On note $N = 2^n q$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$ est impair. Montrons que q est premier et vaut $2^{n+1}-1$.

Soient S la somme des diviseurs de N dans $\mathbb{N}$, S' la somme des diviseurs dans $\mathbb{N}$ de q. On a ainsi

$$S = \sum_{i=0}^{n} 2^i S' = (2^{n+1}-1)S' \quad \text{donc} \quad 2S' = q + \frac{S'}{2^n}.$$

Comme S' est un nombre entier, $\dfrac{S'}{2^n}$ l'est aussi. Il existe donc $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $S' = k2^n$.

De plus, si N est parfait, alors $(2^{n+1}-1)k2^n = 2^{n+1}q$, donc :

$$q = \frac{k}{2}(2^{n+1}-1)$$

Puisque q est entier et $2^{n+1}-1$ impair, l'entier k est pair. On écrit $k = 2k'$ avec $k' \in \mathbb{N}^*$. Il vient :

$$S' = k'2^{n+1}, \quad q = k'(2^{n+1}-1).$$

On remarque que $S' - q = k'$, ce qui entraîne que $k'|q$. D'autre part, $q = k'$ est exclu car, sinon on aurait $2^{n+1} = 2$ et $n = 0$, contredisant ainsi l'hypothèse $n \geq 1$ (c'est-à-dire la parité de N). Ainsi, k' et q sont deux diviseurs distincts de q et la somme des diviseurs de q est $q + k'$. Il s'ensuit que $k' = 1$ et que q est premier.

Par ailleurs, $q = (2^{n+1}-1)$; ainsi q est donc bien un nombre de Mersenne, ce qui montre que N est de la forme décrite dans l'exercice précédent.

EXERCICE 539 (③) par Daniel Caby [*]

a) Soient $m \in \mathbb{N}^*$, p un diviseur premier de m. Montrer que

$$v_p(m) \leq \frac{\ln(m)}{\ln(p)}.$$

b) Soient $r \in \mathbb{N}^*, p_1 < \ldots < p_r$ des nombres premiers, A l'ensemble des éléments de $\mathbb{N}^*$ dont les diviseurs premiers appartiennent à $\{p_1, \ldots, p_r\}$. Montrer que

$$|A \cap [\![1, n]\!]| \leq \prod_{i=1}^{r}\left(1 + \frac{\ln(n)}{\ln(p_i)}\right).$$

a) Puisque $p^{v_p(m)}$ divise m, on a

$$p^{v_p(m)} \leq m.$$

Donc :

$$v_p(m) \leq \log_p(m) \leq \frac{\ln(m)}{\ln(p).}$$

b) Soit $a \in A \cap [\![1, n]\!]$. D'après la question a), on sait que :

$$\forall i \in [\![1, r]\!], \qquad v_{p_i}(a) \leq \frac{\ln(a)}{\ln(p_i} \leq \frac{\ln(n)}{\ln(p_i}.$$

Par conséquent, il y a au plus $1 + \dfrac{\ln(n)}{\ln(p_i)}$ valeurs possibles pour chaque $v_{p_i}(a)$. L'élément a peut donc prendre au plus :

$$\prod_{i=1}^{r} \left(1 + \frac{\ln(n)}{\ln(p_i)} \right)$$

valeurs différentes.

EXERCICE 540 (⑤) par Daniel Caby

Soit P un polynôme non constant à coefficients dans $\mathbb{Z}$. En utilisant éventuellement l'exercice précédent, montrer que l'ensemble des nombres premiers p tels qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $P(n) \neq 0$ et $p|P(n)$ soit infini, ce qui généralise en un certain sens l'exercice 491.

$\star_1$ On démontre tout d'abord qu'il existe N dans $\mathbb{N}^*$ tel que tous les $P(n)$, avec n un entier $\geq N$, sont distincts et différents de 0.

La fonction polynomiale P change de sens de variation quand le polynôme dérivé P' vaut 0, donc un nombre fini de fois (majoré par $deg(P)-1$). De plus, P n'est pas constant, donc il existe $N' \in \mathbb{N}^*$ tel que la suite (u_n) de terme général $u_n = P(n)$ est strictement monotone à partir du rang N'.

De plus,

$$\lim_{n\to\infty} |P(n)| = \lim_{n\to\infty} |an^{deg(P)}| = +\infty \text{ où a est le coefficient dominant de } P.$$

Donc on a bien :

$$\exists N \in \mathbb{N}^*, \forall (a, b) \in \mathbb{N}^* / N \leq a < b, 0 < |P(a)| < |P(b)|$$

et on en tire le résultat.

On va maintenant raisonner par l'absurde. Supposons que l'ensemble des nombres premiers p tels qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $P(n) \neq 0$ et $p|P(n)$ soit fini. On note $p_1, \dots, p_r \quad r \in \mathbb{N}^*$ les éléments de cet ensemble. D'après $\star_1$, on a :

$$\forall p \in \mathcal{P} \setminus \{p_1, \dots, p_r\}, \forall n \geq N, p \nmid P(n).$$

$\star_2$ Donc, pour tout $n \geq N$, les diviseurs premiers de n appartiennent à $\{p_1, \dots, p_r\}$.

Donc, d'après l'exercice précédent, il y a

$$\prod_{i=1}^{r} \left(1 + \frac{\ln(n)}{\ln(p_i)} \right) \text{ valeurs possibles de P(n).}$$

On va chercher à prouver qu'à partir d'un certain point, il n'est plus possible d'exprimer tous les $P(n)$ à l'aide des facteurs $p_1, \dots, p_r$. Pour cela, on va étudier la limite de la suite (v_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{\prod_{i=1}^{r} \left(1 + \frac{\ln(n)}{\ln(p_i)} \right)}{n}$$

On remarque :

$$v_n = f(\ln(n)) \text{ avec } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \frac{\prod_{i=1}^{r} \left(1 + \frac{x}{\ln(p_i)} \right)}{e^x}$$

$\prod_{i=1}^{r} \left(1 + \frac{x}{\ln(p_i)} \right)$ est un polynôme de degré r, que l'on note $P'(x)$. Il peut s'écrire :

$$P'(x) = x^r \left(\sum_{i=0}^{r} \frac{a_i}{x^{r-i}} \right) \text{ avec } (a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{R}_+^r$$

$$\text{Donc } \lim_{x\to+\infty} \frac{P'(x)}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^r a_r}{e^x} = 0 \text{ par croissance comparée.}$$

De plus, $\lim_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$, donc par composée, $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Donc, d'après la définition de la limite :

$$\exists n \geq N, v_n < \frac{n-N}{n}$$

$$\iff \prod_{i=1}^{r} \left(1 + \frac{\ln(n)}{\ln(p_i)}\right) < n - N$$

Donc tous les entiers dans $[\![N, n]\!]$ ne peuvent pas s'écrire comme un produit de $p_1, \ldots, p_r$, ce qui contredit $\star_2$. Donc l'ensemble des nombres premiers p tels qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $P(n) \neq 0$ et $p|P(n)$ est infini.

12.7 Le petit théorème de Fermat

Exercice 541 (①) par Daniel Caby [*]

Soient p un nombre premier, $x \in \mathbb{Z}$, m et n deux entiers naturels tels que $m \equiv n\ [p-1]$. Montrer que $x^n \equiv x^m\ [p]$.

Si x est divisible par p, il en est de même de x^m et x^n et le résultat est vrai.

Supposons maintenant que p ne divise pas x. Quitte à échanger x et y, on peut également supposer que $m \geq n$. On dispose donc de $k \in \mathbb{N}$ tel que $m = n + k(p-1)$. Alors

$$x^m = x^n (x^{p-1})^k \equiv x^n\ [p].$$

Exercice 542 (②) par Mathieu Bizieux [*]

Quels sont les nombres premiers p tels que p divise $7^p + 8^p$?

Soit p un nombre premier tel que p divise $7^p + 8^p$. Alors $7^p + 8^p \equiv 0\ [p]$. Or, d'après le petit théorème de Fermat, :

$$7^p \equiv 7\ [p] \quad \text{et} \quad 8^p \equiv 8\ [p].$$

Ainsi,

$$7^p + 8^p \equiv 0\ [p] \quad \iff \quad 7 + 8 \equiv 0\ [p] \quad \iff \quad 15 \equiv 0\ [p] \quad \iff \quad p \mid 15.$$

Les solutions sont sonc les diviseurs premiers de 15, c'est-à-dire 3 et 5.

Exercice 543 (②) par Loïse Launay [*]

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $x^{11} \equiv x\ [33]$.

Soit $x \in \mathbb{Z}$. Nous voulons prouver que $x^{11} - x$ est divisible par 33. Comme la décomposition de 33 en facteurs premiers est $33 = 3 \times 11$, il suffit d'établir que prouver que $x^{11} - x$ est divisible par 3 et par 11.

Comme 11 est un nombre premier, le petit théorème de Fermat entraîne que :

$$x^{11} \equiv x\ [11] \quad \text{i.e.} \quad x^{11} - x \equiv 0\ [11] \quad \text{i.e.} \quad 11 \mid (x^{11} - x).$$

Modulo 3, on note d'abord que, si x est divisible par 3, il en est de même de x^3, donc de $x^3 - x$. Sinon, on a, par le petit théorème de Fermat (immédiat dans ce cas particulier) : $x^2 \equiv 1\ [3]$. En élevant cette congruence à la puissance 5, il vient $x^{10} \equiv 1\ [3]$. En multipliant cette nouvelle congruence par x, on a finalement $x^{11} \equiv x\ [3]$. C'est dire que 3 divise $x^{11} - x$.

EXERCICE 544 (③) par Paul Perrier [*]

a) Décomposer 2730 en facteurs premiers.

b) Montrer que, pour tout nombre premier divisant 2730, $p-1$ divise 12.

c) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a $x^{13} \equiv x \pmod{2730}$.

a) La décomposition est : $2730 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13$.

b) Pour $p \in \{2,3,5,7,13\}, p-1 \in \{1,2,4,6,12\}$. Tous ces nombres divisent bien 12.

c) Soit $x \in \mathbb{Z}$. Il suffit de montrer que, pour chaque diviseur premier p de 2730, $x^{13} \equiv x$ $[p]$. En effet, si tel est le cas, $x^{13}-x$ est divisible par le produit des diviseurs premiers de 2730, donc par 2730.
Soit p un diviseur premier de 2730. Si $p \mid x$, $p \mid x^{13}$ donc $p \mid (x^{13}-x)$. Sinon, $x^{p-1} \equiv 1$ $[p]$. Puisque $p-1$ divise 12, on en déduit, par élévation de la congruence à une puissance convenable, que $x^{12} \equiv 1$ $[p]$, donc, par multiplication par x, que $x^{13} \equiv x$ $[p]$.

EXERCICE 545 (③) par Paul Perrier[*]

a) Décomposer $n = 561$ en produits de facteurs premiers et vérifier que, pour tout diviseur premier p de n, $p-1$ divise $n-1$

b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{Z}$,
$$x^{561} \equiv x \ [561].$$

c) Plus généralement, soient $r \geqslant 2$ un entier, $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$ des nombres premiers et $n = \prod_{i=1}^{r} p_i$. On suppose que, pour tout $i \in \{1,...,r\}$, $p_i - 1$ divise $n-1$. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{Z}, \quad x^n \equiv x \ [n].$$

a) La décomposition est $561 = 3 \times 11 \times 17$. Pour $p \in \{3,11,17\}$, on a $p-1 \in \{2,10,16\}$. Ces trois nombres divisent bien 560.

b) La démonstration, laissée au lecteur, est exactement la même que dans l'exercice précédent.

c) La démonstration de cette généralisation est exactement la même que celle de l'exercice précédent. Soit $x \in \mathbb{Z}$. Il suffit de montrer que, pour tout $i \in \{1,\ldots,r\}$, p_i divise $x^n - x$. Fixons i. Si p_i divise x, p_i divise aussi x^n donc $x^n - x$. Sinon, $x^{p_i-1} \equiv 1$ $[x]$ par le petit théorème de Fermat, d'où, puisque $p_i - 1$ divise $n-1$, $x^{n-1} \equiv 1$ $[p_i]$ en élevant la congruence à une puissance convenable, et enfin $x^n \equiv x$ $[p_i]$ après multiplication par x.

EXERCICE 546 (③) par Paul Perrier

En utilisant éventuellement le théorème 38, montrer que, si p est un nombre premier et $k \in \{0,...,p-1\}$, $\binom{p-1}{k} \equiv (-1)^k \pmod{p}$

Face à un tel exercice (avec des coefficients binomiaux modulo p) il faut directement penser au théorème 38. Avec celui-ci et la relation de Pascal, une simple récurrence permet de résoudre l'exercice, à première vue difficile (utiliser la formule explicite des coefficients binomiaux serait une horreur).

Procédons par récurrence sur k :

Pour $k \in \{0,...,p-1\}$, soit la propriété $P(k)$:
$$\binom{p-1}{k} \equiv (-1)^k \ [p].$$

Initialisation. Pour $k = 0$, on a $\dbinom{p-1}{0} = 1 \equiv 1\ [p]$.

Ainsi, $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons que, pour un certain $k \in \{0, ..., p-2\}$, on ait $\dbinom{p-1}{k} \equiv (-1)^k\ [p]$. Avec la relation de Pascal, on sait que

$$\binom{p-1}{k} + \binom{p-1}{k+1} = \binom{p}{k+1}.$$

Or d'après le théorème 38 : $\dbinom{p}{k+1} \equiv 0\ [p]$. Ainsi, $\dbinom{p-1}{k} \equiv -\dbinom{p-1}{k+1}\ [p]$. Donc, puisque par hypothèse, $\dbinom{p-1}{k} \equiv (-1)^k\ [p]$, on a : $-\dbinom{p-1}{k+1} \equiv (-1)^k\ [p]$ d'où $-\dbinom{p-1}{k+1} \equiv (-1)^{k+1}\ [p]$.

Ainsi, si $P(k)$ est vraie, alors $P(k+1)$ l'est aussi

Conclusion. D'après le principe de récurrence, $\forall k \in \{0, ..., p-1\}, P(k)$ est vraie.

Exercice 547 (④) par Daniel Caby [$*$]

Soit p un nombre premier. Si $x \in \mathbb{Z}$, on dit que x est un carré modulo p s'il existe $y \in \mathbb{Z}$ tel que $x \equiv y^2\ [p]$.

a) Vérifier que tout $x \in \mathbb{Z}$ est un carré modulo 2.

b) Quels sont les $x \in \mathbb{Z}$ qui sont des carrés modulo 3 ? 5 ? 7 ?

c) On suppose que $x \in \mathbb{Z}$ n'est pas divisible par p est un carré modulo p. Montrer que $x^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1[p]$.

d) On suppose que $p \equiv 3\ [4]$. Montrer que -1 n'est pas un carré modulo p.

e) On suppose que $p \equiv 1\ [4]$. En utilisant le théorème de Wilson (exercice 511), montrer que -1 est un carré modulo p.

a) Soit $x \in \mathbb{Z}$. D'après le petit théorème de Fermat, $x \equiv x^2\ [2]$

b) On a

$x \equiv \ldots [3]$	$x^2 \equiv \ldots [3]$
0	0
1	1
2	1

Donc les $x \in \mathbb{Z}$ qui sont des carrés modulo 3 sont les x congrus à 0 ou 1 modulo 3.

$x \equiv \ldots [5]$	$x^2 \equiv \ldots [5]$
0	0
1	1
2	4
3	4
4	1

Donc les $x \in \mathbb{Z}$ qui sont des carrés modulo 5 sont les x congrus à 0, 1 ou 4 modulo 5.

$x \equiv \ldots [7]$	$x^2 \equiv \ldots [7]$
0	0
1	1
2	4
3	2
4	2
5	4
6	1

Donc les $x \in \mathbb{Z}$ qui sont des carrés modulo 7 sont les x congrus à 0, 1, 2 ou 4 modulo 7.

c) Soit y un entier relatif tel que $x \equiv y^2$ $[p]$. On a donc :

$$x^{\frac{p-1}{2}} \equiv y^{p-1}\ [p].$$

Or $p \nmid x$, donc $p \nmid y^2$ et $p \nmid y$. D'après le petit théorème de Fermat, $y^{p-1} \equiv 1$ $[p]$, d'où on tire le résultat.

d) On raisonne par l'absurde. Supposons que -1 est un carré modulo p. On a alors $y \in \mathbb{Z}$ tel que

$$y^2 \equiv -1\ [p] \quad \text{d'où} \quad y^{p-1} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}}\ [p].$$

Or $\frac{p-1}{2} \equiv 1[2]$ car $p \equiv 3[4]$. Donc :

$$y^{p-1} \equiv -1\ [p].$$

Cependant $p \nmid y$ donc, d'après le petit théorème de Fermat, $y^{p-1} \equiv 1$ $[p]$. Donc $-1 \equiv 1$ $[p]$. Donc $p = 2$, ce qui contredit l'hypothèse $p \equiv 3[4]$.

e) D'après le théorème de Wilson,

$$\begin{aligned} -1 &\equiv (p-1)!\ [p] \\ &\equiv 1 \times 2 \times \ldots \times \frac{p-1}{2} \times \frac{-p+1}{2} \times \ldots \times (-2) \times (-1)\ [p] \\ &\equiv \left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right)^2 (-1)^{\frac{p-1}{2}}\ [p] \\ &\equiv \left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right)^2 [p] \qquad \text{car } \frac{p-1}{2} \equiv 0\ [2] \end{aligned}$$

ce qui prouve que -1 est un carré modulo p.

Exercice 548 (④) par Daniel Caby [*]

Soient $n \geq 2$ un entier, p un diviseur premier de $(n!)^2 + 1$.

a) Montrer, en utilisant la question d) de l'exercice précédent, que $p \equiv 1$ $[4]$.

b) Montrer que $p > n$.

c) Conclure que l'ensemble des nombres premiers congrus à 1 modulo 4 est infini.

a) On a : $(n!)^2 + 1 \equiv 0$ $[p]$ donc -1 est un carré modulo p. Donc, d'après l'exercice précédent, $p \equiv 1$ $[4]$.

b) On raisonne par l'absurde. Supposons que $p \leq n$. Donc $p \mid (n!)^2$ et, par combinaison linéaire, p divise 1, ce qui est absurde car p est un nombre premier.

c) On note E l'ensemble des nombres premiers congrus à 1 modulo 4.
Pour tout entier $n \geq 2$, $(n!)^2 + 1$ admet nécessairement au moins un diviseur premier. Donc :

$$\forall n \geq 2, \quad \exists p \in E, \quad p > n.$$

On peut désormais raisonner par l'absurde. Supposons que l'ensemble E est fini. Comme partie finie non vide de $\mathbb{N}$, E admet un plus grand élément que l'on note a. D'après la proposition précédente, il existe $p \in E$ avec $p > a$, ce qui est absurde. Donc l'ensemble E est infini.

Exercice 549 (④) par Adrien Rezzouk

Soient p un nombre premier, P le polynôme défini par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = \prod_{j=1}^{p-1}(x+j)$$

Le polynôme P est de degré $p-1$, unitaire, à coefficients entiers. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = x^{p-1} + \sum_{i=0}^{p-2} a_i x^i.$$

a) On se propose de démontrer qu'il existe un polynôme Q à coefficients entiers divisibles par p tel que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = x^{p-1} - 1 + Q(x).$$
Montrer que ce résultat entraîne le petit théorème de Fermat et le théorème de Wilson (exercice 511 de **12.4**).

b) Vérifier que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad (x+1)P(x+1) = (x+p)P(x).$$

c) En déduire, en raisonnant par récurrence sur i, que
$$\forall i \in \{2, \ldots, p-1\}, \quad p \mid a_{p-i}.$$

d) En déduire également, par examen des coefficients constants, que
$$1 + \sum_{j=0}^{p-2} a_j = p\, a_0.$$

e) Conclure.

a) On suppose qu'il existe Q à coefficients entiers divisibles par p tel que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = x^{p-1} - 1 + Q(x).$$
On a alors, pour tout $x \in \mathbb{Z}$,
$$x(P(x) - Q(x)) = x^p - x$$
Démontrer le petit théorème de Fermat revient alors à montrer que, pour tout $x \in \mathbb{Z}$, p divise $x(P(x) - Q(x))$.
Soit $x \in \mathbb{Z}$. Alors $P(x)$ et $Q(x)$ sont dans $\mathbb{Z}$. Si p divise x, alors p divise bien $x(P(x) - Q(x))$.
On écrit la division euclidienne de x par p :
$$x = p \times q + r, \quad q \in \mathbb{Z}, \quad 1 \leq r \leq p-1.$$
On a $1 \leq p - r \leq p - 1$ et $x + (p - r) = (p+1) \times q$. Ainsi, p divise $x + p - r$ et $(x + p - r)$ intervient dans la forme factorisée de $P(x)$. Par transitivité, p divise $P(x)$.

Par ailleurs, p divise $Q(x)$ car on peut factoriser tous les coefficients de Q par p. Par combinaison linéaire, p divise $P(x) - Q(x)$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{Z}$, p divise $x(P(x) - Q(x))$ donc $x^p \equiv x$ $[p]$.

On veut à présent montrer que, si p est premier $(p-1)! \equiv -1$ $[p]$.
On a $P(0) = (p-1)!$. Par hypothèse, on a $P(0) = 0^{p-1} - 1 + Q(0) = -1 + p \times k$ où $k \in \mathbb{Z}$ car Q(0) divisible par p.
On a donc bien $(p-1)! \equiv -1$ $[p]$.

b) Pour tout réel x,
$$(x+1)P(x) = (x+1)\left(\prod_{k=1}^{p-1}(x+1+k)\right) = \prod_{k=1}^{p}(x+k) = (x+p)P(x).$$

c) On pose A tel que, pour tout réel x, $A(x) = (x+1)P(x+1)$ et B tel que, pour tout réel x, $B(x) = (x+p)P(x)$.
Alors A et B sont deux polynômes égaux donc on peut exploiter les égalités entre leurs coefficients. Pour ce faire, on exprime A et B sous leur forme développée. On pose $a_{p-1} = 1$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \; A(x) = (x+1)\sum_{i=0}^{p-1} a_i (x+1)^i = \sum_{i=0}^{p-1} a_i (x+1)^{i+1}.$$

Or, avec la formule du binôme de Newton, on a

$$(x+1)^{i+1} = \sum_{j=0}^{i+1} \binom{i+1}{j} x^j = \sum_{j=0}^{i} \binom{i+1}{j} x^j + x^{i+1},$$

donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ A(x) = \sum_{i=0}^{p-1} \left[a_i \left(\sum_{j=0}^{i} \binom{i+1}{j} x^j \right) + a_i \cdot x^{i+1} \right] = \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{i} a_i \binom{i+1}{j} x^j + \sum_{i=0}^{p-1} a_i x^{i+1}.$$

On pose $u_{i,j} = \binom{i+1}{j} a_i x^j$. On a :

$$\sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{i} u_{i,j} = \sum_{0 \leq j \leq i \leq p-1} u_{i,j} = \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{i=j}^{p-1} u_{i,j}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad A(x) = \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{i=j}^{p-1} \binom{i+1}{j} a_i x^j + \sum_{i=1}^{p} a_{i-1} x^i = \sum_{j=0}^{p-1} \left[x^j \cdot \sum_{i=j}^{p-1} \left(\binom{i+1}{j} a_i \right) \right] + \sum_{i=1}^{p} a_{i-1} x^i.$$

Enfin, on peut exprimer A sous forme développée :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad A(x) = \sum_{j=1}^{p-1} \left[x^j \cdot \left(\left(\sum_{i=j}^{p-1} \binom{i+1}{j} a_i \right) + a_{i-1} \right) \right] + \sum_{i=0}^{p-1} a_i + a_{p-1} x^p.$$

On exprime à présent B sous sa forme développée :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad B(x) = (x+p) \sum_{i=0}^{p-1} (a_i x^i) = \sum_{i=0}^{p-1} (a_i x^{i+1}) + \sum_{i=0}^{p-1} (a_i p x^i) = \sum_{i=1}^{p} (a_{i-1} x^i) + \sum_{i=1}^{p-1} (a_i p x^i) + p a_0,$$

$$B(x) = \sum_{i=1}^{p-1} \left[(a_{i-1} + a_i p) \cdot x^i \right] + a_{p-1} x^p + p a_0.$$

Pour tout réel x, $A(x) = B(x)$ donc par unicité de l'écriture d'un polynôme (théorème 16), les coefficients de la forme développée de A et de B sont égaux (pour un monôme de même degré). Ainsi, pour tout $1 \leq j \leq p-1$,

$$\sum_{i=j}^{p-1} \left(\binom{i+1}{j} a_i \right) + a_{i-1} = a_{i-1} + a_i p \Longleftrightarrow \sum_{i=j}^{p-2} \left(\binom{i+1}{j} a_i \right) + \binom{p}{j} = a_j p.$$

Pour tout $1 \leq j \leq p-1$, p divise donc

$$\sum_{i=j}^{p-2} \left(\binom{i+1}{j} a_i \right) + \binom{p}{j}.$$

Par ailleurs, p divise $\binom{p}{j}$ (théorème 38) donc p divise

$$\sum_{i=j}^{p-2} \left(\binom{i+1}{j} a_i \right).$$

On procède par récurrence forte sur j pour montrer que p divise a_{p-j}.
On pose R_j la proposition : « p divise a_{p-j} ».
Initialisation. Pour $j = 2$, p divise $\binom{p-1}{p-2} a_{p-2} = (p-1) a_p$ et p est premier avec $(p-1)$ donc d'après le lemme de Gauss p divise a_{p-2}. R_2 est donc vérifié.

Hérédité. Soit $p \geq 3$ On suppose R_j vraie pour tout $2 \leq j \leq n \leq p-1$. Alors p divise $\sum\limits_{i=p-n-1}^{p-2} \left(\binom{i+1}{p-n-1} a_i \right)$ et par hypothèse de récurrence, p divise $\sum\limits_{i=p-n}^{p-2} \left(\binom{i+1}{p-n-1} a_i \right)$.

Ainsi, p divise $\binom{p-n-1}{p-n} a_{p-n-1} = (p-n-1)a_{p-n-1}$ et p premier avec $p-n-1$ donc, d'après le lemme de Gauss, p divise bien a_{p-n-1}. On a $R_n \Longrightarrow R_{n+1}$ donc d'après le principe de récurrence, pour tout $2 \leq k \leq p-1$, p divise a_{p-k}.

d) Le terme constant de A est $\sum\limits_{i=0}^{p-1} a_i$ (où $a_{p-1} = 1$), le terme constant de B est pa_0. On a donc bien $\sum\limits_{i=0}^{p-2} a_i + 1 = pa_0$. Ainsi, $a_0 + 1 = pa_0 - \sum\limits_{i=1}^{p-2} a_i$. Ainsi p divise $a_0 + 1$

e) On pose Q tel que, pour tout réel x,

$$Q(x) = P(x) - x^{p-1} + 1 = \sum_{i=0}^{p-2} a_i x^i + 1.$$

Pour tout $1 \leq i \leq p-2$, p divise a_i et p divise a_0+1 donc Q est bien un polynôme à coefficients entiers divisibles par p.

EXERCICE 550 (④) par Daniel Caby [*]

Soient p un nombre premier, $x \in \mathbb{Z}$ non divisible par p.

a) Montrer que l'application qui à $a \in \{1, \ldots, p-1\}$ associe le reste $r(a)$ de la division euclidienne de ax par p est une bijection de $\{1, \ldots, p-1\}$ sur lui-même.

b) En faisant le produit des congruences $ax \equiv r(a)$ $[p]$ pour $a \in \{1, \ldots, p-1\}$, retrouver le théorème 37.

a) Montrons d'abord que l'application r arrive dans $[\![1, p-1]\!]$. Soit $a \in [\![1, p-1]\!]$. Alors a et x ne sont pas divisibles par p ; il en est donc de même de leur produit ax (lemme d'Euclide), donc $r(a) \in [\![1, p-1]\!]$.

Montrons maintenant que les $r(a)$ sont distincts. On suppose que a et a' sont dans $[\![1, p-1]\!]$ et vérifient $r(a) = r(a')$. Il existe donc deux entiers k et k' tels que

$$ax = kp + r(a) \quad \text{et} \quad a'x = k'p + r(a') = k'p + r(a).$$

Alors $x(a-a') = p(k-k')$ est divisible par p. Comme p est premier et ne divise pas a, c'est que p divise $a - a'$ (lemme d'Euclide). Vu que a et a' sont dans $[\![1, p-1]\!]$, $|a - a'| \leq p-1$. Donc $a - a' = 0$ et $a = a'$. On en déduit que les $r(a)$ sont distincts.

L'application r est donc injective : tout élément de l'ensemble d'arrivée admet au plus antécédent par r. L'ensemble d'arrivée ayant le même nombre d'éléments que l'ensemble de départ, il s'ensuit que chaque élément de l'ensemble d'arrivée admet un antécédent, donc que r est bijective.

b) En faisant le produit des congruences, on obtient :

$$(p-1)!\, x^{p-1} \equiv (p-1)!\ [p].$$

Autrement dit, p divise $(p-1)!(x^{p-1}-1)$. Mais p est premier, donc premier à chaque entier de $[\![1, p-1]\!]$, donc à leur produit. Il s'ensuit que p divise $x^{p-1} - 1$, i.e. que

$$x^{p-1} \equiv 1\ [p].$$

(Notons que, moins économiquement, on peut utiliser dans cette fin d'argument le théorème de Wilson, qui donne la classe de congruence de $(p-1)!$ modulo p ; mais on n'a réellement besoin que de l'inversibilité de $(p-1)!$ modulo p, comme ci-dessus.)

Exercice 551 (④) par Daniel Caby [*]

Soit $a \geq 2$ un entier. On se propose de montrer qu'il y a une infinité d'entiers n non premiers tels que $a^{n-1} \equiv 1$ $[n]$. Dans les questions a) et b), p est un nombre premier ne divisant pas $a(a^2-1)$. On pose :

$$n_p = \frac{a^{2p}-1}{a^2-1}.$$

a) Vérifier les congruences : $a^{2p} \equiv 1$ $[n_p]$, $n_p \equiv 1$ $[2p]$ et $a^{n_p-1} \equiv 1$ $[n_p]$.

b) Montrer que n_p n'est pas premier, et conclure.

a) On a :

$$n_p(a^2-1) = a^{2p}-1.$$

D'où :

$$a^{2p} \equiv 1[n_p]. \quad \star_1$$

Démontrons la deuxième congruence : $n_p \equiv 1$ $[2p]$ $\quad \star_2$
D'après le petit théorème de Fermat, $a^p \equiv a$ $[p]$. Donc $a^{2p}-1 \equiv a^2-1$ $[p]$. Donc :

$$(a^2-1)n_p \equiv (a^2-1) \ [p].$$

Donc p divise $(a^2-1)(n_p-1)$.
Or $p \nmid a(a^2-1)$ donc $p \nmid (a^2-1)$. Donc p et a^2-1 sont premiers entre eux. On peut donc appliquer le lemme de Gauss : $p|(n_p-1)$.
Ainsi, $n_p \equiv 1$ $[p]$. Pour établir $\star_2$, il reste donc à montrer que $n_p \equiv 1$ $[2]$. On note que

$$n_p = \sum_{k=0}^{p-1} a^{2k} \quad \text{donc} \quad n_p - 1 = \sum_{k=1}^{p-1} a^{2k}.$$

Ainsi n_p-1 est la somme de $p-1$ termes de même parité. Il suffit donc de démontrer que $p-1$ est pair, i.e. que $p \neq 2$ (car p est premier).
On note alors que $(a^2-1)a = (a-1)a(a+1)$ est pair (divisible par le produit de deux entiers consécutifs). Donc $p \neq 2$, donc p est impair. La congruence $\star_2$ est établie.

La troisième congruence suit facilement. D'après $\star_2$, n_p-1 s'écrit $2pk$ avec $\in \mathbb{N}$.
Donc $a^{n_p-1} = \left(a^{2p}\right)^k$. Or, d'après $\star_1$:

$$\left(a^{2p}\right)^k \equiv 1^k \equiv 1 \ [n_p].$$

b) On écrit

$$n_p = \frac{a^{p-1}-1}{a-1} \times \frac{a^p+1}{a+1}.$$

Les deux facteurs sont entiers (exercice 461) et différents de 1 (car $a^{p-1} > a$ vu que $a \geq 2$ et $p \geq 2$). Donc n_p n'est pas premier.
Il existe une infinité de nombre premiers et l'application

$$x \in [1, +\infty[\longmapsto \frac{a^{2x}-1}{a^2-1}$$

est strictement croissante. Par conséquent, pour tout entier $a \geq 2$, il existe une infinité de n_p non premiers vérifiant $a^{n_p-1} \equiv 1$ $[n_p]$.

Exercice 552 (⑤) par Mathieu Bizieux[*]

Soient $p \in \mathcal{P} \backslash \{2\}, x$ et y deux entiers relatifs. On suppose que p divise $y-x$, mais pas x (et donc pas y). Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad v_p(x^n - y^n) = v_p(x-y) + v_p(n).$$

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$ la propriété suivante : pour tout $p \in \mathcal{P}\backslash\{2\}$, tout $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$v_p(x^n - y^n) = v_p(x - y) + v_p(n). \tag{1}$$

La propriété $\mathcal{P}_1$ est triviale. Nous allons tout d'abord établir $\mathcal{P}_n$ si n est premier.

Nous savons que :

$$v_p(x^n - y^n) = v_p\left((x - y)\left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}\right)\right).$$

De plus,

$$v_p\left((x - y)\left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}\right)\right) = v_p(x - y) + v_p\left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}\right).$$

Or on sait que :

$$p \mid (y - x) \quad \Leftrightarrow \quad y - x \equiv 0[p].$$

Conséquemment :

$$y \equiv x\ [p],$$

donc :

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k} \equiv \sum_{k=0}^{n-1} x^k x^{n-1-k}\ [p] \equiv \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1}\ [p].$$

De ce fait :

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k} \equiv n x^{n-1}\ [p].$$

Raisonnons désormais par disjonction de cas, avec p et n premiers :

• *Cas où* $p \neq n$

Nous savons que $p \nmid x$, et $p \nmid n$ alors :

$$n x^{n-1} \not\equiv 0\ [p] \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k} \not\equiv 0[p],$$

d'où :

$$v_p\left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}\right) = 0 = v_p(n).$$

• *Cas où* $p = n$.

Nous avons alors :

$$\sum_{k=0}^{p-1} x^k y^{p-1-k} \equiv p x^{p-1}\ [p] \equiv 0\ [p].$$

De plus, $p \mid (y - x)$, donc on dispose de $q \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$x = y + qp.$$

De ce fait,

$$x^k y^{p-1-k} \equiv (y + qp)^k y^{p-1-k}\ [p^2].$$

Or, d'après le binome de Newton,

$$(y + qp)^k y^{p-1-k} \equiv y^{p-1-k}\left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (qp)^i y^{k-i}\right)\ [p^2].$$

D'où :

$$x^k y^{p-1-k} \equiv y^{p-1-k}\left(y^k + kqpy^{k-1} + \sum_{i=2}^{k} \binom{k}{i} (qp)^i y^{k-i}\right)\ [p^2].$$

De ce fait,

$$x^k y^{p-1-k} \equiv y^{p-1} + kqpy^{p-2}\ [p^2].$$

Ce qui signifie que :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{p-1} x^k y^{p-1-k} &\equiv \sum_{k=0}^{p-1} (y^{p-1} + kqpy^{p-2}) \ [p^2].\\ &\equiv py^{p-1} + \frac{p-1}{2} qp^2 y^{p-2} \ [p^2].\\ &\equiv py^{p-1} \ [p^2]\end{aligned}$$

($\dfrac{p-1}{2}$ est entier car $p \in \mathcal{P}\backslash\{2\}$ donc impair).

Or $p \nmid y$, ainsi :

$$\sum_{k=0}^{p-1} x^k y^{p-1-k} \not\equiv 0 \ [p^2].$$

Et on rappelle que :

$$\sum_{k=0}^{p-1} x^k y^{p-1-k} \equiv 0 \ [p].$$

On peut donc en déduire que, pour $n = p$:

$$v_p\left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}\right) = 1 = v_p(n).$$

La propriété $\mathcal{P}_n$ est ainsi démontrée pour tout n premier. Il est maintenant facile de démontrer par récurrence que $\mathcal{P}_n$ est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

Initialisation. La propriété $\mathcal{P}_1$ est triviale, on l'a déjà dit.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n)$ soient vraies.

• Si $n+1$ est premier, on sait que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

• Sinon, soient a et b deux éléments de $\{2, \ldots, n\}$ tels que $n+1 = ab$. Alors :

$$\begin{aligned}v_p(x^{ab} - y^{ab}) &= v_p((x^a)^b - (y^a)^b)\\ &= v_p(x^a - y^a) + v_p(b)\\ &= v_p(x-y) + v_p(b) + v_p(a)\\ &= v_p(x-y) + v_p(ab)\\ &= v_p(x-y) + v_p(n+1)\end{aligned}$$

La propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est démontrée, ce qui achève la démonstration.

12.8 Complément : le théorème des restes chinois

Exercice 553 (①) par Léo Baciocchi [*]

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système suivant : $x \equiv 3 \ [7]$, $x \equiv 8 \ [13]$.

Puisque 7 et 13 sont premiers entre eux, le théorème des restes chinois nous assure qu'il existe $w \in \mathbb{Z}$ (unique modulo 91) tel que

$$x \equiv 3 \ [7], \quad x \equiv 8 \ [13] \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \equiv w \ [91].$$

Il ne nous reste plus qu'à trouver ce w, ce que l'on peut faire facilement à partir de la démonstration du théorème des restes chinois. On reprend les notations de l'énoncé du théorème.

On cherche $w = u + ra = v + sb$, avec $u = 3, a = 7, v = 8, b = 13$.

On cherche maintenant r' et s' tels que $7r' - 13s' = 1$, et on trouve aisément que $r' = 2$ et $s' = 1$ conviennent.

On a par conséquent $r = (8-3) \cdot 2 = 10$, et donc, $w = 3 + 10 \cdot 7 = 73$.

En définitive, l'ensemble des solutions à ce système est l'ensemble des x tels que $x \equiv 73$ [91], c'est-à-dire des x de la forme :

$$x = 91k + 73, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 554 (①) par Léo Baciocchi [*]

Montrer que le système $x \equiv 1$ [4], $x \equiv 2$ [6] n'a pas de solution.

Il suffit de constater que, si x est une solution $x = 4k+1$ avec $k \in \mathbb{Z}$ nous indique que x est impair, alors que $x = 6k' + 2 = 2(3k'+1)$ avec $k' \in \mathbb{Z}$ entraîne que x est pair, ce qui est une contradiction.

Exercice 555 (①) par Léo Baciocchi [*]

Pour $x \in \mathbb{Z}$, montrer que :

$$(x \equiv 2\ [4], \quad x \equiv 4\ [6]) \quad \Longleftrightarrow \quad x \equiv 10\ [12].$$

On notera que x est pair ; posant $x = 2y$, on se ramènera à un système de deux congruences modulo 2 et 3

Soit $x \in \mathbb{Z}$. Si x est congru à 2 modulo 4, x est pair. Posons donc $x = 2y$, avec $y \in \mathbb{Z}$. On a

$$x \equiv 2\ [4] \quad \Leftrightarrow \quad y \equiv 1\ [2],$$
$$x \equiv 4\ [6] \quad \Leftrightarrow \quad y \equiv 2\ [3].$$

Puisque 2 et 3 sont premiers entre eux, d'après le théorème des restes chinois, il existe w tel que le système soit équivalent à $y \equiv w$ [6]. En appliquant la méthode vue dans l'exercice **553**, on trouve $w = 5$.

Ainsi,

$$(x \equiv 2\ [4], \quad x \equiv 4\ [6]) \quad \Longleftrightarrow \quad y \equiv 5\ [6] \quad \Longleftrightarrow \quad x \equiv 10\ [12],$$

la vérification de la dernière équivalence étant laissée au lecteur, qui reviendra aux définitions.

Exercice 556 (②) par Daniel Caby [*]

a) Déterminer les $n \in \mathbb{N}$ tels que 5 divise $2^n - 3$.
b) Déterminer les $n \in \mathbb{N}$ tels que 13 divise $2^n - 3$.
c) Déterminer les $n \in \mathbb{N}$ tels que 65 divise $2^n - 3$.

a) On étudie les congruences de 2^n modulo 5. Pour cela, on utilise une méthode exploratoire pour déterminer un a dans $\mathbb{N}^*$ tel que $2^a \equiv 1[5]$.

n	0	1	2	3	4
$2^n \equiv \ldots [5]$	1	2	4	3	1

On a $2^4 \equiv 1[5]$. On considère donc la division euclidienne de n par 4 : $n = 4q + r$ avec $q \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0, 1, 2, 3\}$. On a

$$2^n = 2^{4q+r} = \left(2^4\right)^q 2^r \equiv 1^q 2^r\ [5] \equiv 2^r\ [5]$$

Donc $5 \mid (2^n - 3) \iff n \equiv 3\ [4]$.

b) On utilise la même méthode que précédemment :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$2^n \equiv \ldots [5]$	1	2	4	8	3	6	12	11	9	5	10	7	1

Donc, de même, $13 \mid (2^n - 3) \iff n \equiv 4[12]$.

c) Comme 5 et 13 sont premiers entre eux et que $5 \times 13 = 65$, on peut utiliser le théorème des restes chinois :

$$2^n \equiv 3\ [65] \iff \left\{\begin{array}{lcl} 2^n & \equiv & 3\ [5] \\ 2^n & \equiv & 3\ [13] \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} n & \equiv & 3[4] \\ n & \equiv & 4[12] \end{array}\right.$$

ce qui est absurde. Donc il n'existe pas de $n \in \mathbb{N}$ tels que 65 divise $2^n - 3$.

EXERCICE 557 (④) par Adrien Rezzouk[∗]

Généraliser les exercices 554 et 555 en résolvant, si a et b sont deux éléments de $\mathbb{N}^*$ et si (u, v) appartient à $\mathbb{Z}^2$, le système de congruences $x \equiv u[a]$ et $x \equiv v[b]$.

Le nombre entier x est solution si et seulement s'il existe un couple d'entiers relatifs (k, k') tel que $x = u + ka$ et $x = v + k'b$. Le système admet donc des solutions si et seulement si l'équation diophantienne $ka - k'b = v - u$ admet un couple solution (k, k').

D'après l'exercice 505, le système a des solutions si,+ et seulement si $\delta = a \wedge b$ divise $v - u$.

On pose $(a', b') \in \mathbb{N}^2$ tel que $a = \delta a'$ et $b = \delta b'$. Si (k_0, k'_0) est une solution particulière de l'équation diophantienne, l'ensemble des solutions est

$$S = \{(k_0 + tb',\ k'_0 + ta')\ ,\ t \in \mathbb{Z}\}\,.$$

L'ensemble des solutions du système de congruences est donc l'ensemble vide si δ ne divise pas $v - u$ et

$$\{u + a(k_0 + tb')\ ,\ t \in \mathbb{Z}\} = \left\{(u + ak_0) + t\,\frac{ab}{\delta}\ ,\ t \in \mathbb{Z}\right\}$$

si δ divise $v - u$. Dans ce dernier cas, c'est une classe de congruence modulo $\dfrac{ab}{\delta}$. Les exercices 554 et 555 donnent des exemples des deux situations.

EXERCICE 558 (③) Par Adrien Rezzouk [∗]

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $6x^2 + 5x + 1 = 0$ et montrer qu'elle n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$.

b) On fixe $m \geq 2$ un entier. On se propose de montrer la congruence $6x^2 + 5x + 1 \equiv 0\ [m]$ admet une solution dans $\mathbb{Z}$. On écrit $m = 2^s t$ où $s \in \mathbb{N}$ et où t est un entier naturel impair. Justifier l'existence de $x \in \mathbb{Z}$ tel que

$$3x + 1 \equiv 0\ [2^s] \quad \text{et} \quad 2x + 1 \equiv 0\ [t].$$

Conclure.

a) On a

$$6x^2 + 5x + 1 = 0 \iff (2x + 1)(3x + 1) = 0.$$

Les solutions de l'équation sont donc $-\dfrac{1}{3}$ et $-\dfrac{1}{2}$ donc l'équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$.

b) On a

$$\begin{aligned}
\begin{cases} 2x + 1 \equiv 0\ [t] \\ 3x + 1 \equiv 0\ [2^s] \end{cases} &\iff \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2, \quad \begin{cases} 2x + 1 = v \cdot t & (1) \\ 3x + 1 = u \cdot 2^s & (2) \end{cases} \\
&\iff \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2, \quad \begin{cases} 2x + 1 = v \cdot t \\ x = u \cdot 2^s - v \cdot t & (2) - (1) \end{cases} \\
&\iff \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2, \quad \begin{cases} x = 2v \cdot t - u \cdot 2^s - 1 & (1) - (2) \\ x = u \cdot 2^s - v \cdot t \end{cases}
\end{aligned}$$

On veut montrer qu'il existe un couple d'entiers relatifs (u, v) tel que $2v \cdot t - u \cdot 2^s - 1 = u \cdot 2^s - v \cdot t$. Cette équation est équivalente à

$$(E) \quad u \cdot 2^{s+1} + 3v \cdot t = 1.$$

Or, 2^{s+1} et $3t$ sont premiers entre eux car x est impair donc n'admet pas de puissance de 2 dans sa décomposition en facteurs premiers. D'après le théorème de Bézout, un couple $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ vérifiant (E) existe donc en posant $x = u \cdot 2^s - v \cdot t$, t divise $2x+1$ et 2^s divise $3x+1$. Alors, $t \cdot 2^s$ divise $(2x+1)(3x+1)$, c'est-à-dire $6x^2+5x+1 \equiv 0\ [m]$.

EXERCICE 559 (④) par Daniel Caby [*]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se propose de construire $Q \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$, kQ soit une puissance exacte, c'est-à-dire de la forme u^v où u et v sont deux entiers naturels strictement supérieurs à 1.

On se donne n éléments de $\mathbb{N}^*$ deux à deux premiers entre eux, notés $u_1,\dots,u_n$. On pose $U = \prod_{i=1}^{n} u_i$.

a) Montrer qu'il existe des entiers naturels $a_1,\dots,a_n$ tels que :

$$\forall k \in \{1,\dots,n\}, \quad a_k \equiv -1\ [u_k], \quad a_k \equiv 0\ \left[\frac{U}{u_k}\right].$$

b) On pose $Q = \prod_{i=1}^{n} i^{a_i}$. Montrer que, pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$, kQ est de la forme $m_k^{u_k}$ où m_k est un entier.

a) Si $k \in [\![1,n]\!]$, u_k est premier avec tous les u_i, pour $i \in [\![1,n]\!] \setminus \{k\}$, donc avec $\prod_{i\in[\![1,n]\!]\setminus\{k\}} u_i$, c'est-à-dire avec $\frac{U}{u_k}$. La conclusion provient alors du théorème 39.

b) Soit $k \in [\![1,n]\!]$. D'après la question précédente, on a, si $i \in [\![1,n]\!] \setminus \{k\}$,

$$a_i \equiv 0\ [u_k], \quad \text{soit} \quad a_i = q_i u_k \quad \text{avec} \quad q_i \in \mathbb{N}.$$

Donc :

$$Q = \prod_{i\in[\![1,n]\!]\setminus\{k\}} (i^{q_i})^{u_k} \times k^{a_k}.$$

Or $a_k \equiv -1\ [u_k]$ donc il existe $q_k \in \mathbb{N}$ tel que $a_k + 1 = q_k u_k$. Donc :

$$kQ = \prod_{i\in[\![1,n]\!]\setminus\{k\}} (i^{q_i})^{u_k} \times k^{q_k u_k} = m_k^{u_k} \quad \text{où} \quad m_k = \prod_{i\in[\![1,n]\!]} i^{q_i}.$$

EXERCICE 560 (②) par Adrien Israël

Trouvez tous les $x \in \mathbb{Z}$ vérifiant simultanément les trois congruences :

$$x \equiv 1\ [2], \quad x \equiv 0\ [3], \quad x \equiv 2\ [5].$$

Même si ce n'est pas utile, nous pouvons vérifier l'existence d'une telle solution : d'après le théorème des restes chinois, si $a_1, a_2, \dots, a_r$ sont des éléments de $\mathbb{N}^2$ deux à deux premiers entre eux, et $u_1, u_2, ..., u_r$ des entiers relatifs, alors il existe un unique x modulo $\prod_{i=1}^{r} a_i$ vérifiant les r congruences. Ici, $2, 3$ et 5 sont premiers deux à deux, et il existe donc une telle solution modulo 30.

Reprenons l'idée donnée dans la démonstration de l'existence d'une telle solution.

Notons $a = 2 \times 3 \times 5 = 30$.

On cherche l'inverse, noté y_1, de $\frac{a}{2}$ modulo 2. Nous avons $\frac{a}{2} \equiv 15,\ [2]$i.e. $\frac{a}{2} \equiv 1\ [2]$. Un inverse est donc $y_1 = 1$.

De même, on cherche l'inverse, noté y_2, de $\frac{a}{3}$ modulo 3. Nous avons $\frac{a}{3} \equiv 1\ [3]$. D'où $y_2 = 1$.

Finalement, on trouve que l'inverse, noté y_3 de $\frac{a}{5}$ modulo 5 est 1.

Ainsi, $x \equiv 1 \times 15 \cdot 1 + 1 \times 10 \times 0 + 1 \times 6 \times 2 \equiv 27$ [30].

EXERCICE 561 (④) par Elias Caeiro

Soient $r \in \mathbb{N}^*$, $p_1, ..., p_r$ des nombres premiers distincts.

a) Montrer l'existence de $x \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\forall i \in \{1, ..., r\}, \quad x \equiv p_i - i \ [p_i^2].$$

b) En déduire l'existence de r entiers naturels consécutifs dont aucun n'est une puissance exacte.

a) Commençons par remarquer que, si $i \neq j$, p_i^2 et p_j^2 sont premiers entre eux (ils n'ont aucun facteur premier en commun). On peut donc appliquer la forme générale du théorème des restes chinois (théorème 40) pour obtenir un entier w tel que, pour tout $x \in \mathbb{Z}$, x est solution du système modulaire $x \equiv p_i - i \ [p_i^2]$ pour $1 \leq i \leq r$, si et seulement si $x \equiv w \ [p_1^2 \cdots p_r^2]$. En particulier, il existe bien au moins une solution dans $\mathbb{N}$ (on prend n'importe quel x positif tel que $x \equiv w \ [p_1^2 \cdots p_r^2]$).

b) Soit $x \in \mathbb{N}$ une solution du système modulaire de la question a). Alors, aucun des r nombres consécutifs $x+1, x+2, \ldots, x+r$ n'est une puissance parfaite. En effet, on remarque que, pour $1 \leq i \leq r$, $p_i \mid (x+i)$ mais $p_i^2 \nmid x+i$ car $x+i \equiv p_i \ [pi^2]$. Ainsi, $v_{p_i}(x+i) = 1$. Or, un entier n ayant une valuation p-adique égale à 1 ne peut jamais être une puissance parfaite : si n était une puissance k-ème, $k \geq 2$, toutes ses valuations p-adiques seraient divisibles par k, mais $k \nmid 1$.