MÉMENTO X-ENS Mathématiques

Les théorèmes et exercices classiques vus en classe de MP* à Louis-Le-Grand et Henri IV

Livret — Fonctions d'une variable réelle

WikiPrépa

Table des matières

Existence d'un point fixe pour une fonction continue d'un segment dans lui-même

Théorème — Point fixe de Brouwer (dimension 1).
Énoncé. Soit $I = [a, b]$ un segment non vide de $\mathbb{R}$ (avec $a < b$). Soit $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ une application continue. Alors f admet au moins un point fixe dans $[a, b]$, c'est-à-dire :

$$\exists c \in [a, b], \quad f(c) = c$$

Preuve .

Idées clés :
- Introduction d'une fonction auxiliaire $g(x) = f(x) - x$.
- Utilisation du théorème des valeurs intermédiaires (TVI).
- Étude du signe de g aux bornes du segment.

Considérons l'application auxiliaire g définie sur le segment $[a, b]$ par :

$$\forall x \in [a, b], \quad g(x) = f(x) - x$$

Par hypothèse, f est continue sur $[a, b]$. Comme l'application $x \mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}$, par somme de fonctions continues, on en déduit que :

$$\boxed{g \text{ est continue sur } [a, b]}$$

Étudions les valeurs de g aux bornes de l'intervalle. Puisque l'ensemble d'arrivée de f est $[a, b]$, nous avons $f(a) \in [a, b]$ et $f(b) \in [a, b]$. On en déduit les deux inégalités suivantes :

1. $f(a) \geq a \implies f(a) - a \geq 0 \implies g(a) \geq 0$.
2. $f(b) \leq b \implies f(b) - b \leq 0 \implies g(b) \leq 0$.

Nous sommes donc dans la configuration suivante :

$$g(b) \leq 0 \leq g(a)$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction e sur $[a, b]$, il existe un réel $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = 0$. Par définition de g, cette égalité équivaut à :

$$\boxed{f(c) = c}$$

Le réel c est bien un point fixe de f dans $[a, b]$. $\square$

Exercice — Application — Point fixe et puissances n-ièmes
Soit $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ une application continue.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in [0, 1]$ tel que $f(x_n) = x_n^n$.
2. On suppose dans cette question que f est strictement décroissante sur $[0, 1]$. Montrer que pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, le point x_n est unique.

Indications :
- Pour la question 1, appliquer le théorème du point fixe ou le TVI à la fonction $h_n(x) = f(x) - x^n$.
- Pour la question 2, étudier la monotonie de la fonction auxiliaire h_n.

Correction.

> **Idées clés :**
> - Application du TVI à $h_n : x \mapsto f(x) - x^n$.
> - Analyse de la stricte monotonie pour l'unicité.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $h_n(x) = f(x) - x^n$ pour tout $x \in [0,1]$. h_n est continue sur $[0,1]$ comme somme de fonctions continues.

Évaluons h_n aux bornes : D'une part, $h_n(0) = f(0) - 0^n = f(0)$. Comme $f([0,1]) \subset [0,1]$, on a $f(0) \geq 0$, d'où :

$$\boxed{h_n(0) \geq 0}$$

D'autre part, $h_n(1) = f(1) - 1^n = f(1) - 1$. Comme $f(1) \in [0,1]$, on a $f(1) \leq 1$, d'où :

$$\boxed{h_n(1) \leq 0}$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_n \in [0,1]$ tel que $h_n(x_n) = 0$. Cela signifie que :

$$\boxed{f(x_n) = x_n^n}$$

2. Supposons f strictement décroissante sur $[0,1]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons les fonctions f et $u_n : x \mapsto -x^n$.

La fonction f est strictement décroissante par hypothèse. La fonction u_n est également strictement décroissante sur $[0,1]$ (car $n \geq 1$).

Par somme de fonctions strictement décroissantes, la fonction $h_n = f + u_n$ est :

$$\boxed{h_n \text{ est strictement décroissante sur } [0,1]}$$

Une fonction strictement monotone sur un intervalle est injective. Ainsi, l'équation $h_n(x) = 0$ admet au plus une solution. D'après la question précédente, une solution existe, elle est donc unique.

> **Piège :**
> Attention à ne pas oublier de justifier la continuité avant d'appliquer le TVI. De même, pour l'unicité, la stricte monotonie de f seule ne suffit pas : c'est bien la stricte monotonie de la différence $f(x) - x^n$ qui garantit le résultat.

> **À retenir :**
> La méthode classique pour démontrer l'existence d'un point fixe ou d'une intersection de courbes consiste toujours à ramener le problème à l'étude des zéros d'une fonction auxiliaire bien choisie, puis à appliquer le TVI.

Injectivité et monotonie des fonctions réelles

Théorème — Caractérisation de l'injectivité par la monotonie.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I.
La fonction f est injective si, et seulement si, f est strictement monotone sur I.

Preuve .

Idées clés :
- Le sens réciproque est immédiat (stricte monotonie implique injectivité).
- Pour le sens direct, on procède par l'absurde en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires (TVI).
- Construction de trois points ordonnés contredisant l'ordre des images.

($\Leftarrow$) Supposons que f est strictement monotone sur I. Soient $(x, y) \in I^2$ tels que $x \neq y$. Par stricte monotonie, on a soit $f(x) < f(y)$, soit $f(x) > f(y)$. Dans tous les cas, $f(x) \neq f(y)$, donc f est injective.

($\Rightarrow$) Supposons que f est continue et injective sur I. Supposons, par l'absurde, que f n'est pas strictement monotone. Il existe alors des triplets $(a, b, c) \in I^3$ tels que $a < b < c$ et :

$$(f(b) - f(a))(f(c) - f(b)) < 0$$

Ceci signifie que $f(b)$ est soit strictement supérieur à $f(a)$ et $f(c)$, soit strictement inférieur à ces deux valeurs.

Cas 1 : $f(a) < f(b)$ et $f(c) < f(b)$. Considérons une valeur y telle que :

$$\max(f(a), f(c)) < y < f(b)$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires :

— Puisque f est continue sur $[a, b]$ et $f(a) < y < f(b)$, il existe $x_1 \in]a, b[$ tel que $f(x_1) = y$.

— Puisque f est continue sur $[b, c]$ et $f(c) < y < f(b)$, il existe $x_2 \in]b, c[$ tel que $f(x_2) = y$.

Comme $x_1 < b < x_2$, on a $x_1 \neq x_2$ alors que $f(x_1) = f(x_2)$. Ceci contredit l'injectivité de f.

Cas 2 : $f(a) > f(b)$ et $f(c) > f(b)$. Le raisonnement est analogue en choisissant y tel que :

$$f(b) < y < \min(f(a), f(c))$$

On obtient de même deux antécédents distincts pour y, ce qui contredit l'injectivité.

Par conséquent, f est nécessairement strictement monotone.

$$\boxed{f \text{ injective} \iff f \text{ strictement monotone}}$$

□

Exercice — Étude d'une involution continue (Colle MP)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

1. Démontrer que f est bijective.
2. En déduire le sens de variation de f.
3. On suppose que f n'est pas l'identité. Montrer qu'il existe un unique point fixe $c \in \mathbb{R}$ et que f est strictement décroissante.

Indications :
- Pour la bijectivité, utiliser la définition de l'involution.
- Utiliser le théorème de la fiche reliant injectivité et monotonie.
- Pour la décroissance, raisonner par l'absurde ou étudier les limites en l'infini.

Correction.

Idées clés :
- Une fonction qui est sa propre réciproque est bijective.
- La continuité et la bijectivité imposent la stricte monotonie.
- Analyse des limites pour fixer le sens de variation.

1. Bijectivité de f. La relation $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ montre que f est sa propre application réciproque. Toute application admettant une réciproque est bijective.

$$\boxed{f \text{ est bijective}}$$

2. Sens de variation. La fonction f est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et elle est injective (car bijective). D'après le théorème démontré précédemment, f est strictement monotone sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{f \text{ est strictement monotone}}$$

3. Caractérisation de f. Supposons que f soit strictement croissante. Si $x < f(x)$, alors par croissance $f(x) < f(f(x)) = x$, ce qui est absurde. De même, $x > f(x)$ est impossible. Ainsi, si f est strictement croissante, alors $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

Si $f \neq \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, alors f est nécessairement strictement décroissante. Dans ce cas :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

Considérons la fonction $g(x) = f(x) - x$. g est continue, $\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$. Par le TVI, g s'annule en au moins un point c. Comme g est strictement décroissante (somme de deux fonctions strictement décroissantes), ce point c est unique.

$$\boxed{f \text{ est strictement décroissante et possède un unique point fixe } c}$$

Piège :
Attention à ne pas oublier l'hypothèse de continuité. Il existe des fonctions injectives non monotones sur $\mathbb{R}$ (par exemple, en échangeant deux valeurs dans une fonction croissante), mais elles ne sont jamais continues.

À retenir :
Sur un intervalle, pour une fonction continue, l'injectivité équivaut à la stricte monotonie. C'est un outil puissant pour déterminer le sens de variation d'une bijection réciproque.

“‘

Uniforme continuité des fonctions périodiques et des fonctions à limite finie en l'infini

> **Théorème — Uniforme continuité des fonctions périodiques.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Si f est périodique, alors f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Preuve .

> **Idées clés :**
> - Utilisation du théorème de Heine sur un intervalle fermé borné (segment).
> - Exploitation de la périodicité pour ramener tout couple (x, y) proche au segment de référence.
> - Choix d'un segment légèrement plus grand que la période pour gérer les bords.

Soit $T > 0$ une période de f. Puisque f est continue sur le segment $[0, 2T]$, le théorème de Heine assure que f y est uniformément continue.

Soit $\epsilon > 0$. Par définition de l'uniforme continuité sur $[0, 2T]$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall (u, v) \in [0, 2T]^2, \quad |u - v| < \delta \implies |f(u) - f(v)| < \epsilon$$

Quitte à réduire δ, on peut supposer sans perte de généralité que $0 < \delta < T$.

Soient maintenant $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x - y| < \delta$. On suppose, quitte à échanger les rôles, que $x \leq y$. Considérons l'entier $k = \lfloor \frac{x}{T} \rfloor$. On pose :

$$x' = x - kT \quad \text{et} \quad y' = y - kT$$

Par définition de la partie entière, nous avons $x' \in [0, T[\subset [0, 2T]$. De plus, comme $|x - y| < \delta < T$, on en déduit :

$$y' = x' + (y - x) < T + T = 2T$$

Ainsi, x' et y' appartiennent tous deux au segment $[0, 2T]$. Comme $|x' - y'| = |x - y| < \delta$, l'uniforme continuité de f sur $[0, 2T]$ implique :

$$|f(x') - f(y')| < \epsilon$$

Par T-périodicité de f, on a $f(x') = f(x)$ et $f(y') = f(y)$. On en conclut :

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon}$$

f est donc uniformément continue sur $\mathbb{R}$. □

> **Théorème — Fonctions possédant une limite finie en l'infini.** Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{K}$ une fonction continue. Si f admet une limite finie en $+\infty$, alors f est uniformément continue sur $[a, +\infty[$.

Preuve .

> **Idées clés :**
> - Utilisation de la définition de la limite pour "stabiliser" la fonction au voisinage de $+\infty$.
> - Utilisation du théorème de Heine sur un segment initial $[a, A]$.
> - Recouvrement des deux zones pour assurer la continuité uniforme globale.

Notons $\ell = \lim_{x \to +\infty} f(x)$. Soit $\epsilon > 0$.

Par définition de la limite, il existe un réel $A > a$ tel que :

$$\forall x \geq A, \quad |f(x) - \ell| < \frac{\epsilon}{3}$$

D'après l'inégalité triangulaire, pour tous $x, y \in [A, +\infty[$, on a :

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - \ell| + |\ell - f(y)| < \frac{2\epsilon}{3} < \epsilon$$

Par ailleurs, f est continue sur le segment $[a, A+1]$. D'après le théorème de Heine, f y est uniformément continue. Il existe donc $\delta' > 0$ tel que :

$$\forall (u,v) \in [a, A+1]^2, \quad |u - v| < \delta' \implies |f(u) - f(v)| < \epsilon$$

Posons $\delta = \min(\delta', 1)$. Soient $x, y \in [a, +\infty[$ tels que $|x - y| < \delta$. Deux cas se présentent :

1. Si $x \geq A$ et $y \geq A$, alors d'après ce qui précède : $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.
2. Si l'un des deux (disons x) est strictement inférieur à A, alors comme $|x - y| < \delta \leq 1$, on a :

$$y < x + 1 < A + 1$$

   Dans ce cas, x et y appartiennent tous deux au segment $[a, A+1]$. L'uniforme continuité sur ce segment donne alors $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Dans tous les cas, l'implication est vérifiée.

$$\boxed{f \text{ est uniformément continue sur } [a, +\infty[}$$

□

Exercice — Application — Étude de la somme d'une fonction périodique et d'une fonction de limite nulle

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f(x) = \frac{\sin(x^2)}{1 + x^2} + \cos(x)$$

1. La fonction $x \mapsto \cos(x)$ est-elle uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$? Justifier.
2. Étudier la limite de $g : x \mapsto \frac{\sin(x^2)}{1+x^2}$ en $+\infty$. En déduire son uniforme continuité sur $\mathbb{R}^+$.
3. Conclure sur l'uniforme continuité de f sur $\mathbb{R}^+$.

Indications :

- Utiliser directement les deux théorèmes démontrés précédemment.
- Pour la limite de g, remarquer que le numérateur est borné tandis que le dénominateur tend vers l'infini.
- Se souvenir que l'ensemble des fonctions uniformément continues sur un intervalle I forme un espace vectoriel.

Correction.

Idées clés :

- Application du théorème sur les fonctions périodiques.
- Application du théorème sur les fonctions possédant une limite finie.
- Structure d'espace vectoriel de $\mathcal{UC}(I, \mathbb{K})$.

1. La fonction $x \mapsto \cos(x)$ est continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$. D'après le premier théorème démontré, elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, et donc par restriction sur $\mathbb{R}^+$.

$$\boxed{x \mapsto \cos(x) \in \mathcal{UC}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})}$$

2. Considérons la fonction $g : x \mapsto \frac{\sin(x^2)}{1+x^2}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a la majoration suivante :

$$|g(x)| = \frac{|\sin(x^2)|}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$$

Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$, on en déduit par le théorème d'encadrement :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

La fonction g est continue sur $[0, +\infty[$ et admet une limite finie en $+\infty$. D'après le second théorème démontré :

$$\boxed{g \in \mathcal{UC}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})}$$

3. La fonction f est la somme de deux fonctions uniformément continues sur $\mathbb{R}^+$. L'uniforme continuité est stable par combinaison linéaire. En effet, si f_1 et f_2 sont uniformément continues, pour $\epsilon/2$, il existe δ_1 et δ_2. En prenant $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, l'inégalité triangulaire permet de conclure pour $f_1 + f_2$ avec ϵ.

Par conséquent :

$$\boxed{f \text{ est uniformément continue sur } \mathbb{R}^+}$$

> **Piège :**
> Attention à ne pas croire que le produit de deux fonctions uniformément continues est uniformément continu (contre-exemple classique : $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$). Ici, seule la structure d'espace vectoriel est utilisée.

> **À retenir :**
> Pour montrer qu'une fonction est uniformément continue sur un intervalle non borné, on cherche souvent à la décomposer en une partie "périodique" et une partie "négligeable à l'infini" (ou tendant vers une constante).

"‘

Exemple de fonctions dérivables non C^1

Propriété — Un contre-exemple classique. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Énoncé.

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction dérivée f' n'est pas continue en 0.

Par conséquent, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Preuve .

Idées clés :
- Étude de la dérivabilité en 0 par le taux d'accroissement.
- Calcul de la dérivée sur $\mathbb{R}^*$ par les règles usuelles.
- Utilisation de l'oscillation de la fonction cosinus pour infirmer la convergence en 0.

Soit f définie comme dans l'énoncé.

1. Dérivabilité sur $\mathbb{R}^*$ Sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, la fonction f est définie comme produit et composée de fonctions usuelles dérivables ($x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \sin(1/x)$). Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ce qui se simplifie en :

$$\boxed{f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)}$$

2. Dérivabilité en 0 Étudions le taux d'accroissement de f en 0. Pour tout $x \neq 0$:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 \sin(1/x)}{x} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Or, pour tout $x \neq 0$, on a l'encadrement :

$$\left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x|$$

Comme $\lim_{x\to 0} |x| = 0$, par le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$

Ainsi, f est dérivable en 0 et :

$$\boxed{f'(0) = 0}$$

3. Défaut de continuité de f' en 0 Pour que f soit de classe $\mathcal{C}^1$, il faudrait que $\lim_{x\to 0} f'(x) = f'(0) = 0$. Examinons l'expression de $f'(x)$ pour $x \neq 0$:

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

On sait que $\lim_{x\to 0} 2x\sin(1/x) = 0$ par croissance comparée (ou encadrement). Cependant, la fonction $x \mapsto \cos(1/x)$ n'admet pas de limite en 0. En effet, considérons les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$u_n = \frac{1}{2n\pi} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$$

Ces deux suites tendent vers 0 quand $n \to +\infty$. Or :

$$\cos(1/u_n) = \cos(2n\pi) = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

$$\cos(1/v_n) = \cos((2n+1)\pi) = -1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$$

Par caractérisation séquentielle, $\cos(1/x)$ n'admet pas de limite en 0. On en déduit que f' n'admet pas de limite en 0.

$$\boxed{f' \notin \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$$

□

Exercice — Généralisation : Étude d'une famille de fonctions

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la fonction g_α définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_\alpha(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles g_α est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles g_α est dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles g_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Indications :
- Pour la continuité, utiliser l'encadrement $|g_\alpha(x)| \leq |x|^\alpha$.
- Pour la dérivabilité en 0, étudier la limite du taux d'accroissement $\frac{g_\alpha(x)}{x}$.
- Pour le caractère $\mathcal{C}^1$, calculer $g_\alpha'(x)$ pour $x \neq 0$ et étudier sa limite en 0 en distinguant le terme qui tend vers 0 de celui qui oscille.

Correction.

Idées clés :
- Comparaison de l'exposant α avec les puissances critiques $(0, 1, 2)$.
- La dérivabilité impose un gain d'un degré de puissance par rapport à la continuité.

1. Continuité Pour tout $x \neq 0$, on a $|g_\alpha(x)| \leq |x|^\alpha$. La limite en 0 est nulle si et seulement si l'exposant α est strictement positif. Comme $\alpha > 0$ par hypothèse :

$$\boxed{g_\alpha \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ pour tout } \alpha > 0}$$

2. Dérivabilité La fonction est clairement dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Étudions le taux d'accroissement en 0 :

$$\frac{g_\alpha(x) - g_\alpha(0)}{x - 0} = \frac{|x|^\alpha \sin(1/x)}{x}$$

En passant au module :

$$\left|\frac{g_\alpha(x)}{x}\right| = |x|^{\alpha-1}|\sin(1/x)| \leq |x|^{\alpha-1}$$

Si $\alpha > 1$, la limite du taux d'accroissement est 0, donc g_α est dérivable en 0 avec $g'_\alpha(0) = 0$. Si $\alpha \leq 1$, le taux d'accroissement n'admet pas de limite finie (oscillation ou divergence).

$$\boxed{g_\alpha \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \iff \alpha > 1}$$

3. Classe $\mathcal{C}^1$ Supposons $\alpha > 1$. Pour $x \neq 0$ (en supposant $x > 0$ pour simplifier la dérivation de $|x|^\alpha$) :

$$g'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1} \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^{\alpha-2} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Pour que g_α soit $\mathcal{C}^1$, il faut que $\lim_{x\to 0} g'_\alpha(x) = g'_\alpha(0) = 0$.

— Le premier terme $\alpha x^{\alpha-1} \sin(1/x)$ tend vers 0 car $\alpha - 1 > 0$.

— Le second terme $x^{\alpha-2} \cos(1/x)$ tend vers 0 si et seulement si son amplitude tend vers 0, c'est-à-dire $\alpha - 2 > 0$.

Si $\alpha > 2$, alors $g'_\alpha(x) \to 0$, donc g_α est $\mathcal{C}^1$. Si $1 < \alpha \leq 2$, le terme en cosinus empêche l'existence d'une limite nulle.

$$\boxed{g_\alpha \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \iff \alpha > 2}$$

> **Piège :**
> Attention à ne pas appliquer le théorème de prolongement de la dérivée sans vérifier d'abord que la limite de la dérivée existe. Ici, la dérivée n'a pas de limite en 0 pour $\alpha = 2$, pourtant la fonction est bien dérivable en 0.

> **À retenir :**
> Une fonction peut être dérivable en un point sans que sa dérivée y soit continue. L'exemple de $x^2 \sin(1/x)$ est le contre-exemple fondamental à connaître.

Dérivabilité en un point et monotonie locale

Proposition — Croissance locale en un point. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et a un point intérieur à I. On suppose que f est dérivable en a.
Si $f'(a) > 0$, alors il existe un voisinage V de a tel que :

1. Pour tout $x \in V \cap I$ tel que $x > a$, on a $f(x) > f(a)$.
2. Pour tout $x \in V \cap I$ tel que $x < a$, on a $f(x) < f(a)$.

Preuve .

Idées clés :
- Utilisation de la définition de la dérivée comme limite du taux d'accroissement.
- Application de la définition de la limite avec $\varepsilon = f'(a)/2$.

Par hypothèse, f est dérivable en a, ce qui signifie que :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

Supposons $f'(a) > 0$. Posons $\varepsilon = \frac{f'(a)}{2} > 0$. Par définition de la limite, il existe un voisinage V de a tel que pour tout $x \in V \cap I \setminus \{a\}$:

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right| < \frac{f'(a)}{2}$$

En particulier, on en déduit l'inégalité suivante :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > f'(a) - \frac{f'(a)}{2} = \frac{f'(a)}{2} > 0$$

Dès lors, le signe de $f(x) - f(a)$ est le même que celui de $x - a$ sur ce voisinage :
— Si $x \in V \cap I$ et $x > a$, alors $x - a > 0$, d'où $f(x) - f(a) > 0$.
— Si $x \in V \cap I$ et $x < a$, alors $x - a < 0$, d'où $f(x) - f(a) < 0$.

$$\boxed{\text{La fonction est donc localement située de part et d'autre de } f(a).}$$

□

Exercice — Absence de monotonie au voisinage d'un point
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(0)$.
2. Montrer que pour tout $\eta > 0$, f n'est pas monotone sur $]-\eta, \eta[$.

Indications :
- Pour la dérivabilité en 0, revenir à la définition du taux d'accroissement.
- Pour la non-monotonie, calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$ et étudier son signe au voisinage de 0 en choisissant

des points particuliers de la forme $1/(k\pi)$.

Correction.

Idées clés :
- Distinction entre dérivabilité en un point et continuité de la dérivée (C^1).
- Étude des oscillations de la fonction sinus au voisinage de l'infini.

1. Dérivabilité en 0
Étudions le taux d'accroissement de f en 0. Pour tout $x \neq 0$:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{x}{2}+x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \frac{1}{2}+x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Or, nous savons que la fonction sinus est bornée : $\left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|$. Par théorème d'encadrement :

$$\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

On en déduit que le taux d'accroissement admet une limite en 0 :

$$\boxed{f'(0) = \frac{1}{2}}$$

La fonction f est donc dérivable en 0, avec une dérivée strictement positive.
2. Étude de la monotonie au voisinage de 0
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par théorèmes usuels. Pour $x \neq 0$:

$$f'(x) = \frac{1}{2}+2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)+x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Soit :

$$f'(x) = \frac{1}{2}+2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Analysons le comportement de f' au voisinage de 0. Considérons les points de la forme $x_k = \frac{1}{2k\pi}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. Quand $k \to +\infty$, $x_k \to 0$. En ces points :

$$f'(x_k) = \frac{1}{2}+0-\cos(2k\pi) = \frac{1}{2}-1 = -\frac{1}{2} < 0$$

Considérons maintenant les points de la forme $y_k = \frac{1}{(2k+1)\pi}$. Quand $k \to +\infty$, $y_k \to 0$. En ces points :

$$f'(y_k) = \frac{1}{2}+0-\cos((2k+1)\pi) = \frac{1}{2}-(-1) = \frac{3}{2} > 0$$

Dans tout intervalle $]-\eta,\eta[$, on peut trouver des entiers k tels que x_k et y_k appartiennent à l'intervalle. Comme la dérivée f' change de signe une infinité de fois au voisinage de 0, la fonction f ne peut être monotone sur aucun intervalle ouvert contenant 0.

$$\boxed{f'(0) > 0 \text{ n'implique pas la croissance sur un voisinage de } 0.}$$

Piège :
L'erreur classique consiste à croire que $f'(a) > 0$ implique $f' > 0$ sur un voisinage de a. Cela n'est vrai que si f' est **continue** en a (cas d'une fonction C^1). Ici, f' n'est pas continue en 0 car $\cos(1/x)$ n'admet pas de limite en 0.

À retenir :
Pour qu'une fonction dérivable soit strictement croissante sur un intervalle, il faut et suffit que sa dérivée y soit positive et ne s'annule que de manière isolée. Le signe de la dérivée **en un seul point** ne donne qu'une information de croissance locale "ponctuelle" (comparaison avec $f(a)$), mais pas une information sur la variation de la fonction sur un intervalle.

Comportement asymptotique de la dérivée d'une fonction tendant vers zéro

Propriété — Absence d'implication entre limite de f et limite de f'.

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
La convergence de $f(x)$ vers 0 lorsque $x \to +\infty$ n'implique pas la convergence de sa dérivée $f'(x)$ vers 0.
En d'autres termes, il existe des fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ telles que :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad f'(x) \underset{x\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

Preuve .

Idées clés :
- Construction d'une fonction oscillante à fréquence croissante.
- Compensation de l'amplitude par le dénominateur.
- Analyse de la dérivée par calcul direct.

La preuve de cette propriété repose sur l'exhibition d'un contre-exemple. On cherche une fonction qui s'écrase vers l'axe des abscisses tout en ayant des pentes de plus en plus raides.

Considérons la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$$

Il est immédiat que $|f(x)| \leq \frac{1}{x}$ pour tout $x \geq 1$. Par le théorème des gendarmes, on en déduit :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$$

Calculons maintenant la dérivée de f sur $[1, +\infty[$. f est de classe $\mathcal{C}^1$ comme quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Pour tout $x \geq 1$:

$$f'(x) = \frac{2x\cos(x^2) \cdot x - \sin(x^2) \cdot 1}{x^2}$$

Ce qui se simplifie en :

$$\boxed{f'(x) = 2\cos(x^2) - \frac{\sin(x^2)}{x^2}}$$

Analyse du comportement de f' à l'infini :

— Le terme $\frac{\sin(x^2)}{x^2}$ tend vers 0 car il est majoré en valeur absolue par $\frac{1}{x^2}$.

— Le terme $2\cos(x^2)$ oscille indéfiniment entre -2 et 2.

Par conséquent, $f'(x)$ ne possède pas de limite en $+\infty$. En particulier, f' ne tend pas vers 0. $\square$

Exercice — Étude précise du contre-exemple classique

On considère la fonction $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$.

1. Justifier la dérivabilité de f et calculer $f'(x)$.
2. Montrer que la suite $(f'(\sqrt{n\pi}))_{n\geq1}$ diverge.
3. En déduire que $f'(x)$ n'admet aucune limite en $+\infty$.

> 4. Que peut-on dire du comportement de f' si l'on suppose de plus que f' est uniformément continue sur $[1, +\infty[$?

Indications :
- Utiliser la formule de dérivation d'un quotient $(u/v)'$.
- Évaluer l'expression de f' obtenue en des points spécifiques.
- Utiliser la caractérisation séquentielle de la limite.
- Penser au lemme de Barbalat.

Correction.

Idées clés :
- Calcul rigoureux de la dérivée.
- Utilisation de suites de points pour nier l'existence d'une limite.
- Lien avec la régularité supplémentaire (Uniforme continuité).

1. f est le quotient de $x \mapsto \sin(x^2)$ et $x \mapsto x$. Ces deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[1, +\infty[$. Par quotient, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$.

Pour tout $x \geq 1$, on a :

$$f'(x) = \frac{2x^2 \cos(x^2) - \sin(x^2)}{x^2}$$

On obtient la forme scindée :

$$\boxed{f'(x) = 2\cos(x^2) - \frac{\sin(x^2)}{x^2}}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $x_n = \sqrt{n\pi}$. On a clairement $x_n \to +\infty$. Évaluons f' en ces points :

$$f'(x_n) = 2\cos(n\pi) - \frac{\sin(n\pi)}{n\pi}$$

Comme $\sin(n\pi) = 0$ et $\cos(n\pi) = (-1)^n$, on obtient :

$$\boxed{f'(x_n) = 2(-1)^n}$$

La suite $(f'(x_n))_{n\geq 1}$ est la suite $2, -2, 2, -2, \ldots$ Cette suite est divergente.

3. Supposons par l'absurde que $f'(x)$ admette une limite $L \in \mathbb{R}$ en $+\infty$. D'après la caractérisation séquentielle de la limite, pour toute suite (y_n) tendant vers $+\infty$, la suite $(f'(y_n))$ devrait tendre vers L.

Or, nous avons trouvé une suite (x_n) telle que $(f'(x_n))$ diverge. Ceci contredit l'existence d'une limite.

$$\boxed{f' \text{ n'admet pas de limite en } +\infty}$$

4. Si l'on suppose que f' est uniformément continue sur $[a, +\infty[$, alors le lemme de Barbalat s'applique.

À retenir :
Lemme de Barbalat : Si f admet une limite finie en $+\infty$ et si f' est uniformément continue, alors $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

Ici, f tend vers 0, mais f' n'est pas uniformément continue. En effet, la fréquence des oscillations de $2\cos(x^2)$ augmente indéfiniment, ce qui empêche l'uniforme continuité (la dérivée seconde $f''(x) \sim -4x\sin(x^2)$ n'est pas bornée).

Piège :
Attention à ne pas confondre "limite de f' nulle" et "limite de f nulle". L'existence de la limite de f n'assure même pas l'existence d'une limite pour f'.

Prolongement $\mathcal{C}^\infty$ de la fonction $x \mapsto \exp(-1/x^2)$ et non-analyticité

Propriété — Étude de la fonction « plateau » en 0.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f^{(n)}(0) = 0$.

Preuve .

Idées clés :
- Expression des dérivées sur $\mathbb{R}^*$ par récurrence : $f^{(n)}(x) = P_n(1/x)e^{-1/x^2}$.
- Utilisation des croissances comparées pour la limite en 0.
- Application itérée du théorème de prolongement de la classe $\mathcal{C}^1$.

Étape 1 : Forme des dérivées sur $\mathbb{R}^*$

La fonction f est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ par composition de fonctions usuelles. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

Initialisation : Pour $n = 0$, $P_0 = 1$ convient.

Hérédité : Supposons la propriété vraie au rang n. Sur $\mathbb{R}^*$, $f^{(n)}$ est dérivable et :

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx}\left[P_n\left(\frac{1}{x}\right)\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

$$f^{(n+1)}(x) = -\frac{1}{x^2}P_n'\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2} + P_n\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{2}{x^3}e^{-1/x^2}$$

$$f^{(n+1)}(x) = \left[-\left(\frac{1}{x}\right)^2 P_n'\left(\frac{1}{x}\right) + 2\left(\frac{1}{x}\right)^3 P_n\left(\frac{1}{x}\right)\right]\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

En posant $P_{n+1}(X) = -X^2P_n'(X) + 2X^3P_n(X)$, qui est bien un polynôme, l'hérédité est établie.

Étape 2 : Limite des dérivées en 0

Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $u = 1/x^2$. Lorsque $x \to 0$, $u \to +$

f est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

$\lim_{x\to0} f'(x) = 0$.

D'après le théorème, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $f'(0) = 0$. Par récurrence, si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ avec $f^{(n)}(0) = 0$, alors comme $f^{(n)}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et $\lim_{x\to0} f^{(n+1)}(x) = 0$, $f^{(n)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi, f est $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$ et $f^{(n+1)}(0) = 0$.

Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \text{ et } f^{(n)}(0) = 0}$$

□

Exercice — Défaut de développement en série entière

Soit f la fonction définie précédemment.

1. Rappeler la définition d'une fonction développable en série entière (DSE) en 0.
2. Démontrer que la fonction f n'est pas développable en série entière au voisinage de 0.

Indications :

- Si une fonction est DSE, ses coefficients sont nécessairement liés aux dérivées successives en 0 (formule de Taylor).
- Utiliser l'unicité du développement en série entière.

Correction.

Idées clés :

- Lien entre coefficients du DSE et dérivées $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.
- Principe de prolongement analytique (ou simplement étude de la nullité).

1. Définition

Une fonction g est dite développable en série entière en 0 s'il existe un intervalle $I =]-R, R[$ avec $R > 0$ et une suite de coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que :

$$\forall x \in I, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

2. Non-DSE de la fonction plateau

Supposons, par l'absurde, que f soit développable en série entière au voisinage de 0. Alors il existe $R > 0$ tel que pour tout $x \in]-R, R[$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Si un tel développement existe, les coefficients a_n sont obligatoirement donnés par la formule de Taylor :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Or, nous avons démontré dans la partie précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$. Par conséquent, tous les coefficients a_n sont nuls :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = 0$$

Cela impliquerait que :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad f(x) = 0$$

Or, par définition de f, pour tout $x \neq 0$:

$$f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) > 0$$

Il y a donc une contradiction flagrante sur l'intervalle $]-R, R[\setminus\{0\}$.

Conclusion :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ n'est pas développable en série entière en 0.}}$$

Piège :
Attention à ne pas confondre « être de classe $\mathcal{C}^\infty$ » et « être développable en série entière ». La classe $\mathcal{C}^\infty$ est une condition nécessaire mais absolument pas suffisante (comme le prouve ce contre-exemple célèbre).

À retenir :
La fonction $x \mapsto \exp(-1/x^2)$ est le contre-exemple classique à connaître pour :
— Une fonction $\mathcal{C}^\infty$ non nulle dont toutes les dérivées en 0 sont nulles.
— Une fonction $\mathcal{C}^\infty$ qui n'est pas égale à sa série de Taylor au voisinage de 0.

‘‘‘

Construction des fonctions plateaux

Lemme — Régularité de la fonction exponentielle tronquée.

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Alors la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$.

Preuve .

Idées clés :
- Étude de la régularité sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
- Récurrence pour la forme des dérivées successives sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Utilisation du théorème de la limite de la dérivée (ou prolongement $\mathcal{C}^1$).

La fonction f est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, 0[$ (elle y est nulle) et sur $]0, +\infty[$ par composition de fonctions élémentaires.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ième de f sur $]0, +\infty[$ est de la forme :

$$\forall x > 0, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} \exp\left(-\frac{1}{x}\right)$$

où P_n est un polynôme.

Initialisation : Pour $n = 0$, $P_0 = 1$ convient.

Hérédité : Supposons la propriété vraie au rang n. Sur $]0, +\infty[$:

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx}\left[P_n(x)x^{-2n}\exp(-1/x)\right]$$

En dérivant le produit, on obtient :

$$f^{(n+1)}(x) = \left(P_n'(x)x^{-2n} - 2nP_n(x)x^{-2n-1} + P_n(x)x^{-2n} \cdot \frac{1}{x^2}\right)\exp(-1/x)$$

En factorisant par $x^{-2(n+1)}$, il vient :

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{x^2P_n'(x) - 2nxP_n(x) + P_n(x)}{x^{2n+2}}\exp(-1/x)$$

On pose $P_{n+1}(x) = x^2P_n'(x) - (2nx - 1)P_n(x)$, qui est bien un polynôme. La propriété est héréditaire.

Conclusion sur la classe $\mathcal{C}^\infty$: Par croissances comparées, pour tout polynôme Q, on sait que :

$$\lim_{x \to 0^+} Q\left(\frac{1}{x}\right)\exp\left(-\frac{1}{x}\right) = 0$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} f^{(n)}(x) = 0}$$

Comme f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et que toutes ses dérivées à droite et à gauche en 0 coïncident (elles valent 0), le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ (ou une itération du théorème de la limite de la dérivée) assure que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. □

Théorème — Existence d'une fonction de transition.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Il existe une fonction $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que :

1. $\forall x \leq a, \quad \psi(x) = 0$
2. $\forall x \geq b, \quad \psi(x) = 1$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \psi(x) \leq 1$

Preuve .

Idées clés :
- Utilisation de la fonction f du lemme précédent.
- Construction d'une fonction strictement positive sur $]a, b[$ et nulle ailleurs.
- Normalisation par intégration.

Considérons la fonction $g : x \mapsto f(x-a) \cdot f(b-x)$. D'après le lemme, g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions $\mathcal{C}^\infty$.

Par construction :

$$g(x) > 0 \iff (x - a > 0 \text{ et } b - x > 0) \iff x \in]a, b[$$

Pour $x \notin]a, b[$, $g(x) = 0$.

Définissons alors la fonction ψ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \psi(x) = \frac{\int_{-\infty}^{x} g(t)\, dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, dt}$$

Puisque g est continue et nulle hors de $[a, b]$, l'intégrale au dénominateur est bien définie et strictement positive.

Régularité : ψ est la primitive d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$, elle est donc $\mathcal{C}^\infty$.

Valeurs : Si $x \leq a$, l'intégrale au numérateur porte sur une fonction nulle, donc $\psi(x) = 0$.

Si $x \geq b$, le numérateur est égal au dénominateur, donc $\psi(x) = 1$.

Puisque g est positive, ψ est croissante, donc à valeurs dans $[0, 1]$.

$$\boxed{\psi \text{ est une fonction de transition } \mathcal{C}^\infty}$$

□

Exercice — Construction d'une fonction plateau

Soient a, b, c, d quatre réels tels que $a < b < c < d$. Construire explicitement une fonction $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

1. $\forall x \in [b, c], \quad h(x) = 1.$
2. $\forall x \notin]a, d[, \quad h(x) = 0.$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq h(x) \leq 1.$

Indications :
- Utiliser deux fonctions de transition issues du théorème précédent.
- On pourra considérer une transition montante sur $[a, b]$ et une transition descendante sur $[c, d]$.

Correction.

Idées clés :
- Produit de deux fonctions de transition bien choisies.
- Vérification des raccords de régularité.

D'après le théorème précédent : Soit ψ_1 une fonction de transition $\mathcal{C}^\infty$ valant 0 sur $]-\infty, a]$ et 1 sur $[b, +\infty[$. Soit ψ_2 une fonction de transition $\mathcal{C}^\infty$ valant 0 sur $]-\infty, c]$ et 1 sur $[d, +\infty[$.

On définit la fonction h par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \psi_1(x) \cdot (1 - \psi_2(x))$$

Analyse des zones :

1. Sur $]-\infty, a]$ **:** $\psi_1(x) = 0$, donc $h(x) = 0$.

2. Sur $[b, c]$ **:** $\psi_1(x) = 1$ et $\psi_2(x) = 0$, donc :

$$h(x) = 1 \cdot (1 - 0) = 1$$

3. Sur $[d, +\infty[$ **:** $\psi_2(x) = 1$, donc $1 - \psi_2(x) = 0$, d'où $h(x) = 0$.

4. Sur les intervalles de transition $[a, b]$ **et** $[c, d]$ **:** Comme ψ_1 et ψ_2 sont à valeurs dans $[0, 1]$, le produit $h(x) = \psi_1(x)(1 - \psi_2(x))$ reste dans $[0, 1]$.

Conclusion : La fonction h est $\mathcal{C}^\infty$ par produit de fonctions $\mathcal{C}^\infty$. Elle répond à toutes les exigences.

$$\boxed{h = \psi_{a,b} \cdot (1 - \psi_{c,d})}$$

Piège :
Attention à ne pas simplement "recoller" des morceaux de fonctions à la main. La force de cette construction réside dans le fait que $f(x) = \exp(-1/x)$ possède des dérivées de tous ordres nulles en zéro, ce qui assure la douceur des raccords sans calcul supplémentaire.

À retenir :
La fonction $x \mapsto \exp(-1/x)\mathbf{1}_{x>0}$ est l'outil fondamental pour créer des fonctions à support compact sans perdre la régularité $\mathcal{C}^\infty$. C'est un contre-exemple classique au fait qu'une fonction $\mathcal{C}^\infty$ dont toutes les dérivées sont nulles en un point est nulle partout (les fonctions plateau ne sont pas analytiques).

Inégalités de convexité de la fonction sinus

Théorème — Inégalités de Jordan. Énoncé. Pour tout réel $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a l'encadrement suivant :

$$\frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x$$

Preuve .

Idées clés :
- Étude de la concavité de la fonction sinus sur $[0, \pi/2]$.
- Utilisation de la propriété de la corde pour la minoration.
- Utilisation de la propriété de la tangente pour la majoration.

Soit f la fonction définie sur $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \sin x$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I. Pour tout $x \in I$, on a :

$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\sin x$$

Sur l'intervalle $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\sin x \geqslant 0$, donc :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad f''(x) \leqslant 0$$

La fonction sinus est donc concave sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

1. Démonstration de la majoration $\sin x \leqslant x$. Le graphe d'une fonction concave est situé en dessous de ses tangentes. Déterminons l'équation de la tangente à la courbe de f en 0. Elle est donnée par :

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

Or $f'(0) = \cos(0) = 1$ et $f(0) = \sin(0) = 0$. La tangente en 0 a donc pour équation $y = x$. Par concavité de f sur I, on en déduit :

$$\boxed{\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \sin x \leqslant x}$$

2. Démonstration de la minoration $\sin x \geqslant \frac{2}{\pi}x$. Le graphe d'une fonction concave est situé au-dessus de ses cordes. Considérons la corde reliant les points de la courbe d'abscisses 0 et $\frac{\pi}{2}$. Ces points sont $O(0, 0)$ et $A\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.

L'équation de la droite (OA) est de la forme $y = ax$, où :

$$a = \frac{f(\pi/2) - f(0)}{\pi/2 - 0} = \frac{1 - 0}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}$$

Ainsi, par concavité, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, le point du graphe est au-dessus du point de la corde :

$$\boxed{\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \sin x \geqslant \frac{2}{\pi}x}$$

□

Exercice — Application — Lemme de Jordan et intégrale

Soit R un réel strictement positif. On considère l'intégrale suivante :

$$I(R) = \int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

1. Montrer que pour tout $R > 0$, on a : $I(R) \leqslant \frac{\pi}{2R}(1 - e^{-R})$.
2. En déduire la limite de $I(R)$ lorsque $R \to +\infty$.

Indications :
- Exploiter la minoration de $\sin\theta$ par sa corde sur $[0, \pi/2]$.
- Prendre garde au changement de sens des inégalités lors de la composition par une fonction décroissante.
- Utiliser le théorème des gendarmes pour la limite.

Correction.

Idées clés :
- Substitution de l'argument de l'exponentielle par une forme linéaire.
- Calcul explicite d'une intégrale de référence.
- Encadrement de l'intégrale.

1. Majoration de l'intégrale $I(R)$. D'après le théorème de Jordan démontré précédemment, nous disposons de la minoration suivante :

$$\forall\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \sin\theta \geqslant \frac{2}{\pi}\theta$$

Comme $R > 0$, nous multiplions par $-R$, ce qui inverse l'inégalité :

$$-R\sin\theta \leqslant -\frac{2R}{\pi}\theta$$

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on conserve donc l'ordre :

$$e^{-R\sin\theta} \leqslant e^{-\frac{2R}{\pi}\theta}$$

Par croissance de l'intégrale sur $[0, \pi/2]$, il vient :

$$I(R) \leqslant \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2R}{\pi}\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

L'intégrande à droite possède une primitive immédiate. On calcule :

$$\int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2R}{\pi}\theta}\,\mathrm{d}\theta = \left[-\frac{\pi}{2R}e^{-\frac{2R}{\pi}\theta}\right]_0^{\pi/2}$$

En évaluant aux bornes $\theta = \pi/2$ et $\theta = 0$:

$$\left[-\frac{\pi}{2R}e^{-\frac{2R}{\pi}\theta}\right]_0^{\pi/2} = -\frac{\pi}{2R}\left(e^{-R} - e^0\right)$$

On obtient finalement la majoration souhaitée :

$$\boxed{I(R) \leqslant \frac{\pi}{2R}(1 - e^{-R})}$$

2. Détermination de la limite. L'intégrande $\theta \mapsto e^{-R\sin\theta}$ est strictement positif sur $[0, \pi/2]$, donc l'intégrale $I(R)$ est positive par positivité de l'intégrale :

$$\forall R > 0, \quad 0 < I(R) \leqslant \frac{\pi}{2R}(1 - e^{-R})$$

Étudions la limite du majorant lorsque R tend vers $+\infty$:

$$\lim_{R\to+\infty} e^{-R} = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{R\to+\infty} (1 - e^{-R}) = 1$$

Par produit avec $\frac{\pi}{2R}$ qui tend vers 0 :

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{\pi}{2R}(1 - e^{-R}) = 0$$

D'après le théorème d'encadrement, on conclut :

$$\boxed{\lim_{R\to+\infty} I(R) = 0}$$

Piège :
Attention à ne pas utiliser la majoration $\sin\theta \leqslant \theta$. En effet, par décroissance de la fonction $x \mapsto e^{-Rx}$, cela conduirait à :

$$e^{-R\sin\theta} \geqslant e^{-R\theta}$$

Ce qui donne une minoration de l'intégrale $I(R) \geqslant \frac{1}{R}(1-e^{-R\pi/2})$. Bien que vrai, cela ne permet absolument pas de justifier que l'intégrale tend vers 0.

À retenir :
La méthode consistant à remplacer une fonction trigonométrique par sa corde (minoration) ou sa tangente (majoration) est un réflexe classique en analyse dès que l'on manipule des fonctions concaves ou convexes.

‘‘‘

Régularité des fonctions convexes

Lemme — Inégalité des trois cordes. Soit f une fonction convexe sur un intervalle I. Pour tous $a, b, c \in I$ tels que $a < b < c$, on a :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

Preuve .

Idées clés :
- Utilisation de la définition de la convexité par combinaison convexe.
- Écriture de b comme barycentre de a et c.

Soient $a < b < c$ trois points de I. On peut écrire b sous la forme :

$$b = (1-\lambda)a + \lambda c \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{b-a}{c-a} \in]0,1[$$

Par convexité de f, on obtient :

$$f(b) \leq (1-\lambda)f(a) + \lambda f(c)$$

En soustrayant $f(a)$ des deux côtés :

$$f(b) - f(a) \leq \lambda(f(c)-f(a)) = \frac{b-a}{c-a}(f(c)-f(a))$$

Comme $b - a > 0$, on en déduit la première inégalité :

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a}}$$

De même, en soustrayant $f(c)$ et en réarrangeant les termes, on obtient la seconde inégalité :

$$\boxed{\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}}$$

□

Théorème — Continuité et dérivées latérales. Soit f une fonction convexe sur un intervalle I. Soit $x_0 \in \mathring{I}$ un point intérieur.

1. f admet une dérivée à gauche $f'_g(x_0)$ et une dérivée à droite $f'_d(x_0)$ finies.
2. f est continue en x_0.
3. On a l'inégalité : $f'_g(x_0) \leq f'_d(x_0)$.

Preuve .

Idées clés :
- Monotonie du taux d'accroissement via le lemme des trois cordes.
- Théorème de la limite monotone pour les fonctions croissantes.

Soit $x_0 \in \mathring{I}$. Considérons la fonction taux d'accroissement en x_0 :

$$\phi : x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

D'après le lemme des trois cordes, ϕ est croissante sur $I \setminus \{x_0\}$.

1. Existence des dérivées latérales Pour $h > 0$ tel que $x_0 + h \in I$, $\phi(x_0 + h)$ décroît quand $h \to 0^+$ et est minorée par n'importe quel taux d'accroissement à gauche (par exemple $\phi(x_0 - h)$).

D'après le théorème de la limite monotone :

$$\boxed{f'_d(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}}$$

Le raisonnement est analogue pour $f'_g(x_0)$ en considérant la limite à gauche.

2. Continuité L'existence de dérivées latérales finies en x_0 impose :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'_d(x_0) + o(h) \xrightarrow[h \to 0^+]{} f(x_0)$$

De même pour la limite à gauche. Ainsi :

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$$

3. Comparaison En appliquant le lemme des trois cordes sur $x_0 - h < x_0 < x_0 + h$, on a $\phi(x_0 - h) \leq \phi(x_0 + h)$. En passant à la limite :

$$\boxed{f'_g(x_0) \leq f'_d(x_0)}$$

$\square$

Théorème — Dérivabilité presque partout. L'ensemble des points de l'intérieur de I où une fonction convexe f n'est pas dérivable est au plus dénombrable.

Preuve .

Idées clés :

- Caractérisation de la dérivabilité par $f'_g(x) = f'_d(x)$.
- Utilisation de l'injectivité d'une application vers $\mathbb{Q}$.

Soit $D = \{x \in \mathring{I} \mid f'_g(x) < f'_d(x)\}$ l'ensemble des points de non-dérivabilité.

D'après la croissance des taux d'accroissement, si $x < y$ sont deux points de $\mathring{I}$, on a :

$$f'_g(x) \leq f'_d(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'_g(y) \leq f'_d(y)$$

Ainsi, les intervalles ouverts $J_x =]f'_g(x), f'_d(x)[$ pour $x \in D$ sont deux à deux disjoints.

En effet, si $x < y$, alors $\sup J_x = f'_d(x) \leq f'_g(y) = \inf J_y$.

Pour chaque $x \in D$, J_x est un intervalle ouvert non vide, il contient donc un nombre rationnel $q_x \in \mathbb{Q}$.

L'application $x \mapsto q_x$ est une injection de D dans $\mathbb{Q}$.

Comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable, on en conclut que :

$$\boxed{D \text{ est au plus dénombrable.}}$$

$\square$

Exercice — Application — Bornitude et convexité

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Montrer que si f est majorée sur $\mathbb{R}$, alors f est constante.
2. On suppose f dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que f' est croissante.

Indications :
- Raisonner par l'absurde ou utiliser la croissance des taux d'accroissement vers $\pm\infty$.
- Utiliser la définition de la dérivée et le lemme des trois cordes.

Correction.

Idées clés :
- Lien entre pentes des cordes et limites à l'infini.
- Caractérisation de la convexité par la monotonie de la dérivée.

1. Supposons qu'il existe $a < b$ tels que $f(a) \neq f(b)$. Considérons le taux d'accroissement $\tau(x) = \frac{f(x)-f(b)}{x-b}$ pour $x > b$.

D'après le lemme des trois cordes, τ est croissante. Si $f(b) > f(a)$, alors $\tau(b) > 0$ (au sens de la limite à droite).

Pour $x > b$, on a $f(x) = f(b) + (x - b)\tau(x) \geq f(b) + (x - b)\tau(b, a)$. Quand $x \to +\infty$, le terme de droite tend vers $+\infty$, ce qui contredit le fait que f est majorée.

De même si $f(b) < f(a)$, on regarde la limite en $-\infty$.

$$\boxed{f \text{ est constante.}}$$

2. Soient $x < y$. Pour tout $h > 0$ suffisamment petit, on a par le lemme des trois cordes :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq \frac{f(y) - f(x+h)}{y - (x+h)} \leq \frac{f(y+h) - f(y)}{h}$$

En passant à la limite quand $h \to 0$:

$$\boxed{f'(x) \leq f'(y)}$$

Piège :
Attention : une fonction convexe n'est pas nécessairement continue sur les bornes de son intervalle de définition (ex : $f(x) = x^2$ sur $]0, 1[$ et $f(0) = f(1) = 10$). La continuité n'est garantie que sur l'intérieur.

À retenir :
La convexité est une propriété de "pente croissante". Cela implique presque toute la régularité (continuité, dérivabilité à gauche/droite) sauf aux bords de l'intervalle.

‘‘‘

Convexité des fonctions continues vérifiant la propriété de la moyenne

Théorème — Caractérisation de la convexité par le point milieu.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction **continue**. On suppose que pour tout $(x, y) \in I^2$:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

Alors la fonction f est convexe sur I.

Preuve .

Idées clés :
- Inégalité de Jensen pour les rationnels dyadiques par récurrence.
- Densité de l'ensemble des nombres dyadiques dans $[0, 1]$.
- Prolongement de l'inégalité par continuité.

Soit $(x, y) \in I^2$. Quitte à échanger x et y, supposons $x < y$. Pour tout $\lambda \in [0, 1]$, on souhaite montrer que :

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

Étape 1 : Inégalité pour les dyadiques de $[0, 1]$. Considérons l'ensemble des nombres dyadiques de $[0, 1]$:

$$\mathbb{D} = \left\{\frac{k}{2^n} \mid n \in \mathbb{N},\, 0 \leqslant k \leqslant 2^n\right\}$$

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que pour tout $k \in \{0, \dots, 2^n\}$:

$$f\left(\frac{k}{2^n}x + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)y\right) \leqslant \frac{k}{2^n}f(x) + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)f(y)$$

Pour $n = 0$, l'inégalité est triviale pour $k = 0$ et $k = 1$. Pour $n = 1$, le cas $k = 1$ correspond exactement à l'hypothèse sur le point milieu :

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

Supposons la propriété vraie pour un rang $n \in \mathbb{N}$ fixé. Soit $k \in \{0, \dots, 2^{n+1}\}$. Si k est pair, $k = 2j$, alors $\frac{k}{2^{n+1}} = \frac{j}{2^n}$ et l'hypothèse de récurrence s'applique. Si k est impair, $k = 2j + 1$, on peut écrire :

$$\frac{k}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{j}{2^n} + \frac{j+1}{2^n}\right)$$

Posons $t_1 = \frac{j}{2^n}x + (1 - \frac{j}{2^n})y$ et $t_2 = \frac{j+1}{2^n}x + (1 - \frac{j+1}{2^n})y$. Par l'hypothèse sur le point milieu :

$$f\left(\frac{k}{2^{n+1}}x + (1 - \frac{k}{2^{n+1}})y\right) = f\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(t_1)+f(t_2)}{2}$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence sur $f(t_1)$ et $f(t_2)$, on obtient après calcul :

$$\frac{f(t_1)+f(t_2)}{2} \leqslant \frac{1}{2}\left[\left(\frac{j}{2^n} + \frac{j+1}{2^n}\right)f(x) + \left(2 - \frac{2j+1}{2^n}\right)f(y)\right]$$

Ce qui donne bien le résultat au rang $n + 1$. La propriété est vraie pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$.

Étape 2 : Passage à la limite par densité. Soit $\lambda \in [0, 1]$. Comme $\mathbb{D}$ est dense dans $[0, 1]$, il existe une suite $(\lambda_p)_{p \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{D}$ telle que :

$$\lim_{p \to +\infty} \lambda_p = \lambda$$

Pour chaque p, nous avons établi :

$$f(\lambda_p x + (1-\lambda_p)y) \leqslant \lambda_p f(x) + (1-\lambda_p) f(y)$$

Par continuité de f sur I, et par continuité de l'application $t \mapsto tx + (1-t)y$, nous pouvons passer à la limite quand $p \to +\infty$:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Conclusion : L'inégalité de convexité est vérifiée pour tout $\lambda \in [0,1]$, donc :

$$\boxed{f \text{ est convexe sur } I.}$$

□

Exercice — Application — Fonctions multiplicativement convexes

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue telle que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \sqrt{f(x)f(y)}$$

Montrer que la fonction $\ln \circ f$ est convexe.

2. En déduire que pour tout $\lambda \in [0,1]$:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant f(x)^{\lambda} f(y)^{1-\lambda}$$

Indications :
- Utiliser la croissance et la concavité de la fonction logarithme pour transformer l'inégalité sur f en une inégalité sur le point milieu pour $\ln \circ f$.
- Appliquer le théorème de caractérisation par le point milieu démontré précédemment.

Correction.

Idées clés :
- Composition d'une fonction continue par ln (continue).
- Transformation de la moyenne géométrique en moyenne arithmétique par le logarithme.

1. Considérons la fonction $g = \ln \circ f$. Puisque f est continue et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, g est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$. Par hypothèse, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, nous avons :

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \sqrt{f(x)f(y)}$$

En appliquant la fonction ln, qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, l'ordre est préservé :

$$\ln\left(f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) \leqslant \ln\left(\sqrt{f(x)f(y)}\right)$$

En utilisant les propriétés algébriques du logarithme ($\ln(\sqrt{ab}) = \frac{1}{2}(\ln a + \ln b)$), on obtient :

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{\ln(f(x)) + \ln(f(y))}{2} = \frac{g(x)+g(y)}{2}$$

$$\boxed{g = \ln \circ f \text{ vérifie la propriété du point milieu.}}$$

2. D'après le théorème démontré en première partie, la fonction g étant continue et vérifiant la propriété du point milieu, elle est convexe sur $\mathbb{R}$. Ainsi, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et tout $\lambda \in [0, 1]$:

$$g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leqslant \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y)$$

En revenant à f par l'exponentielle (fonction croissante) :

$$\exp(\ln(f(\lambda x + (1 - \lambda)y))) \leqslant \exp(\lambda \ln f(x) + (1 - \lambda) \ln f(y))$$

Par les propriétés de l'exponentielle :

$$\boxed{f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leqslant f(x)^\lambda f(y)^{1-\lambda}}$$

Piège :
Attention à ne pas oublier de justifier la continuité de la fonction composée. Sans la continuité, la propriété du point milieu n'implique pas la convexité (existence de bases de Hamel pour des contre-exemples pathologiques).

À retenir :
La continuité est une hypothèse cruciale. Pour une fonction continue, la convexité est une propriété "locale" au sens du point milieu qui se propage à tout l'intervalle par densité des dyadiques.

Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire continue

Théorème — Cas d'égalité de l'inégalité triangulaire intégrale.
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur $[a, b]$.
On a l'égalité :

$$\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right| = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

si et seulement s'il existe un nombre complexe u de module 1 (ou $u = 0$) tel que :

$$\forall t \in [a, b], \quad f(t) = |f(t)|u$$

Autrement dit, la fonction f a un argument constant (modulo 2π) sur l'ensemble des points où elle ne s'annule pas.

Preuve .

Idées clés :
- Utilisation d'un lemme sur les fonctions continues positives d'intégrale nulle.
- Rotation du complexe $\int f$ pour se ramener à une égalité sur les parties réelles.
- Étude du cas d'égalité dans $\mathrm{Re}(z) \leq |z|$.

Lemme : Soit $h : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue et positive. Si $\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors h est identiquement nulle sur $[a, b]$.

Preuve du lemme : Supposons qu'il existe $t_0 \in [a, b]$ tel que $h(t_0) > 0$. Par continuité de h en t_0, il existe un intervalle $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ avec $\alpha < \beta$ contenant t_0 tel que :

$$\forall t \in [\alpha, \beta], \quad h(t) \geq \frac{h(t_0)}{2}$$

Par croissance et linéarité de l'intégrale :

$$\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t \geq \int_\alpha^\beta h(t)\,\mathrm{d}t \geq \int_\alpha^\beta \frac{h(t_0)}{2}\,\mathrm{d}t = (\beta - \alpha)\frac{h(t_0)}{2} > 0$$

Ceci contredit l'hypothèse $\int_a^b h = 0$. Donc h est nulle.

Preuve du théorème :

($\Leftarrow$) Supposons $f = |f|u$ avec $|u| = 1$.

$$\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right| = \left| u \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \right| = |u| \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

($\Rightarrow$) Supposons que l'égalité soit vérifiée. Posons $I = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Cas 1 : $I = 0$. L'hypothèse implique $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t = 0$. Comme $t \mapsto |f(t)|$ est continue et positive, d'après le lemme, $|f| = 0$, d'où $f = 0$. Le résultat est vrai pour n'importe quel u de module 1.

Cas 2 : $I \neq 0$. On peut écrire I sous forme polaire : $I = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho = |I| > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Posons $u = e^{i\theta}$. On considère la fonction $g(t) = e^{-i\theta} f(t)$. On a alors :

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = e^{-i\theta} I = \rho = |I| = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t = \int_a^b |g(t)|\,\mathrm{d}t$$

En prenant la partie réelle :

$$\mathrm{Re}\left(\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \right) = \int_a^b \mathrm{Re}(g(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^b |g(t)|\,\mathrm{d}t$$

On en déduit :

$$\int_a^b (|g(t)| - \mathrm{Re}(g(t)))\,\mathrm{d}t = 0$$

Or, pour tout complexe z, $\mathrm{Re}(z) \leq |z|$, donc la fonction $t \mapsto |g(t)| - \mathrm{Re}(g(t))$ est continue et positive. D'après le lemme, elle est identiquement nulle :

$$\forall t \in [a,b], \quad \mathrm{Re}(g(t)) = |g(t)|$$

Ceci impose que $g(t)$ est un réel positif ou nul pour tout t. Comme $|g(t)| = |e^{-i\theta} f(t)| = |f(t)|$, on a $g(t) = |f(t)|$. Finalement :

$$\boxed{\forall t \in [a,b], \quad f(t) = e^{i\theta}|f(t)|}$$

□

Exercice — Cas d'égalité dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^n$.

1. Justifier l'inégalité $\|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\| \leq \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t$.
2. On suppose que $\|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\| = \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t$. Montrer qu'il existe un vecteur unitaire $v \in \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $t \in [a,b]$, $f(t) = \|f(t)\| v$.

Indications :

- Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec le vecteur $V = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Si $V \neq 0$, considérer le produit scalaire $\langle V, f(t)\rangle$ et étudier $\int_a^b (\|V\| \cdot \|f(t)\| - \langle V, f(t)\rangle)\,\mathrm{d}t$.

Correction.

Idées clés :

- Caractérisation de la norme par le produit scalaire.
- Utilisation du cas d'égalité de Cauchy-Schwarz.
- Application du lemme de l'intégrale d'une fonction continue positive nulle.

1. Posons $V = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}^n$. Par propriété de l'intégrale (linéarité du produit scalaire) :

$$\|V\|^2 = \langle V, V\rangle = \langle V, \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\rangle = \int_a^b \langle V, f(t)\rangle\,\mathrm{d}t$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\langle V, f(t)\rangle \leq \|V\| \cdot \|f(t)\|$. Par croissance de l'intégrale :

$$\|V\|^2 \leq \int_a^b \|V\| \cdot \|f(t)\|\,\mathrm{d}t = \|V\| \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t$$

Si $\|V\| = 0$, l'inégalité est triviale. Si $\|V\| \neq 0$, on simplifie par $\|V\|$ pour obtenir :

$$\boxed{\left\|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t}$$

2. Supposons l'égalité. Si $V = 0$, alors $\int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t = 0$, donc $f = 0$ et n'importe quel v convient. Si $V \neq 0$, les inégalités précédentes deviennent des égalités :

$$\int_a^b \langle V, f(t)\rangle\,\mathrm{d}t = \int_a^b \|V\| \cdot \|f(t)\|\,\mathrm{d}t$$

D'où :

$$\int_a^b (\|V\| \cdot \|f(t)\| - \langle V, f(t)\rangle) \, \mathrm{d}t = 0$$

La fonction $t \mapsto \|V\| \cdot \|f(t)\| - \langle V, f(t)\rangle$ est continue et positive (Cauchy-Schwarz). Son intégrale étant nulle, elle est identiquement nulle sur $[a, b]$. Ainsi, pour tout $t \in [a, b]$, on a le cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz :

$$\langle V, f(t)\rangle = \|V\| \cdot \|f(t)\|$$

Ceci implique que pour chaque t, $f(t)$ est colinéaire à V et de même sens. Il existe donc $\lambda(t) \geq 0$ tel que $f(t) = \lambda(t)V$. En prenant la norme, $\|f(t)\| = \lambda(t)\|V\|$, soit $\lambda(t) = \frac{\|f(t)\|}{\|V\|}$. En posant $v = \frac{V}{\|V\|}$, on a bien :

$$\boxed{\forall t \in [a, b], \quad f(t) = \|f(t)\| v}$$

Piège :
Attention à ne pas oublier le cas où l'intégrale est nulle. La colinéarité avec un vecteur constant v n'a de sens profond que si la fonction n'est pas presque partout nulle.

À retenir :
L'égalité dans l'inégalité triangulaire intégrale signifie que toutes les "valeurs" prises par la fonction pointent dans la même direction.

Méthode des rectangles : comparaison intégrale et valeur au point

Théorème — Estimation locale de l'erreur des rectangles.
Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{K})$ (avec $a<b$). On note $M_1(f) = \sup_{t\in[a,b]} |f'(t)|$. On a l'inégalité suivante :

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt - (b-a)f(a)\right| \leq \frac{(b-a)^2}{2} M_1(f)$$

Preuve .

Idées clés :
- Utilisation du lien entre une fonction et sa dérivée (théorème fondamental).
- Inégalité de la moyenne ou majoration directe de l'intégrale.
- Intégration de la borne obtenue.

Soit $t \in [a,b]$. Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, nous pouvons écrire d'après le théorème fondamental de l'analyse :

$$f(t) - f(a) = \int_a^t f'(u)\,du$$

En utilisant l'inégalité triangulaire sur l'intégrale, nous obtenons :

$$|f(t) - f(a)| = \left|\int_a^t f'(u)\,du\right| \leq \int_a^t |f'(u)|\,du$$

Par définition de la norme infinie $M_1(f)$ sur $[a,b]$, on a $|f'(u)| \leq M_1(f)$ pour tout $u \in [a,t]$. Il vient alors :

$$|f(t) - f(a)| \leq \int_a^t M_1(f)\,du = (t-a)M_1(f)$$

Nous souhaitons maintenant estimer l'écart entre l'intégrale de f et la valeur au point gauche. Par linéarité de l'intégrale, on remarque que :

$$\int_a^b f(t)\,dt - (b-a)f(a) = \int_a^b (f(t) - f(a))\,dt$$

En appliquant de nouveau l'inégalité triangulaire :

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt - (b-a)f(a)\right| \leq \int_a^b |f(t) - f(a)|\,dt$$

En injectant la majoration obtenue précédemment :

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt - (b-a)f(a)\right| \leq \int_a^b (t-a)M_1(f)\,dt$$

Le terme $M_1(f)$ étant constant, nous calculons l'intégrale restante :

$$\int_a^b (t-a)\,dt = \left[\frac{(t-a)^2}{2}\right]_a^b = \frac{(b-a)^2}{2}$$

On en déduit finalement le résultat escompté :

$$\boxed{\left|\int_a^b f(t)\,dt - (b-a)f(a)\right| \leq \frac{(b-a)^2}{2} M_1(f)}$$

□

Exercice — Application — Convergence de la méthode des rectangles composites
Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{K})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la subdivision régulière de $[a,b]$ définie par $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ pour $k \in \{0,\dots,n\}$. On définit la n-ième somme des rectangles à gauche par :

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt - R_n(f)\right| \leq \frac{(b-a)^2}{2n} M_1(f)$$

2. En déduire la limite de la suite $(R_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Indications :
- Utiliser la relation de Chasles pour décomposer l'intégrale sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$.
- Appliquer le théorème de l'estimation locale sur chaque petit intervalle de longueur $h = \frac{b-a}{n}$.
- Sommer les erreurs et utiliser l'inégalité triangulaire.

Correction.

Idées clés :
- Relation de Chasles adaptée à la subdivision.
- Application du résultat local avec un pas $h = \frac{b-a}{n}$.
- Majoration uniforme de la dérivée sur $[a,b]$.

1. Par la relation de Chasles, l'intégrale sur $[a,b]$ se décompose selon la subdivision :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt$$

On peut également réécrire la somme $R_n(f)$ en remarquant que $x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}$:

$$R_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)f(x_k)$$

Considérons l'erreur globale $E_n = \int_a^b f(t)\,dt - R_n(f)$. Par linéarité :

$$E_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt - (x_{k+1}-x_k)f(x_k)\right)$$

D'après l'inégalité triangulaire :

$$|E_n| \leq \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt - (x_{k+1}-x_k)f(x_k)\right|$$

Appliquons le théorème d'estimation locale sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$. La longueur de chaque intervalle est $h = \frac{b-a}{n}$. Le maximum de $|f'|$ sur $[x_k, x_{k+1}]$ est majoré par $M_1(f)$ (le maximum sur l'intervalle total). On obtient, pour chaque k :

$$\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt - (x_{k+1}-x_k)f(x_k)\right| \leq \frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{2}M_1(f) = \frac{(b-a)^2}{2n^2}M_1(f)$$

En sommant ces majorations pour k allant de 0 à $n-1$:

$$|E_n| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^2}{2n^2} M_1(f) = n \times \frac{(b-a)^2}{2n^2} M_1(f)$$

On conclut :

$$\boxed{\left| \int_a^b f(t)\,dt - R_n(f) \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2n} M_1(f)}$$

2. Le majorant $\frac{(b-a)^2}{2n} M_1(f)$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$ (car a, b et f sont fixés). D'après le théorème de gendarmerie (ou par définition de la limite) :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} R_n(f) = \int_a^b f(t)\,dt}$$

C'est le résultat classique sur la convergence des sommes de Riemann pour une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

> **Piège :**
> Attention à la puissance de n. Dans l'erreur locale, on a du $h^2 = \frac{1}{n^2}$, mais comme on somme n termes, l'erreur globale est en $\frac{1}{n}$. On dit que la méthode des rectangles est d'ordre 0 (exacte pour les constantes) et que sa vitesse de convergence est en $O(1/n)$.

> **À retenir :**
> Pour une fonction $\mathcal{C}^1$, l'erreur de la méthode des rectangles est proportionnelle au pas de la subdivision $h = \frac{b-a}{n}$. Pour obtenir une meilleure précision (en $1/n^2$), on utilise généralement la méthode des trapézes ou du point milieu.

Méthode des trapèzes : comparaison et contrôle de l'erreur par la dérivée seconde

Théorème — Estimation de l'erreur de la méthode des trapèzes.
Soit $f \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$. On note $T(f)$ l'approximation de l'intégrale de f par la méthode des trapèzes simple :

$$T(f) = \frac{b-a}{2}\,(f(a)+f(b))$$

Alors l'erreur commise, définie par $E(f) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - T(f)$, vérifie :

$$\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12}\|f''\|_\infty$$

où $\|f''\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f''(t)|$.

Preuve .

Idées clés :
- Utilisation d'une fonction auxiliaire polynomiale de degré 2.
- Double intégration par parties pour faire apparaître f''.
- Majoration de l'intégrale par la norme infinie.

Considérons le polynôme $q(t) = \frac{1}{2}(t-a)(t-b)$. Ce choix est motivé par le fait que $q(a) = q(b) = 0$ et que $q''(t) = 1$.

Effectuons une double intégration par parties sur l'intégrale $I = \int_a^b q(t)f''(t)\,\mathrm{d}t$. Les fonctions q et f sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$.

Première intégration par parties :

$$\int_a^b q(t)f''(t)\,\mathrm{d}t = \Big[q(t)f'(t)\Big]_a^b - \int_a^b q'(t)f'(t)\,\mathrm{d}t$$

Comme $q(a) = q(b) = 0$, le terme entre crochets s'annule. Il reste :

$$\int_a^b q(t)f''(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b \left(t - \frac{a+b}{2}\right) f'(t)\,\mathrm{d}t$$

Seconde intégration par parties : Posons $u'(t) = 1$ et $v(t) = \left(t - \frac{a+b}{2}\right) f'(t)$. Il est plus élégant d'intégrer directement :

$$-\int_a^b \left(t - \frac{a+b}{2}\right) f'(t)\,\mathrm{d}t = -\left[\left(t - \frac{a+b}{2}\right) f(t)\right]_a^b + \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Développons le terme de bord :

$$\left[\left(t - \frac{a+b}{2}\right) f(t)\right]_a^b = \left(b - \frac{a+b}{2}\right) f(b) - \left(a - \frac{a+b}{2}\right) f(a)$$

$$= \frac{b-a}{2} f(b) - \frac{a-b}{2} f(a) = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$$

On obtient donc l'identité exacte :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) = \int_a^b \frac{1}{2}(t-a)(t-b)f''(t)\,\mathrm{d}t}$$

Majoration de l'erreur : En passant à la valeur absolue et en utilisant l'inégalité triangulaire intégrale :

$$|E(f)| \le \int_a^b \frac{1}{2}|(t-a)(t-b)| \cdot |f''(t)| \,\mathrm{d}t \le \|f''\|_\infty \int_a^b \frac{1}{2}(t-a)(b-t)\,\mathrm{d}t$$

Calculons l'intégrale du poids (en posant $u = t-a$) :

$$\int_a^b \frac{1}{2}(t-a)(b-t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{b-a} u(b-a-u)\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{2}\left[(b-a)\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3}\right]_0^{b-a} = \frac{1}{2}\left(\frac{(b-a)^3}{2} - \frac{(b-a)^3}{3}\right) = \frac{(b-a)^3}{12}$$

D'où le résultat final :

$$\boxed{|E(f)| \le \frac{(b-a)^3}{12}\|f''\|_\infty}$$

□

Exercice — Méthode des trapèzes composée

Soit $f \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$. On considère une subdivision régulière de $[a,b]$ de pas $h = \frac{b-a}{n}$ définie par $x_k = a + kh$ pour $k \in \{0,\dots,n\}$. On définit l'approximation par la méthode des trapèzes composée :

$$\hat{T}_n(f) = \frac{b-a}{2n}\left(f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b)\right)$$

1. Justifier la formule de $\hat{T}_n(f)$ à partir de la méthode simple appliquée sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$.
2. Montrer que l'erreur globale $E_n(f) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \hat{T}_n(f)$ vérifie :

$$|E_n(f)| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2}\|f''\|_\infty$$

3. Application numérique : Pour calculer $\ln(2) = \int_1^2 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ à 10^{-4} près par cette méthode, quelle valeur de n suffit-il de choisir ?

Indications :
- Utiliser la relation de Chasles pour décomposer l'intégrale sur chaque $[x_k, x_{k+1}]$.
- Appliquer le théorème de l'erreur de la méthode simple à chaque petit intervalle et sommer les majorations.
- Calculer la dérivée seconde de $t \mapsto 1/t$ et majorer sa valeur absolue sur $[1,2]$.

Correction.

Idées clés :
- Additivité de l'erreur sur la subdivision.
- Relation entre le pas h et le nombre d'intervalles n.
- Majoration uniforme de f''.

1. Construction de la formule composée Par la relation de Chasles :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

En remplaçant chaque intégrale locale par son approximation trapézoïdale :

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t \approx \frac{x_{k+1}-x_k}{2}(f(x_k)+f(x_{k+1})) = \frac{h}{2}(f(x_k)+f(x_{k+1}))$$

En sommant, les termes $f(x_k)$ apparaissent deux fois (en fin d'intervalle et en début du suivant), sauf pour $x_0 = a$ et $x_n = b$. On obtient :

$$\boxed{\hat{T}_n(f) = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(x_n)\right)}$$

2. Majoration de l'erreur globale L'erreur totale est la somme des erreurs locales e_k sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$. D'après le théorème démontré précédemment :

$$|e_k| = \left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{h}{2}(f(x_k)+f(x_{k+1}))\right| \leq \frac{h^3}{12}\|f''\|_\infty$$

Par inégalité triangulaire :

$$|E_n(f)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |e_k| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^3}{12}\|f''\|_\infty = n \cdot \frac{h^3}{12}\|f''\|_\infty$$

Comme $h = \frac{b-a}{n}$, on a $nh^3 = n\frac{(b-a)^3}{n^3} = \frac{(b-a)^3}{n^2}$. On en déduit :

$$\boxed{|E_n(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2}\|f''\|_\infty}$$

3. Application numérique On a $f(t) = \frac{1}{t}$, donc $f'(t) = -\frac{1}{t^2}$ et $f''(t) = \frac{2}{t^3}$. Sur l'intervalle $[1, 2]$, la fonction $|f''|$ est décroissante, donc $\|f''\|_\infty = |f''(1)| = 2$. L'erreur est alors majorée par :

$$|E_n| \leq \frac{(2-1)^3}{12n^2} \cdot 2 = \frac{1}{6n^2}$$

On cherche n tel que $\frac{1}{6n^2} \leq 10^{-4}$, soit $n^2 \geq \frac{10^4}{6} \approx 1666,6$. Comme $\sqrt{1666,6} \approx 40,8$, il suffit de choisir :

$$\boxed{n \geq 41}$$

> **Piège :**
> Attention à ne pas oublier le facteur 2 devant la somme dans la formule composée, et à bien distinguer le pas h du nombre d'intervalles n dans la majoration finale.

> **À retenir :**
> La méthode des trapèzes est d'ordre 1 (exacte pour les fonctions affines, car $f'' = 0$). Son erreur globale est en $O(1/n^2)$, ce qui est plus performant que la méthode des rectangles ($O(1/n)$).

Savoir dériver $\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$

Théorème — Dérivation d'une intégrale à bornes mobiles.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur I. Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et $u, v : J \to I$ deux fonctions dérivables sur J.
La fonction G définie sur J par :

$$\forall x \in J, \quad G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\, dt$$

est dérivable sur J et sa dérivée est donnée par :

$$\forall x \in J, \quad G'(x) = v'(x) f(v(x)) - u'(x) f(u(x))$$

Preuve .

Idées clés :
- Utilisation du théorème fondamental de l'analyse (existence d'une primitive).
- Expression de l'intégrale comme différence de deux valeurs d'une primitive.
- Théorème de dérivation d'une fonction composée.

Soit $a \in I$. Puisque f est continue sur l'intervalle I, le théorème fondamental de l'analyse assure que f admet des primitives sur I. Soit F la primitive de f s'annulant en a, définie par :

$$\forall y \in I, \quad F(y) = \int_a^y f(t)\, dt$$

Par définition, F est dérivable sur I et $F' = f$.

D'après la relation de Chasles, nous pouvons écrire pour tout $x \in J$:

$$G(x) = \int_a^{v(x)} f(t)\, dt - \int_a^{u(x)} f(t)\, dt$$

Ce qui se réécrit à l'aide de F :

$$G(x) = F(v(x)) - F(u(x))$$

La fonction G est donc la différence de deux fonctions composées :

— $x \mapsto F(v(x))$ est dérivable sur J comme composée de v (dérivable de J dans I) et de F (dérivable sur I). Sa dérivée est $x \mapsto v'(x)F'(v(x)) = v'(x)f(v(x))$.

— $x \mapsto F(u(x))$ est dérivable sur J comme composée de u (dérivable de J dans I) et de F (dérivable sur I). Sa dérivée est $x \mapsto u'(x)F'(u(x)) = u'(x)f(u(x))$.

Par somme, G est dérivable sur J et on a :

$$\boxed{\forall x \in J, \quad G'(x) = v'(x) f(v(x)) - u'(x) f(u(x))}$$

□

Exercice — Étude d'une fonction définie par une intégrale
On considère la fonction f définie sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ par :

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$$

> 1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition et calculer sa dérivée.
> 2. Déterminer la limite de f en 1. En déduire que f peut être prolongée par continuité en 1.

Indications :
- Appliquer directement le théorème de dérivation des intégrales à bornes mobiles.
- Pour la limite en 1, effectuer un développement limité de l'intégrande ou utiliser la règle de l'Hôpital sur une expression de f après avoir remarqué que $\ln t \approx t-1$.

Correction.

Idées clés :
- Vérification des hypothèses de continuité et de dérivabilité des bornes.
- Utilisation d'un développement limité pour lever l'indétermination.

1. Dérivabilité et calcul de la dérivée.

Soit $I_1 =]0,1[$ et $I_2 =]1,+\infty[$. La fonction $h : t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est continue sur I_1 et sur I_2. Pour tout $x \in I_1$, $x^2 \in I_1$, et pour tout $x \in I_2$, $x^2 \in I_2$. Les bornes $u(x) = x$ et $v(x) = x^2$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et restent dans le même intervalle de continuité de h.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à bornes mobiles, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I_1 \cup I_2$ et :

$$\forall x \in I_1 \cup I_2, \quad f'(x) = v'(x)h(v(x)) - u'(x)h(u(x))$$

$$f'(x) = 2x\frac{1}{\ln(x^2)} - 1\frac{1}{\ln x}$$

Comme $\ln(x^2) = 2\ln x$, on obtient :

$$f'(x) = \frac{2x}{2\ln x} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}$$

On conclut :

$$\boxed{\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[, \quad f'(x) = \frac{x-1}{\ln x}}$$

2. Limite en 1 et prolongement.

Cherchons la limite de $f'(x)$ quand $x \to 1$. On sait que $\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + o(h^2)$. En posant $x = 1+h$, on a :

$$f'(x) = \frac{h}{\ln(1+h)} = \frac{h}{h - \frac{h^2}{2} + o(h^2)} = \frac{1}{1 - \frac{h}{2} + o(h)} = 1 + \frac{h}{2} + o(h)$$

Ainsi, $\lim_{x\to 1} f'(x) = 1$. D'après le théorème de la limite de la dérivée, si f admet une limite finie en 1, elle sera dérivable en 1 et $f'(1) = 1$.

Pour la limite de f en 1, posons $t = 1+u$. Pour t proche de 1, $\frac{1}{\ln t} = \frac{1}{u+O(u^2)} = \frac{1}{u} + O(1)$. Ainsi :

$$f(x) = \int_x^{x^2} \left(\frac{1}{t-1} + \phi(t)\right) dt$$

où ϕ est une fonction continue au voisinage de 1.

$$f(x) = [\ln|t-1|]_x^{x^2} + \int_x^{x^2} \phi(t)\, dt$$

$$f(x) = \ln|x^2-1| - \ln|x-1| + \int_x^{x^2} \phi(t)\, dt$$

$$f(x) = \ln|x-1| + \ln|x+1| - \ln|x-1| + \int_x^{x^2} \phi(t)\, dt$$

$$f(x) = \ln|x+1| + \int_x^{x^2} \phi(t)\,dt$$

Quand $x \to 1$, l'intégrale tend vers 0 car les bornes tendent vers 1 et l'intégrande est localement borné. On en déduit :

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \ln(2)$$

On peut donc prolonger f par continuité en posant $f(1) = \ln 2$.

$$\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to 1]{} \ln 2}$$

> **Piège :**
> Attention à ne pas oublier le terme $v'(x)$ ou $u'(x)$ devant les valeurs de f. Une erreur classique est d'écrire $f(v(x)) - f(u(x))$.

> **À retenir :**
> La dérivée de $x \mapsto \int_a^{g(x)} f(t)dt$ est simplement $g'(x)f(g(x))$. La formule générale n'est qu'une application de la relation de Chasles et de ce cas de base.

"'

Intégration des fractions rationnelles en sin et cos

Théorème — Règles de Bioche.

Soit $R(u, v)$ une fraction rationnelle à deux variables. On considère la forme différentielle $\omega(x) = R(\cos x, \sin x)\, dx$. Pour déterminer un changement de variable ramenant le calcul de l'intégrale de ω à celui d'une fraction rationnelle en une variable, on teste les invariances de ω :

1. Si $\omega(-x) = \omega(x)$, on peut effectuer le changement de variable $u = \cos x$.
2. Si $\omega(\pi - x) = \omega(x)$, on peut effectuer le changement de variable $u = \sin x$.
3. Si $\omega(\pi + x) = \omega(x)$, on peut effectuer le changement de variable $u = \tan x$.

Théorème — Changement de variable universel.

Toute intégrale d'une fraction rationnelle en sin et cos peut être transformée en l'intégrale d'une fraction rationnelle classique par le changement de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ sur un intervalle ne contenant pas de point de la forme $(2k + 1)\pi$. On a alors :

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad dx = \frac{2\, dt}{1 + t^2}$$

Preuve .

Idées clés :
- Utiliser la structure de l'espace des fractions rationnelles.
- Exploiter la parité et la périodicité de la forme différentielle.
- Réduire $\omega(x)$ à une expression de la forme $Q(u)\, du$.

Démontrons le premier cas des règles de Bioche. Les autres cas se traitent de manière analogue. Soit $\omega(x) = f(x)\, dx$ avec $f(x) = R(\cos x, \sin x)$.

Supposons $\omega(-x) = \omega(x)$. Cela signifie :

$$R(\cos(-x), \sin(-x))\, d(-x) = R(\cos x, \sin x)\, dx$$

En utilisant la parité du cosinus et l'imparité du sinus, on obtient :

$$-R(\cos x, -\sin x)\, dx = R(\cos x, \sin x)\, dx$$

D'où l'identité fonctionnelle :

$$R(\cos x, \sin x) = -R(\cos x, -\sin x)$$

Considérons la fraction rationnelle $S(u, v) = R(u, v)$. L'identité précédente impose que S est impaire par rapport à sa seconde variable v. Par propriété des fractions rationnelles, il existe une fraction rationnelle Q telle que :

$$R(u, v) = v \cdot Q(u, v^2)$$

En remplaçant u par $\cos x$ et v par $\sin x$, on a :

$$f(x) = \sin x \cdot Q(\cos x, \sin^2 x) = \sin x \cdot Q(\cos x, 1 - \cos^2 x)$$

Posons $g(\cos x) = -Q(\cos x, 1 - \cos^2 x)$. La forme différentielle devient :

$$\omega(x) = -g(\cos x) \cdot (-\sin x\, dx)$$

Comme $d(\cos x) = -\sin x\, dx$, nous avons :

$$\boxed{\omega(x) = g(\cos x)\, d(\cos x)}$$

Le changement de variable $u = \cos x$ transforme donc bien l'intégrale en une intégrale de fraction rationnelle en u. $\square$

Preuve .

> **Idées clés :**
> - Utilisation des formules de l'angle moitié.
> - Expression des fonctions circulaires comme fractions rationnelles en t.

Soit $t = \tan(x/2)$. On sait que $\cos^2(x/2) = \frac{1}{1+t^2}$. Alors :

$$\cos x = 2\cos^2(x/2) - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

De même :

$$\sin x = 2\sin(x/2)\cos(x/2) = 2\tan(x/2)\cos^2(x/2) = \frac{2t}{1+t^2}$$

Enfin, en dérivant $t = \tan(x/2)$, on a $dt = \frac{1}{2}(1+\tan^2(x/2))\, dx$, soit $dt = \frac{1}{2}(1+t^2)\, dx$. On en déduit :

$$\boxed{dx = \frac{2\, dt}{1+t^2}}$$

Toute fraction rationnelle $R(\cos x, \sin x)$ devient alors une fraction rationnelle en t après substitution. $\square$

> **Exercice — Calcul d'intégrales par les méthodes de Bioche**
>
> 1. Calculer une primitive de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{\cos x + \sin x}$.
> 2. Calculer l'intégrale $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$.

> **Indications :**
> - Pour la première question, tester les règles de Bioche. Si aucune ne fonctionne simplement, utiliser le changement de variable universel $t = \tan(x/2)$.
> - Pour la deuxième question, la règle de Bioche concernant $u = \cos x$ semble immédiate.

Correction.

> **Idées clés :**
> - Identification de la symétrie de la forme différentielle.
> - Application rigoureuse des formules de substitution.
> - Décomposition en éléments simples si nécessaire.

1. Calcul de $F(x) = \int \frac{dx}{\cos x + \sin x}$

Soit $\omega(x) = \frac{dx}{\cos x + \sin x}$. Testons les règles de Bioche :

— $\omega(-x) = \frac{-dx}{\cos x - \sin x} \neq \omega(x)$.

— $\omega(\pi - x) = \frac{-dx}{-\cos x + \sin x} \neq \omega(x)$.

— $\omega(\pi + x) = \frac{dx}{-\cos x - \sin x} \neq \omega(x)$.

Aucune règle de Bioche classique ne s'applique de façon évidente. Utilisons le changement $t = \tan(x/2)$. L'intégrale devient :

$$\int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{2\,dt}{1+2t-t^2}$$

Le dénominateur est $-(t^2-2t-1) = -((t-1)^2-2) = 2-(t-1)^2$. On reconnaît une forme dont la primitive est liée à l'argument tangente hyperbolique ou au logarithme :

$$\int \frac{2\,dt}{2-(t-1)^2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\,dt}{1-\left(\frac{t-1}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

En utilisant $\int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|$, on obtient :

$$F(x) = \sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\frac{t-1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{t-1}{\sqrt{2}}}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1+\tan(x/2)}{\sqrt{2}+1-\tan(x/2)}\right| + C$$

2. Calcul de $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$

Posons $\omega(x) = \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$. On vérifie la règle de Bioche :

$$\omega(-x) = \frac{\sin(-x)}{1+\cos^2(-x)}\,d(-x) = \frac{-\sin x}{1+\cos^2 x}(-dx) = \omega(x)$$

Le changement de variable $u = \cos x$ est préconisé. On a $du = -\sin x\,dx$. Bornes : si $x = 0, u = 1$. Si $x = \pi/2, u = 0$. L'intégrale devient :

$$I = \int_1^0 \frac{-du}{1+u^2} = \int_0^1 \frac{du}{1+u^2}$$

C'est une intégrale de référence :

$$I = \Big[\arctan(u)\Big]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0)$$

$$\boxed{I = \frac{\pi}{4}}$$

> **Piège :**
> Attention à ne pas oublier le terme dx lors du test des règles de Bioche. C'est la forme différentielle $\omega(x) = f(x)\,dx$ tout entière qui doit être invariante, et non seulement la fonction $f(x)$.

> **À retenir :**
> Si les règles de Bioche échouent ou semblent mener à des calculs trop lourds, la transformation en $\tan(x/2)$ est systématique, mais elle conduit souvent à des fractions rationnelles de degré élevé.

Intégration des fonctions de la forme $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$

Théorème — Réduction des intégrales abéliennes du second degré.
Soit $Q(x) = ax^2+bx+c$ un trinôme du second degré à coefficients réels ($a \neq 0$). Soit $R(u,v)$ une fraction rationnelle à deux variables. Toute primitive de la forme $\int R(x, \sqrt{Q(x)})\,dx$ se ramène, par un changement de variable affine, à l'un des trois types fondamentaux suivants :

1. $\int \tilde{R}(u, \sqrt{1+u^2})\,du$, traité par $u = \sinh t$ ou $u = \tan\theta$.
2. $\int \tilde{R}(u, \sqrt{u^2-1})\,du$, traité par $u = \cosh t$.
3. $\int \tilde{R}(u, \sqrt{1-u^2})\,du$, traité par $u = \sin\theta$ ou $u = \cos\theta$.

Preuve .

Idées clés :
- Mise sous forme canonique du trinôme.
- Distinction des cas selon le signe de a et du discriminant Δ.
- Changement de variable affine pour normaliser la constante.

Considérons le trinôme $Q(x) = ax^2+bx+c$. Sa forme canonique est donnée par :

$$Q(x) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Posons $u = x + \frac{b}{2a}$, ce qui implique $dx = du$. L'expression devient $a\left(u^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$.
Cas 1 : $a > 0$.

— Si $\Delta < 0$, alors $-\frac{\Delta}{4a^2} = k^2 > 0$. On a $Q(x) = a(u^2+k^2) = ak^2\left(\left(\frac{u}{k}\right)^2+1\right)$. Le changement de variable $v = u/k$ ramène à la forme $\sqrt{v^2+1}$.

— Si $\Delta > 0$, alors $-\frac{\Delta}{4a^2} = -k^2 < 0$. On a $Q(x) = a(u^2-k^2) = ak^2\left(\left(\frac{u}{k}\right)^2-1\right)$. Le changement de variable $v = u/k$ ramène à la forme $\sqrt{v^2-1}$.

Cas 2 : $a < 0$.

— Pour que la racine carrée soit définie sur un intervalle non trivial, il faut $\Delta > 0$. On pose $a = -|a|$. Alors $Q(x) = -|a|\left(u^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) = |a|\left(\frac{\Delta}{4a^2} - u^2\right)$. En posant $k^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$, on a $Q(x) = |a|k^2\left(1-\left(\frac{u}{k}\right)^2\right)$. Le changement de variable $v = u/k$ ramène à la forme $\sqrt{1-v^2}$.

Dans chaque cas, on obtient une fraction rationnelle en $(v, \sqrt{\pm v^2 \pm 1})$, qui se transforme en fraction rationnelle classique par les changements de variables trigonométriques ou hyperboliques cités.

$$\boxed{\text{La méthode est ainsi démontrée par réduction canonique.}}$$

□

Exercice — Calcul de primitives fondamentales
Calculer les primitives suivantes sur des intervalles de définition appropriés :

1. $I = \int \sqrt{x^2+1}\,dx$
2. $J = \int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+1}}$

Indications :
- Pour I, effectuer le changement de variable $x = \sinh t$ et utiliser les formules de linéarisation de $\cosh^2 t$.
- Pour J, multiplier par la quantité conjuguée du dénominateur avant d'intégrer.

Correction.

Idées clés :
- Paramétrisation hyperbolique $x = \sinh t$.
- Relation $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ et linéarisation $\cosh^2 t = \frac{1+\cosh 2t}{2}$.
- Utilisation de la quantité conjuguée pour simplifier une fraction.

1. Calcul de $I = \int \sqrt{x^2+1}\, dx$

Effectuons le changement de variable $x = \sinh t$. La fonction sinh est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On a alors $dx = \cosh t\, dt$. Comme $x^2 + 1 = \sinh^2 t + 1 = \cosh^2 t$ et que $\cosh t > 0$, on a $\sqrt{x^2+1} = \cosh t$.

L'intégrale devient :

$$I = \int \cosh^2 t\, dt$$

En utilisant la formule de linéarisation $\cosh^2 t = \frac{1+\cosh(2t)}{2}$, on obtient :

$$I = \frac{1}{2}\int (1 + \cosh(2t))\, dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sinh(2t)}{2}\right) + C$$

On utilise ensuite la formule $\sinh(2t) = 2 \sinh t \cosh t$ pour revenir à la variable x :

$$I = \frac{1}{2}(t + \sinh t \cosh t) + C$$

Or, $t = \operatorname{argsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, $\sinh t = x$ et $\cosh t = \sqrt{x^2+1}$. D'où :

$$\boxed{I = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+1} + \ln(x + \sqrt{x^2+1})\right) + C}$$

2. Calcul de $J = \int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+1}}$

Remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2+1} > |x|$, donc le dénominateur ne s'annule jamais. Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée $\sqrt{x^2+1} - x$:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)} = \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{(x^2+1)-x^2} = \sqrt{x^2+1} - x$$

On en déduit :

$$J = \int (\sqrt{x^2+1} - x)\, dx = \int \sqrt{x^2+1}\, dx - \int x\, dx$$

En utilisant le résultat de la question précédente :

$$J = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+1} + \ln(x + \sqrt{x^2+1})\right) - \frac{x^2}{2} + C$$

$$\boxed{J = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+1} - x^2 + \ln(x + \sqrt{x^2+1})\right) + C}$$

Piège :
Attention lors du retour à la variable x dans le cas de $\sqrt{u^2-1}$: il faut être vigilant sur le signe de u (et donc de $\sinh t$) selon l'intervalle d'étude, car $\sqrt{\sinh^2 t} = |\sinh t|$.

À retenir :
La méthode de la quantité conjuguée est souvent plus rapide que le changement de variable direct lorsque le terme $\sqrt{Q(x)} \pm (mx + p)$ apparaît au dénominateur.

Lemme de Riemann-Lebesgue

Théorème — Lemme de Riemann-Lebesgue. Énoncé. Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ $(a < b)$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$. Alors :

$$\lim_{\lambda \to \pm\infty} \int_a^b f(t) e^{i\lambda t} \, \mathrm{d}t = 0$$

En particulier, on a également :

$$\lim_{\lambda \to \pm\infty} \int_a^b f(t) \cos(\lambda t) \, \mathrm{d}t = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\lambda \to \pm\infty} \int_a^b f(t) \sin(\lambda t) \, \mathrm{d}t = 0$$

Preuve .

Idées clés :
- Traiter d'abord le cas d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ par intégration par parties.
- Utiliser la densité des fonctions en escalier (ou des fonctions $\mathcal{C}^1$) pour le cas général.
- Conclure par une majoration de type $\varepsilon/2$.

Étape 1 : Cas où f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Supposons que $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{C})$. Pour $\lambda \neq 0$, effectuons une intégration par parties :

$$\int_a^b f(t) e^{i\lambda t} \, \mathrm{d}t = \left[f(t) \frac{e^{i\lambda t}}{i\lambda} \right]_a^b - \int_a^b f'(t) \frac{e^{i\lambda t}}{i\lambda} \, \mathrm{d}t$$

On en déduit la majoration suivante par l'inégalité triangulaire :

$$\left| \int_a^b f(t) e^{i\lambda t} \, \mathrm{d}t \right| \leq \frac{|f(b) e^{i\lambda b} - f(a) e^{i\lambda a}|}{|\lambda|} + \frac{1}{|\lambda|} \int_a^b |f'(t)| \, \mathrm{d}t$$

Comme $|e^{ix}| = 1$ pour tout x réel, on a :

$$\left| \int_a^b f(t) e^{i\lambda t} \, \mathrm{d}t \right| \leq \frac{|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)| \, \mathrm{d}t}{|\lambda|}$$

Le numérateur est une constante indépendante de λ. Par passage à la limite :

$$\boxed{\lim_{\lambda \to \pm\infty} \int_a^b f(t) e^{i\lambda t} \, \mathrm{d}t = 0}$$

Étape 2 : Cas où f est continue par morceaux. Soit $\varepsilon > 0$. D'après le cours sur l'intégration, l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$ est dense dans l'espace des fonctions continues par morceaux pour la norme $\| \cdot \|_1$. Il existe donc une fonction en escalier φ telle que :

$$\int_a^b |f(t) - \varphi(t)| \, \mathrm{d}t \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

La fonction φ est une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques d'intervalles $I_k = [a_k, b_k]$. Pour une telle fonction caractéristique $\mathbb{1}_{[a_k, b_k]}$, on a :

$$\int_a^b \mathbb{1}_{[a_k, b_k]}(t) e^{i\lambda t} \, \mathrm{d}t = \int_{a_k}^{b_k} e^{i\lambda t} \, \mathrm{d}t = \frac{e^{i\lambda b_k} - e^{i\lambda a_k}}{i\lambda} \xrightarrow{\lambda \to \infty} 0$$

Par linéarité, l'intégrale $\int_a^b \varphi(t)e^{i\lambda t}dt$ tend vers 0 quand $\lambda \to \infty$. Il existe donc $A > 0$ tel que pour tout $|\lambda| \geq A$:

$$\left|\int_a^b \varphi(t)e^{i\lambda t}\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

En écrivant $f = (f - \varphi) + \varphi$, on obtient :

$$\left|\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t) - \varphi(t)|\,\mathrm{d}t + \left|\int_a^b \varphi(t)e^{i\lambda t}\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ceci prouve que l'intégrale tend vers 0. □

Exercice — Application — Limite d'une intégrale oscillante

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\sin^2(nx)\,\mathrm{d}x$$

Indications :
- Utiliser une formule de linéarisation trigonométrique pour $\sin^2(nx)$.
- Appliquer le lemme de Riemann-Lebesgue au terme oscillant.

Correction.

Idées clés :
- Formule : $\sin^2(\theta) = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$.
- Linéarité de l'intégrale.
- Lemme de Riemann-Lebesgue pour la partie en $\cos(2nx)$.

1. Linéarisation du terme trigonométrique Pour tout $x \in [a, b]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on utilise la formule de duplication du cosinus :

$$\cos(2nx) = 1 - 2\sin^2(nx) \implies \sin^2(nx) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2nx)$$

2. Décomposition de l'intégrale En injectant cette expression dans l'intégrale, on obtient par linéarité :

$$\int_a^b f(x)\sin^2(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_a^b f(x)\cos(2nx)\,\mathrm{d}x$$

3. Application du lemme de Riemann-Lebesgue La fonction f est continue par morceaux sur le segment $[a, b]$. D'après le lemme de Riemann-Lebesgue démontré précédemment, en posant $\lambda_n = 2n$:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\cos(2nx)\,\mathrm{d}x = 0$$

Le second terme de la somme tend donc vers 0.

4. Conclusion Par somme de limites, on en déduit immédiatement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\sin^2(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$$

Piège :
Attention à ne pas appliquer le lemme de Riemann-Lebesgue si l'intervalle d'intégration n'est pas un segment ou si la fonction n'est pas intégrable. Ici, sur un segment, la continuité par morceaux suffit.

À retenir :
La méthode de linéarisation combinée au lemme de Riemann-Lebesgue est un classique pour étudier la limite de $\int f(x)P(\cos(nx), \sin(nx))\mathrm{d}x$ où P est un polynôme. La limite est alors $\left(\int_a^b f\right) \times$ (valeur moyenne de P).

Intégrales de Wallis et application à la formule de Stirling

Théorème — Propriétés des intégrales de Wallis. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. **Relation de récurrence :** Pour tout $n \geq 2$, $W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}$.
2. **Produit de deux termes consécutifs :** Pour tout $n \geq 1$, $nW_nW_{n-1} = \frac{\pi}{2}$.
3. **Équivalent en l'infini :** $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Preuve .

Idées clés :
- Intégration par parties (IPP) pour la récurrence.
- Étude de la monotonie de la suite (W_n).
- Utilisation du théorème des gendarmes pour l'équivalent.

1. Relation de récurrence. Pour $n \geq 2$, on écrit $\sin^n(t) = \sin(t) \cdot \sin^{n-1}(t)$. Effectuons une intégration par parties en posant : $u(t) = \sin^{n-1}(t) \implies u'(t) = (n-1)\cos(t)\sin^{n-2}(t)$, $v'(t) = \sin(t) \implies v(t) = -\cos(t)$.

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$, donc :

$$W_n = \Big[-\cos(t)\sin^{n-1}(t)\Big]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\sin^{n-2}(t)\,\mathrm{d}t$$

Le terme entre crochets est nul. Comme $\cos^2(t) = 1 - \sin^2(t)$, on obtient :

$$W_n = (n-1)\int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2(t))\sin^{n-2}(t)\,\mathrm{d}t = (n-1)(W_{n-2} - W_n)$$

D'où l'on tire $nW_n = (n-1)W_{n-2}$, soit :

$$\boxed{W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}}$$

2. Produit de deux termes consécutifs. On considère la suite (u_n) définie par $u_n = nW_nW_{n-1}$ pour $n \geq 1$. D'après la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = (n+1)W_{n+1}W_n = (n+1)\left(\frac{n}{n+1}W_{n-1}\right)W_n = nW_nW_{n-1} = u_n$$

La suite (u_n) est constante. Calculons u_1 : $W_0 = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = \int_0^{\pi/2} \sin(t)\,\mathrm{d}t = 1$. D'où $u_1 = 1 \cdot W_1 \cdot W_0 = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, pour tout $n \geq 1$:

$$\boxed{nW_nW_{n-1} = \frac{\pi}{2}}$$

3. Équivalent de W_n. Pour tout $t \in [0, \pi/2]$, $0 \leq \sin(t) \leq 1$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sin^{n+1}(t) \leq \sin^n(t)$. Par croissance de l'intégrale, la suite (W_n) est décroissante. Ainsi, pour $n \geq 1$:

$$W_{n+1} \leq W_n \leq W_{n-1}$$

En divisant par W_{n-1} (qui est strictement positif), on obtient :

$$\frac{n}{n+1} = \frac{W_{n+1}}{W_{n-1}} \leq \frac{W_n}{W_{n-1}} \leq 1$$

Par le théorème des gendarmes, $\frac{W_n}{W_{n-1}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$, donc $W_n \sim W_{n-1}$. En utilisant $nW_nW_{n-1} = \frac{\pi}{2}$, on a $nW_n^2 \sim \frac{\pi}{2}$. Par positivité de W_n :

$$\boxed{W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$$

□

Exercice — Calcul de la constante de Stirling

On admet qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$n! \sim C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Déterminer la valeur de C en utilisant les intégrales de Wallis.

Indications :

- Exprimer W_{2p} à l'aide de factorielles en itérant la relation de récurrence.
- Injecter l'équivalent de Stirling dans cette expression.
- Comparer avec l'équivalent de W_n obtenu précédemment.

Correction.

Idées clés :

- Formule explicite de W_{2p}.
- Substitution de l'équivalent de $n!$.
- Identification avec $W_{2p} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4p}}$.

1. Expression de W_{2p} avec des factorielles. En itérant la relation $W_{2p} = \frac{2p-1}{2p}W_{2p-2}$, on obtient :

$$W_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)\dots 1}{2p(2p-2)\dots 2}W_0$$

Le dénominateur est $2^p p!$. Le numérateur se multiplie par le dénominateur pour faire apparaître $(2p)!$:

$$(2p-1)(2p-3)\dots 1 = \frac{(2p)!}{2^p p!}$$

Ainsi, comme $W_0 = \frac{\pi}{2}$:

$$\boxed{W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2}}$$

2. Injection de l'équivalent de Stirling. Supposons $n! \sim C\sqrt{n}(n/e)^n$. Alors :

$$(p!)^2 \sim C^2 p\left(\frac{p}{e}\right)^{2p}$$

Et pour $(2p)!$:

$$(2p)! \sim C\sqrt{2p}\left(\frac{2p}{e}\right)^{2p}$$

Substituons ces équivalents dans l'expression de W_{2p} :

$$W_{2p} \sim \frac{C\sqrt{2p}(2p/e)^{2p}}{2^{2p}C^2p(p/e)^{2p}}\frac{\pi}{2}$$

En simplifiant par $(p/e)^{2p}$ et 2^{2p} :

$$W_{2p} \sim \frac{C\sqrt{2p}}{C^2 p}\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{C\sqrt{p}}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{C\sqrt{2p}}$$

3. Identification de la constante. Nous avons établi par ailleurs que $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$, donc :

$$W_{2p} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4p}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p}}$$

Par unicité de l'équivalent, on identifie les deux expressions :

$$\frac{\pi}{C\sqrt{2p}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p}} \implies \frac{\pi}{C\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

D'où l'on tire :

$$C = \frac{2\pi}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{2\pi}$$

On en déduit la célèbre formule de Stirling :

$$\boxed{n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$$

Piège :
Attention à ne pas oublier le terme $\pi/2$ dans l'expression de W_{2p}. Une erreur classique consiste à itérer la récurrence sans tenir compte de la condition initiale W_0.

À retenir :
La méthode de Laplace ou l'étude de la série de terme général $u_n = \ln(\frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}})$ permet d'établir l'existence de la constante C. Wallis est l'outil standard pour en fixer la valeur.

“‘

Théorème de relèvement $\mathcal{C}^k$ pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{U}$

Théorème — Relèvement de la phase (cas $\mathcal{C}^k$).
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$.
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ ne s'annulant jamais, telle que pour tout $t \in I$, $|f(t)| = 1$ (i.e. f est à valeurs dans le cercle unité $\mathbb{U}$).
Alors, il existe une fonction $\theta : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ telle que :

$$\forall t \in I, \quad f(t) = e^{i\theta(t)}$$

De plus, si θ_1 et θ_2 sont deux telles fonctions, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta_1 = \theta_2 + 2n\pi$.

Preuve .

Idées clés :
- Analyse de la condition nécessaire par dérivation : $\theta' = f'/(if)$.
- Vérification que f'/f est à valeurs imaginaires pures.
- Construction par intégration et ajustement de la condition initiale.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{U}$ de classe $\mathcal{C}^k$. Supposons qu'une telle fonction θ existe. Par dérivation de $f(t) = e^{i\theta(t)}$, on obtient $f'(t) = i\theta'(t)e^{i\theta(t)} = i\theta'(t)f(t)$. Comme f ne s'annule pas, on doit avoir $\theta'(t) = \frac{f'(t)}{if(t)}$.

Considérons la fonction $g : t \mapsto \frac{f'(t)}{if(t)}$. Puisque f est de classe $\mathcal{C}^k$ et ne s'annule pas, g est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur I.

Montrons que g est à valeurs réelles. Pour tout $t \in I$, on a $|f(t)|^2 = 1$, soit $f(t)\overline{f(t)} = 1$. En dérivant cette relation, on obtient :

$$f'(t)\overline{f(t)} + f(t)\overline{f'(t)} = 0$$

En divisant par $f(t)\overline{f(t)} = 1$, il vient :

$$\frac{f'(t)}{f(t)} + \frac{\overline{f'(t)}}{\overline{f(t)}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2\mathrm{Re}\left(\frac{f'(t)}{f(t)}\right) = 0$$

Ainsi, $\frac{f'(t)}{f(t)}$ est imaginaire pur, donc $g(t) = \frac{1}{i}\frac{f'(t)}{f(t)}$ est bien un nombre réel.

Fixons $t_0 \in I$. Puisque $f(t_0) \in \mathbb{U}$, il existe un réel θ_0 tel que $f(t_0) = e^{i\theta_0}$. Définissons alors la fonction θ sur I par :

$$\boxed{\theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{f'(s)}{if(s)}\, ds}$$

Par construction, θ est de classe $\mathcal{C}^k$ (primitive d'une fonction $\mathcal{C}^{k-1}$) et vérifie $\theta(t_0) = \theta_0$.

Considérons la fonction auxiliaire $h : t \mapsto f(t)e^{-i\theta(t)}$. Elle est de classe $\mathcal{C}^k$ et sa dérivée est :

$$h'(t) = f'(t)e^{-i\theta(t)} - i\theta'(t)f(t)e^{-i\theta(t)} = \left(f'(t) - i\frac{f'(t)}{if(t)}f(t)\right)e^{-i\theta(t)} = 0$$

La fonction h est donc constante sur l'intervalle I. Comme $h(t_0) = f(t_0)e^{-i\theta_0} = 1$, on en déduit que pour tout $t \in I$, $h(t) = 1$.

$$\boxed{\forall t \in I, \quad f(t) = e^{i\theta(t)}}$$

L'unicité à $2n\pi$ près découle du fait que si $e^{i\theta_1(t)} = e^{i\theta_2(t)}$, alors $\theta_1(t) - \theta_2(t) \in 2\pi\mathbb{Z}$. Par continuité de la différence sur l'intervalle I, cette fonction discrète doit être constante. $\square$

Exercice — Application — Indice d'un lacet et calcul d'intégrale

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{U}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = f(1)$ (lacet de $\mathbb{U}$).

1. Justifier l'existence d'une fonction $\theta : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f = e^{i\theta}$.
2. Montrer que le nombre $n = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt$ est un entier relatif.
3. Calculer cet entier pour $f(t) = e^{2i\pi mt}$ où $m \in \mathbb{Z}$.

Indications :
- Appliquer directement le théorème de relèvement sur l'intervalle $[0,1]$.
- Utiliser la relation $\theta'(t) = \frac{f'(t)}{if(t)}$ et le fait que $f(0) = f(1)$ impose une contrainte sur $\theta(1) - \theta(0)$.
- Injecter la forme explicite de f dans l'intégrale ou utiliser la variation de la phase.

Correction.

Idées clés :
- Lien entre l'intégrale de la dérivée logarithmique et la variation de la phase.
- Périodicité du lacet impliquant un saut de phase multiple de 2π.

1. Existence du relèvement.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $I = [0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{U}$. D'après le théorème de relèvement $\mathcal{C}^k$ (cas $k = 1$), il existe une fonction $\theta : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :

$$\boxed{\forall t \in [0,1], \quad f(t) = e^{i\theta(t)}}$$

2. Nature de l'intégrale.

Exprimons le terme sous l'intégrale à l'aide de θ. En dérivant $f(t) = e^{i\theta(t)}$, on a $f'(t) = i\theta'(t)e^{i\theta(t)}$, d'où :

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = i\theta'(t)$$

L'intégrale devient alors :

$$J = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 i\theta'(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \theta'(t)\,dt$$

Par le théorème fondamental de l'analyse, on obtient :

$$\boxed{J = \frac{\theta(1) - \theta(0)}{2\pi}}$$

Or, nous savons que $f(0) = f(1)$. Cela implique $e^{i\theta(0)} = e^{i\theta(1)}$, ce qui signifie que :

$$\theta(1) - \theta(0) \in 2\pi\mathbb{Z}$$

Il existe donc un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta(1) - \theta(0) = 2\pi n$. On conclut que $J = n$, donc $J \in \mathbb{Z}$.

3. Exemple du cercle parcouru m fois.

Soit $f(t) = e^{2i\pi mt}$. On peut choisir $\theta(t) = 2\pi mt$. Cette fonction est bien de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie le relèvement. Calculons la variation de phase :

$$\theta(1) - \theta(0) = 2\pi m - 0 = 2\pi m$$

L'entier n vaut alors :

$$\boxed{n = \frac{2\pi m}{2\pi} = m}$$

Piège :
Attention à ne pas oublier que même si $f(0) = f(1)$, on n'a pas nécessairement $\theta(0) = \theta(1)$. La fonction θ "compte" le nombre de tours effectués autour de l'origine.

À retenir :
Le nombre $n = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f'(t)}{f(t)} dt$ s'appelle l'indice du lacet par rapport à l'origine. Il mesure la variation totale de l'argument divisée par 2π.

Intégrales de référence : fonction Gamma, monômes et orthogonalité trigonométrique

Théorème 1 — Intégrale d'Euler pour la factorielle. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx$ converge et :

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx = n!$$

Preuve .

Idées clés :
- Justification de la convergence par comparaison aux intégrales de Riemann.
- Établissement d'une relation de récurrence par intégration par parties.
- Initialisation et conclusion par récurrence.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $f_n : x \mapsto x^n e^{-x}$. La fonction f_n est continue sur $[0, +\infty[$.
Par croissances comparées, on a :

$$x^2 f_n(x) = x^{n+2} e^{-x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

Ainsi, au voisinage de $+\infty$, on a $f_n(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Comme $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, par comparaison de fonctions positives, l'intégrale I_n converge.

Calculons I_0 :

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = \left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = 1 = 0!$$

Pour $n \geq 1$, effectuons une intégration par parties sur $[0, A]$: Posons $u(x) = x^n$ et $v'(x) = e^{-x}$. On a $u'(x) = nx^{n-1}$ et $v(x) = -e^{-x}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$.

$$\int_0^A x^n e^{-x}\, dx = \left[-x^n e^{-x}\right]_0^A + n \int_0^A x^{n-1} e^{-x}\, dx$$

En faisant tendre A vers $+\infty$, par croissances comparées, $\lim_{A \to +\infty} A^n e^{-A} = 0$. On obtient la relation de récurrence :

$$\boxed{I_n = nI_{n-1}}$$

Par une récurrence immédiate, on conclut :

$$\boxed{I_n = n! I_0 = n!}$$

□

Théorème 2 — Intégration des monômes décalés. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $(a, x) \in \mathbb{R}^2$:

$$\int_{[a,x]} |t-a|^n\, dt = \frac{|x-a|^{n+1}}{n+1}$$

Preuve .

Idées clés :
- Distinction des cas $x \geq a$ et $x < a$.
- Utilisation d'un changement de variable simple ou d'une primitive directe.

Supposons d'abord $x \geq a$. L'intervalle d'intégration est $[a, x]$. Pour tout $t \in [a, x]$, on a $|t-a| = t-a$.

$$\int_a^x (t-a)^n \, dt = \left[\frac{(t-a)^{n+1}}{n+1}\right]_a^x = \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

Comme $x - a \geq 0$, on a $(x-a)^{n+1} = |x-a|^{n+1}$.

Supposons maintenant $x < a$. L'intervalle d'intégration est $[x, a]$. Pour tout $t \in [x, a]$, on a $|t-a| = a - t$.

$$\int_x^a (a-t)^n \, dt = \left[-\frac{(a-t)^{n+1}}{n+1}\right]_x^a = \frac{(a-x)^{n+1}}{n+1}$$

Comme $a - x = |x-a|$, on retrouve :

$$\boxed{\int_{[a,x]} |t-a|^n \, dt = \frac{|x-a|^{n+1}}{n+1}}$$

□

Théorème 3 — Relations d'orthogonalité trigonométrique. Pour tous $p, q \in \mathbb{Z}$:

1. $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ipx} e^{-iqx} \, dx = \delta_{p,q}$
2. $\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(px)\cos(qx) \, dx = \delta_{p,q}$ (pour $p, q > 0$)
3. $\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(px)\sin(qx) \, dx = \delta_{p,q}$ (pour $p, q > 0$)

Preuve .

Idées clés :
- Calcul direct pour l'exponentielle complexe.
- Utilisation des formules de linéarisation pour les fonctions réelles.

1. Cas des exponentielles complexes : Calculons $J = \int_0^{2\pi} e^{i(p-q)x} \, dx$. Si $p = q$, alors $e^{i(p-q)x} = 1$, d'où $J = 2\pi$. Si $p \neq q$, alors $p - q$ est un entier non nul :

$$J = \left[\frac{e^{i(p-q)x}}{i(p-q)}\right]_0^{2\pi} = \frac{1-1}{i(p-q)} = 0$$

D'où $\frac{1}{2\pi} J = \delta_{p,q}$.

2. Cas des cosinus (pour $p, q > 0$) : Utilisons la formule $\cos(A)\cos(B) = \frac{1}{2}(\cos(A+B) + \cos(A-B))$.

$$\int_0^{2\pi} \cos(px)\cos(qx) \, dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos((p+q)x) \, dx + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos((p-q)x) \, dx$$

L'intégrale d'un cosinus sur un nombre entier de périodes est nulle, sauf si l'argument est nul. Comme $p, q > 0$, on a $p + q > 0$, donc la première intégrale est nulle. La seconde intégrale est nulle si $p \neq q$ et vaut 2π si $p = q$. D'où le résultat :

$$\boxed{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(px)\cos(qx) \, dx = \delta_{p,q}}$$

□

Exercice — Application — Calcul d'intégrales par changement de variable

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a > 0$. Calculer l'intégrale suivante en utilisant le théorème 1 :

$$J_n(a) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-at}\, dt$$

Indications :
- Effectuer le changement de variable $x = at$.
- Vérifier soigneusement la validité du changement de variable sur un intervalle non borné.

Correction.

Idées clés :
- Changement de variable affine.
- Utilisation de la linéarité de l'intégrale.

Soit $a > 0$. On considère le changement de variable $x = at$. La fonction $\phi : t \mapsto at$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme strictement croissant de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$. On a $dx = a\, dt$, soit $dt = \frac{dx}{a}$.

En substituant dans l'intégrale :

$$J_n(a) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{a}\right)^n e^{-x} \frac{dx}{a}$$

Par linéarité de l'intégrale (la convergence ayant été établie au théorème 1) :

$$J_n(a) = \frac{1}{a^{n+1}} \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx$$

D'après le théorème 1, l'intégrale vaut $n!$. On obtient ainsi :

$$\boxed{J_n(a) = \frac{n!}{a^{n+1}}}$$

Piège :
Attention à ne pas oublier la puissance de a provenant du différentiel dt. Une erreur classique consiste à écrire a^n au lieu de a^{n+1}.

À retenir :
La formule $\int_0^{+\infty} t^n e^{-at}\, dt = \frac{n!}{a^{n+1}}$ est extrêmement fréquente dans les calculs de moments de lois de probabilités (Loi Gamma, Loi Exponentielle).

“‘

Exemple d'intégrale semi-convergente : $\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t} dt$

Propriété — Convergence de l'intégrale de Dirichlet complexe.
Soit $a > 0$. L'intégrale impropre
$$\int_a^{+\infty} \frac{e^{it}}{t} dt$$
est convergente.

Preuve .

Idées clés :
- Intégration par parties pour augmenter la puissance du dénominateur.
- Analyse de la convergence du terme de bord.
- Étude de la convergence absolue de l'intégrale résultante.

Soit $X > a$. Considérons l'intégrale sur l'intervalle compact $[a, X]$:
$$I(X) = \int_a^X \frac{e^{it}}{t} dt$$
Effectuons une intégration par parties. Posons les fonctions u et v définies par :
$$\forall t \in [a, X], \quad u(t) = \frac{1}{t} \implies u'(t) = -\frac{1}{t^2}$$
$$\forall t \in [a, X], \quad v'(t) = e^{it} \Longleftarrow v(t) = \frac{e^{it}}{i}$$
Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, X]$. Par intégration par parties, nous obtenons :
$$\int_a^X \frac{e^{it}}{t} dt = \left[\frac{e^{it}}{it}\right]_a^X - \int_a^X \left(-\frac{1}{t^2}\right) \frac{e^{it}}{i} dt$$
Ce qui se réécrit :
$$I(X) = \frac{e^{iX}}{iX} - \frac{e^{ia}}{ia} + \frac{1}{i} \int_a^X \frac{e^{it}}{t^2} dt$$
Étudions la limite de chaque terme lorsque $X \to +\infty$:
1. Pour le terme de bord :
$$\left|\frac{e^{iX}}{iX}\right| = \frac{1}{X} \xrightarrow[X \to +\infty]{} 0$$
Ainsi, le terme $\frac{e^{iX}}{iX} - \frac{e^{ia}}{ia}$ admet une limite finie égale à $-\frac{e^{ia}}{ia}$.
2. Pour l'intégrale au membre de droite : Considérons la fonction $f : t \mapsto \frac{e^{it}}{t^2}$. On a :
$$\forall t \geq a, \quad |f(t)| = \frac{1}{t^2}$$
Or, l'intégrale de Riemann $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge car $2 > 1$. Par comparaison, l'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^2} dt$ est absolument convergente, donc convergente.

En conclusion, comme somme de termes ayant une limite finie, $I(X)$ admet une limite finie lorsque $X \to +\infty$.
$$\boxed{\int_a^{+\infty} \frac{e^{it}}{t} dt \text{ converge.}}$$
$\square$

Exercice — Nature de la convergence de l'intégrale de Dirichlet
On considère l'intégrale impropre :

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t} dt$$

1. Justifier la convergence de I.
2. Étudier la convergence absolue de I.
3. En déduire que I est une intégrale semi-convergente.

Indications :
- Utiliser une intégration par parties comme dans la preuve précédente pour la convergence simple.
- Pour la convergence absolue, étudier le module de l'intégrande et utiliser les intégrales de Riemann.
- Se rappeler la définition d'une intégrale semi-convergente : convergence simple sans convergence absolue.

Correction.

Idées clés :
- Convergence simple par intégration par parties.
- Divergence de l'intégrale des modules par comparaison à une intégrale de Riemann.
- Synthèse des deux résultats.

1. Convergence de l'intégrale

D'après la démonstration effectuée dans la partie théorique, une intégration par parties montre que pour tout $X > 1$:

$$\int_1^X \frac{e^{it}}{t} dt = \frac{e^{iX}}{iX} - \frac{e^i}{i} + \frac{1}{i}\int_1^X \frac{e^{it}}{t^2} dt$$

Le terme $\frac{e^{iX}}{iX}$ tend vers 0 quand X tend vers l'infini.
L'intégrale $\int_1^X \frac{e^{it}}{t^2} dt$ converge absolument par comparaison avec l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$.
Ainsi, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t} dt$ est convergente.

$$\boxed{I \text{ converge.}}$$

2. Étude de la convergence absolue

Examinons l'intégrale du module de la fonction $f(t) = \frac{e^{it}}{t}$ sur $[1, +\infty[$.
Pour tout $t \in [1, +\infty[$, on a :

$$|f(t)| = \left|\frac{e^{it}}{t}\right| = \frac{|e^{it}|}{t} = \frac{1}{t}$$

Nous savons que l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ est divergente (cas $\alpha = 1$).
Par conséquent, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \left|\frac{e^{it}}{t}\right| dt$ diverge.

$$\boxed{I \text{ n'est pas absolument convergente.}}$$

3. Conclusion

Une intégrale est dite semi-convergente si elle est convergente mais n'est pas absolument convergente.
D'après les points précédents, I vérifie ces deux conditions.

$$\boxed{I = \int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t} dt \text{ est semi-convergente.}}$$

Piège :
Attention à ne pas utiliser l'équivalence pour des fonctions qui ne sont pas de signe constant. Ici, l'intégrande est à valeurs complexes. Il est impératif de passer au module pour étudier la convergence absolue.

À retenir :
La méthode de l'intégration par parties est l'outil privilégié pour prouver la convergence d'intégrales oscillantes (type Dirichlet ou Fresnel) où l'absolue convergence fait défaut.

Intégrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$

Théorème — Convergence et nature de l'intégrale de Dirichlet.
Soit $f : t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ définie sur $]0, +\infty[$.

1. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente.
2. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ n'est pas absolument convergente.
3. La valeur de l'intégrale est :
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

Preuve .

Idées clés :
- Prolongement par continuité en 0.
- Intégration par parties pour la convergence en $+\infty$.
- Minoration par une série divergente pour la non-absolue convergence.

1. Convergence de l'intégrale

La fonction $f : t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$.
En 0, on a le développement limité $\sin t = t + o(t)$, d'où :
$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$
La fonction f est donc prolongeable par continuité en 0. L'intégrale est ainsi faussement impropre en 0.

Pour le voisinage de $+\infty$, effectuons une intégration par parties sur $[1, X]$ pour $X > 1$:
$$\int_1^X \frac{\sin t}{t} dt = \left[\frac{-\cos t}{t}\right]_1^X - \int_1^X \frac{\cos t}{t^2} dt$$
En développant le crochet :
$$\int_1^X \frac{\sin t}{t} dt = \cos(1) - \frac{\cos X}{X} - \int_1^X \frac{\cos t}{t^2} dt$$
Analysons la limite quand $X \to +\infty$:

— $\lim_{X \to +\infty} \frac{\cos X}{X} = 0$ par encadrement ($|\cos X| \leq 1$).

— La fonction $t \mapsto \frac{\cos t}{t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et vérifie $\left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$. Comme $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ est absolument convergente, donc convergente.

On en déduit que $\int_1^X \frac{\sin t}{t} dt$ admet une limite finie quand $X \to +\infty$.
$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \text{ converge.}}$$

2. Non-absolue convergence

Considérons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale sur les tranches $[n\pi, (n+1)\pi]$:
$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt$$
Sur l'intervalle $[n\pi, (n+1)\pi]$, on a $t \leq (n+1)\pi$, donc $\frac{1}{t} \geq \frac{1}{(n+1)\pi}$. Ainsi :
$$u_n \geq \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t| dt$$

Par 2-périodicité de la valeur absolue du sinus et par le changement de variable $u = t - n\pi$:

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t|dt = \int_0^{\pi} \sin u du = [-\cos u]_0^{\pi} = 2$$

On obtient la minoration :

$$u_n \geq \frac{2}{(n+1)\pi}$$

Le terme de droite est le terme général d'une série divergente (série harmonique décalée). Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ diverge.

Comme $\int_0^{(N+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}dt = \sum_{n=0}^{N} u_n$, l'intégrale diverge vers $+\infty$.

$$\boxed{\text{L'intégrale n'est pas absolument convergente.}}$$

□

Exercice — Calcul par une intégrale à paramètre

Soit F la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt$$

1. Justifier la définition de F sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et calculer sa dérivée.
3. Déterminer la limite de F en $+\infty$.
4. En déduire l'expression de $F(x)$ pour $x > 0$.
5. En admettant la continuité de F en 0, retrouver la valeur de l'intégrale de Dirichlet.

Indications :

- Pour $x > 0$, la convergence est absolue grâce à l'exponentielle décroissante.
- Utiliser le théorème de dérivation sous le signe somme sur tout segment $[a, b] \subset]0, +\infty[$.
- Appliquer le théorème de convergence dominée ou une majoration directe de $|F(x)|$.
- Intégrer $F'(x)$ et utiliser la limite en $+\infty$ pour fixer la constante.

Correction.

Idées clés :

- Dérivation sous l'intégrale : domination locale sur $[a, +\infty[$.
- Calcul d'intégrale de type $e^{-xt} \sin t$ par les complexes.
- Exploitation de $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

1. Définition de F

Soit $g(x, t) = e^{-xt}\frac{\sin t}{t}$. Pour $x = 0$, $F(0)$ est l'intégrale de Dirichlet dont la convergence a été prouvée. Pour $x > 0$, la fonction $t \mapsto g(x, t)$ est continue sur $]0, +\infty[$, prolongeable par continuité en 0 (limite 1). Au voisinage de $+\infty$, $|g(x, t)| \leq e^{-xt}$ car $\left|\frac{\sin t}{t}\right| \leq 1$. Comme $x > 0$, $t \mapsto e^{-xt}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

2. Classe $\mathcal{C}^1$ et dérivée

Soit $a > 0$. Pour $x \in [a, +\infty[$, la fonction dérivée partielle par rapport à x est :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = -e^{-xt} \sin t$$

— Pour tout $x \in [a, +\infty[$, $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0, +\infty[$.

— Pour tout $t \in]0, +\infty[$, $x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue.

— Domination : $\forall x \geq a$, $\forall t \geq 0$, $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq e^{-at}|\sin t| \leq e^{-at}$.

La fonction $t \mapsto e^{-at}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. Par théorème de dérivation sous le signe somme, F est $\mathcal{C}^1$ sur tout $[a, +\infty[$, donc sur $]0, +\infty[$.

Calculons $F'(x)$:

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} -e^{-xt} \sin t dt = -\mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{-(x-i)t} dt\right)$$

Pour $x > 0$, l'intégrale converge et :

$$\int_0^{+\infty} e^{-(x-i)t} dt = \left[\frac{e^{-(x-i)t}}{-(x-i)}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x-i} = \frac{x+i}{x^2+1}$$

D'où :

$$\boxed{F'(x) = -\mathrm{Im}\left(\frac{x+i}{x^2+1}\right) = -\frac{1}{1+x^2}}$$

3. Limite en $+\infty$

Pour $x > 0$, on a :

$$|F(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt}\left|\frac{\sin t}{t}\right| dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$$

Par encadrement :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0}$$

4. Expression de $F(x)$

En intégrant $F'(x)$, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $F(x) = -\arctan(x) + C$ pour tout $x > 0$. En tendant vers $+\infty$:

$$0 = -\frac{\pi}{2} + C \implies C = \frac{\pi}{2}$$

Ainsi, pour tout $x > 0$:

$$\boxed{F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)}$$

5. Conclusion

En admettant la continuité de F en 0, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = F(0) = \lim_{x\to 0^+} F(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x)\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}}$$

Piège :
Attention, la continuité de F en 0 n'est pas triviale car la domination habituelle $|e^{-xt}\frac{\sin t}{t}| \leq |\frac{\sin t}{t}|$ n'est pas exploitable (la fonction majorante n'est pas intégrable). Une preuve rigoureuse utilise souvent une intégration par parties ou le critère d'Abel.

À retenir :
La convergence de Dirichlet est un exemple classique d'intégrale convergente mais non absolument convergente. La technique de l'intégrale à paramètre e^{-xt} est une méthode standard pour transformer une intégrale généralisée difficile en un calcul de primitive élémentaire.

Intégrales du type $\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x} dx$

Théorème — Intégrales de Frullani.
Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que :

1. f admet une limite finie L en 0^+.
2. f admet une limite finie M en $+\infty$.

Alors, pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x} dx$ converge et :

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x} dx = (L-M)\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Preuve .

Idées clés :
- Utilisation de la relation de Chasles sur un segment $[\varepsilon, X]$.
- Changements de variables linéaires pour ramener les bornes à des formes comparables.
- Étude de la limite d'intégrales du type $\int_{\alpha\varepsilon}^{\beta\varepsilon} \frac{f(t)}{t} dt$ quand $\varepsilon \to 0$.

Soient $0 < \varepsilon < X < +\infty$. On considère l'intégrale :

$$I(\varepsilon, X) = \int_\varepsilon^X \frac{f(ax)-f(bx)}{x} dx$$

Par linéarité de l'intégrale sur un segment, on peut séparer les deux termes :

$$I(\varepsilon, X) = \int_\varepsilon^X \frac{f(ax)}{x} dx - \int_\varepsilon^X \frac{f(bx)}{x} dx$$

Effectuons le changement de variable $u = ax$ (donc $du = a\,dx$) dans la première intégrale, et $v = bx$ (donc $dv = b\,dx$) dans la seconde :

$$I(\varepsilon, X) = \int_{a\varepsilon}^{aX} \frac{f(u)}{u/a}\frac{du}{a} - \int_{b\varepsilon}^{bX} \frac{f(v)}{v/b}\frac{dv}{b} = \int_{a\varepsilon}^{aX} \frac{f(t)}{t} dt - \int_{b\varepsilon}^{bX} \frac{f(t)}{t} dt$$

En utilisant la relation de Chasles, on décompose ces intégrales :

$$I(\varepsilon, X) = \left(\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(t)}{t} dt + \int_{b\varepsilon}^{aX} \frac{f(t)}{t} dt\right) - \left(\int_{b\varepsilon}^{aX} \frac{f(t)}{t} dt + \int_{aX}^{bX} \frac{f(t)}{t} dt\right)$$

Après simplification des termes communs, on obtient :

$$I(\varepsilon, X) = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(t)}{t} dt - \int_{aX}^{bX} \frac{f(t)}{t} dt$$

Étudions la première intégrale lorsque $\varepsilon \to 0$. Comme f est continue en 0, on peut écrire $f(t) = L + \epsilon(t)$ avec $\lim_{t\to 0} \epsilon(t) = 0$.

$$\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(t)}{t} dt = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{L}{t} dt + \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{\epsilon(t)}{t} dt = L\ln\left(\frac{b}{a}\right) + \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{\epsilon(t)}{t} dt$$

Pour le second terme, soit $\eta > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que $|t| \leq \delta \implies |\epsilon(t)| \leq \eta$. Pour ε assez petit, on a :

$$\left|\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{\epsilon(t)}{t} dt\right| \leq \int_{\min(a\varepsilon,b\varepsilon)}^{\max(a\varepsilon,b\varepsilon)} \frac{|\epsilon(t)|}{t} dt \leq \eta\left|\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right|$$

Ceci prouve que :

$$\boxed{\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{f(t)}{t}\,dt = L\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

De la même manière, en posant $f(t) = M + \epsilon_\infty(t)$ au voisinage de $+\infty$, on démontre que :

$$\boxed{\lim_{X\to+\infty}\int_{aX}^{bX}\frac{f(t)}{t}\,dt = M\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

En combinant ces deux limites, l'intégrale généralisée converge et :

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = (L-M)\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

□

Exercice — Application — Calcul d'une intégrale semi-convergente

Soient a et b deux réels strictement positifs.

1. Justifier la convergence de l'intégrale $J = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx$.
2. Déterminer sa valeur.
3. On considère désormais l'intégrale $K = \int_0^{+\infty}\frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}\,dx$. Montrer que K converge et calculer sa valeur en utilisant une méthode similaire.

Indications :
- Identifier la fonction f pour appliquer le théorème de Frullani.
- Vérifier scrupuleusement l'existence des limites de $\cos(x)$ à l'infini. Attention : le théorème de Frullani ne s'applique pas directement car cos n'a pas de limite en $+\infty$.
- Pour K, revenir à la définition sur $[\varepsilon, X]$ et utiliser une intégration par parties pour le terme en X.

Correction.

Idées clés :
- Application directe de Frullani pour l'exponentielle.
- Cas de la fonction cosinus : absence de limite à l'infini compensée par l'oscillation.
- Lemme de Riemann-Lebesgue ou intégration par parties pour la limite à l'infini.

1. et 2. Posons $f(x) = e^{-x}$. La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$. On vérifie les limites :

$$L = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1, \quad M = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

D'après le théorème de Frullani, l'intégrale converge et vaut :

$$\boxed{J = (1-0)\ln\left(\frac{b}{a}\right) = \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

3. Considérons $K(\varepsilon, X) = \int_\varepsilon^X \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}\,dx$. Par le même changement de variable que dans la preuve du cours :

$$K(\varepsilon, X) = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{\cos(t)}{t}\,dt - \int_{aX}^{bX}\frac{\cos(t)}{t}\,dt$$

Le premier terme tend vers $\cos(0)\ln(b/a) = \ln(b/a)$ quand $\varepsilon \to 0$.

Pour le second terme, effectuons une intégration par parties :

$$\int_{aX}^{bX} \frac{\cos(t)}{t}\, dt = \left[\frac{\sin(t)}{t}\right]_{aX}^{bX} + \int_{aX}^{bX} \frac{\sin(t)}{t^2}\, dt$$

On a les majorations suivantes :

$$\left| \left[\frac{\sin(t)}{t}\right]_{aX}^{bX} \right| \leq \frac{1}{bX} + \frac{1}{aX} \xrightarrow[X\to+\infty]{} 0$$

$$\left| \int_{aX}^{bX} \frac{\sin(t)}{t^2}\, dt \right| \leq \int_{aX}^{bX} \frac{1}{t^2}\, dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_{aX}^{bX} = \frac{1}{aX} - \frac{1}{bX} \xrightarrow[X\to+\infty]{} 0$$

Ainsi, le second terme tend vers 0 quand $X \to +\infty$. On en conclut que l'intégrale converge et :

$$\boxed{K = \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Piège :
Ne pas appliquer Frullani aveuglément. Si $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ n'existe pas, le théorème ne s'applique pas. Il faut alors traiter le terme en X séparément, souvent par une intégration par parties si f est une fonction oscillante dont la primitive est bornée.

À retenir :
La structure de la preuve de Frullani est aussi importante que le résultat lui-même. Elle permet de traiter des cas où les limites n'existent pas (comme cos ou sin) en adaptant l'argument pour le terme à l'infini.

Convergence d'une intégrale et limite de la fonction en l'infini

Propriété — Absence de lien entre convergence et limite nulle. Énoncé. Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Contrairement au cas des séries numériques (où le terme général tend vers zéro), la fonction f ne tend pas nécessairement vers 0 en $+\infty$.
Il est même possible que f ne soit pas bornée au voisinage de $+\infty$.

Preuve .

Idées clés :
- Construction d'une fonction par "pics" de plus en plus hauts mais de plus en plus fins.
- Contrôle de l'aire des pics pour assurer la convergence de l'intégrale.
- Justification de la continuité et du caractère non borné.

La démonstration de cette propriété consiste en la construction explicite d'un contre-exemple. Nous construisons une fonction f dont le graphe présente des pics de hauteur croissante centrés sur les entiers, mais dont la surface totale sous la courbe reste finie.

Considérons, pour tout entier $n \geq 2$, un triangle de sommet (n, n) et de base posée sur l'axe des abscisses, d'une largeur $2\delta_n$. Pour que l'intégrale converge, nous imposons que la somme des aires de ces triangles soit finie. L'aire du n-ième triangle est donnée par :

$$\mathcal{A}_n = \frac{1}{2} \times (2\delta_n) \times n = n\delta_n$$

En choisissant $\delta_n = \frac{1}{n^3}$, l'aire devient $\mathcal{A}_n = \frac{1}{n^2}$. Comme la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge, l'intégrale totale convergera. Puisque $f(n) = n$, la fonction est non bornée et ne tend pas vers 0.

$$\boxed{\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty \quad \text{et} \quad \limsup_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$$

□

Exercice — Construction d'un contre-exemple non borné

Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie de la manière suivante : Pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, on pose $I_n = \left[n - \frac{1}{n^3}, n + \frac{1}{n^3}\right]$.

— Si $x \in I_n$, $f(x) = n\left(1 - n^3|x - n|\right)$.

— Si $x \notin \bigcup_{n \geq 2} I_n$, $f(x) = 0$.

1. Justifier que la fonction f est bien définie et continue sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
3. Étudier la limite de f en $+\infty$ et son caractère borné.

Indications :
- Pour la continuité, vérifiez que les intervalles I_n sont disjoints à partir d'un certain rang et que f est nulle aux bornes de chaque intervalle.
- L'intégrale d'une fonction positive sur un intervalle non borné se ramène à la limite de l'intégrale sur $[0, X]$. Ici, utilisez la somme des aires des triangles.
- Regardez la suite des valeurs $(f(n))_{n \geq 2}$.

Correction.

> **Idées clés :**
> - Séparation des supports des pics (intervalles disjoints).
> - Calcul de l'intégrale par sommation d'aires élémentaires (triangles).
> - Divergence de la suite $(f(n))$ pour prouver l'absence de limite nulle.

1. Définition et continuité. Pour $n \geq 2$, la largeur de l'intervalle I_n est $2/n^3$. Le bord droit de I_n est $n+1/n^3$ et le bord gauche de I_{n+1} est $(n+1)-1/(n+1)^3$. Puisque $1/n^3+1/(n+1)^3 < 1$ pour tout $n \geq 2$, les intervalles I_n sont deux à deux disjoints.

Sur chaque intervalle I_n, f est une fonction affine par morceaux (forme de tente), donc continue. Aux bornes de I_n, c'est-à-dire pour $x = n \pm 1/n^3$, on a :

$$f(n \pm 1/n^3) = n(1 - n^3 \cdot \frac{1}{n^3}) = 0$$

Comme f est identiquement nulle en dehors de ces intervalles, f est continue par raccordement en chaque borne.

$$\boxed{f \in \mathcal{C}^0([0,+\infty[,\mathbb{R})}$$

2. Convergence de l'intégrale. La fonction f est positive. L'intégrale sur $[0,X]$ est une fonction croissante de X. Pour $X > n+1$, on a par additivité de l'intégrale :

$$\int_0^X f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=2}^{n} \int_{I_k} f(t)\,\mathrm{d}t$$

L'intégrale sur I_k correspond à l'aire d'un triangle de base $2/k^3$ et de hauteur k :

$$\int_{I_k} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \times \frac{2}{k^3} \times k = \frac{1}{k^2}$$

Ainsi, $\int_0^X f(t)\,\mathrm{d}t$ tend vers la somme de la série de Riemann $\sum \frac{1}{k^2}$ quand $X \to +\infty$. Cette série étant convergente, l'intégrale converge.

$$\boxed{\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1}$$

3. Comportement en l'infini. Considérons la suite de points $x_n = n$. On a :

$$f(x_n) = f(n) = n$$

Puisque $x_n \to +\infty$ et $f(x_n) \to +\infty$, la fonction f n'est pas bornée sur $[0,+\infty[$. Par conséquent, f ne peut pas admettre de limite finie en $+\infty$. En particulier :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0}$$

> **Piège :**
> Attention à ne pas confondre ce résultat avec le **lemme de Barbălat** : si f est intégrable sur $[0,+\infty[$ **et uniformément continue**, alors $f(x) \to 0$. Ici, la fonction n'est pas uniformément continue car les pentes des pics (n^4) tendent vers l'infini.

> **À retenir :**
> La convergence d'une intégrale généralisée sur $[a,+\infty[$ n'impose la limite nulle à la fonction que sous une hypothèse supplémentaire de régularité (typiquement la continuité uniforme ou l'existence d'une limite).

"

Continuité uniforme et convergence d'intégrales : Lemme de Barbalat

Théorème — Lemme de Barbalat.

Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue sur $[0, +\infty[$. Si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

Preuve .

Idées clés :
- Raisonnement par l'absurde.
- Utilisation de la définition de la continuité uniforme pour contrôler les variations de f.
- Utilisation du critère de Cauchy pour la convergence des intégrales impropres.

Supposons que $f(x)$ ne tende pas vers 0 lorsque $x \to +\infty$.

Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $A \in \mathbb{R}_+$, il existe $x \geq A$ vérifiant $|f(x)| \geq \varepsilon$. Par l'uniforme continuité de f sur $[0, +\infty[$, pour cet ε, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall (x, y) \in [0, +\infty[^2, \quad |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

On construit alors une suite (x_n) de réels telle que $x_0 \geq 0$ et pour tout n, $x_{n+1} \geq x_n + \delta$ avec $|f(x_n)| \geq \varepsilon$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in [x_n, x_n + \delta]$, on a par l'inégalité triangulaire inversée :

$$|f(t)| \geq |f(x_n)| - |f(t) - f(x_n)|$$

Comme $|t - x_n| \leq \delta$, on en déduit :

$$|f(t)| \geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Puisque f est continue et que $|f(t)| \geq \frac{\varepsilon}{2} > 0$ sur l'intervalle $[x_n, x_n + \delta]$, la fonction f y garde un signe constant. Dès lors, la valeur absolue de l'intégrale sur cet intervalle est égale à l'intégrale de la valeur absolue :

$$\left| \int_{x_n}^{x_n+\delta} f(t)\,\mathrm{d}t \right| = \int_{x_n}^{x_n+\delta} |f(t)|\,\mathrm{d}t \geq \int_{x_n}^{x_n+\delta} \frac{\varepsilon}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{\varepsilon\delta}{2}$$

Or, par hypothèse, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. D'après le critère de Cauchy pour les intégrales, on doit avoir :

$$\lim_{u,v \to +\infty} \int_u^v f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

En particulier, en posant $u = x_n$ et $v = x_n + \delta$, on devrait avoir :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{x_n}^{x_n+\delta} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Ceci est en contradiction flagrante avec la minoration par $\frac{\varepsilon\delta}{2} > 0$ établie précédemment.

$$\boxed{\text{Par l'absurde, on a donc } \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0}$$

□

Exercice — Application — Décroissance d'une fonction C^1

Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $f \in L^1([0, +\infty[)$ et que sa dérivée f' est bornée sur $[0, +\infty[$.

1. Démontrer que f est uniformément continue sur $[0, +\infty[$.
2. En déduire que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

Indications :
- Utiliser l'inégalité des accroissements finis pour montrer que f est lipschitzienne.
- Se rappeler qu'une fonction lipschitzienne est uniformément continue.
- Appliquer directement le résultat du théorème de Barbalat.

Correction.

Idées clés :
- Lien entre caractère lipschitzien et continuité uniforme.
- Application directe du Lemme de Barbalat.

1. Par hypothèse, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et sa dérivée est bornée. Posons $M = \sup_{t \in [0,+\infty[} |f'(t)|$. D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout $(x, y) \in [0, +\infty[^2$:

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

Ainsi, f est M-lipschitzienne sur $[0, +\infty[$. On sait qu'une fonction lipschitzienne sur un intervalle est uniformément continue sur celui-ci.

$$\boxed{f \text{ est uniformément continue sur } [0, +\infty[}$$

2. Nous disposons des deux hypothèses suivantes :

— f est uniformément continue sur $[0, +\infty[$.

— L'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ est absolument convergente (car $f \in L^1$), donc convergente.

D'après le lemme de Barbalat démontré précédemment, nous pouvons conclure directement :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0}$$

Piège :
Attention : la simple convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ n'implique absolument pas que $f(x) \to 0$ si f n'est pas uniformément continue. Le contre-exemple classique consiste à construire des "pics" de plus en plus fins (de largeur $1/n^2$) mais de hauteur constante (égale à 1) autour de chaque entier n. L'intégrale converge (série des aires), mais la limite en l'infini n'existe pas.

À retenir :
Le lemme de Barbalat est l'outil privilégié pour montrer qu'une fonction tend vers 0 à l'infini dès lors que l'on contrôle sa régularité (uniforme continuité) et son intégrabilité. En pratique, on vérifie souvent l'uniforme continuité en montrant que la dérivée est bornée.

"'