

Problème

Suites équiréparties

Si I est un sous-intervalle de $[0, 1[$, on note $\mu(I)$ la longueur de I .

Si t est dans \mathbb{R} , on pose :

$$\{t\} = t - [t].$$

Si $u = (u_n)_{n \geq 1}$ est une suite réelle, I un sous-intervalle de $[0, 1[$, n un élément de \mathbb{N}^* , on note :

$$N_n(u, I) = |\{k \in \{1, \dots, n\}, \{u_k\} \in I\}|.$$

La suite u est dite *équirépartie modulo 1* si et seulement si, pour tout sous-intervalle I de $[0, 1[$, on a :

$$\frac{N_n(u, I)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mu(I).$$

Si la suite u est à valeurs dans $[0, 1[$, on dit que u est *équirépartie dans* $[0, 1[$ plutôt que : u est *équirépartie modulo 1*.

On note C l'espace des fonctions continues par morceaux de $[0, 1]$ dans \mathbb{C} . Si I est un sous-intervalle de $[0, 1]$, soit h_I la fonction de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} caractéristique de I . On rappelle que les fonctions h_I sont dans C et engendrent vectoriellement le sous-espace de C constitué des fonctions en escalier.

Le but du problème est d'étudier la notion d'équirépartition, introduite par Hermann Weyl en 1916. Après quelques exemples élémentaires (partie **I**), on présente un critère très commode ramenant l'étude de l'équirépartition à l'estimation de sommes exponentielles (partie **II**). Les parties suivantes appliquent ce critère à divers exemples.

I. Premiers exemples

1. a) Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de $[0, 1[$ équirépartie dans $[0, 1[$. Montrer que $\{u_n, n \geq 1\}$ est dense dans $[0, 1[$.
- b) Soit P dans $\mathbb{Q}[X]$. Montrer que la suite $(P(n))_{n \geq 1}$ n'est pas équirépartie modulo 1.
- c) Soient :

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha^n + \beta^n \in \mathbb{Z}.$$

Quelles sont les valeurs d'adhérence de $(\{\alpha^n\})_{n \geq 1}$? La suite $(\alpha^n)_{n \geq 1}$ est-elle équirépartie modulo 1?

2. Soient a et b des réels tels que : $0 < a < b < 1$, $I = [a, b]$, $u = (u_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \ln(n).$$

- a) Soit k dans \mathbb{N}^* . Montrer :

$$\{u_k\} \in I \iff \exists m \in \mathbb{N}, e^{a+m} \leq k < e^{b+m}.$$

En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{m=0}^n ((e^b - e^a)e^m - 1) \leq N_{[e^{a+n}]}(I, u) \leq \sum_{m=0}^n ((e^b - e^a)e^m + 1).$$

- b) Quelle est la limite de la suite :

$$\left(\frac{N_{[e^{n+1}]}(I, u)}{[e^{n+1}]} \right) ?$$

La suite u est-elle équirépartie modulo 1 ? L'ensemble $\{\{u_n\}, n \geq 1\}$ est-il dense dans $[0, 1[$?

II. Le critère de Weyl

Soient $u = (u_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de $[0, 1[$, V_u l'ensemble des f de C telles que :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(u_k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f.$$

3. a) Vérifier que V_u est un sous-espace de C contenant les fonctions constantes.

b) Soit g dans C à valeurs réelles. On suppose que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe f_1 et f_2 dans V_u , à valeurs réelles et telles que :

$$f_1 \leq g \leq f_2, \quad \int_0^1 (f_2 - f_1) \leq \varepsilon.$$

Montrer : $g \in V_u$.

c) Montrer l'équivalence entre les conditions suivantes :

- (i) la suite u est équirépartie dans $[0, 1[$,
- (ii) pour tout sous-intervalle I de $[0, 1[$, h_I appartient à V_u ,
- (iii) $V_u = C$.

4. a) Soient I un sous-intervalle de $[0, 1[$ d'extrémités c et d avec $0 < c < d$, $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe deux fonctions f_1 et f_2 continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} telles que :

$$f_1(0) = f_1(1), \quad f_2(0) = f_2(1), \quad f_1 \leq h_I \leq f_2, \quad \int_0^1 (f_2 - f_1) \leq \varepsilon.$$

Un dessin suffisamment explicite pourra tenir lieu de preuve.

b) Démontrer que les conditions (i) à (iii) de la question précédente sont équivalentes à :

(iv) l'espace V_u contient toutes les fonctions f continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{C} telles que : $f(0) = f(1)$.

c) On admet le théorème d'approximation de Weierstrass trigonométrique : pour toute fonction continue 1-périodique f de \mathbb{R} dans \mathbb{C} et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction p de \mathbb{R} dans \mathbb{C} de la forme

$$p : t \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{j=-d}^d a_j e^{2i\pi j t}$$

où $d \in \mathbb{N}$ et où les a_k sont dans \mathbb{C} telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |f(t) - p(t)| \leq \varepsilon.$$

Démontrer que les conditions (i) à (iv) sont équivalentes à :

$$(v) \quad \forall j \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2i\pi j u_k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

La définition de l'équirépartition est de nature géométrique. Le critère de Weyl ramène l'étude de l'équirépartition modulo 1 d'une suite à l'estimation de sommes exponentielle, ce qui permet l'emploi de techniques d'analyse variées.

III. Suites arithmétiques

5. Soient α un réel irrationnel et, pour n dans \mathbb{N}^* , $u_n = n\alpha$. Pour j et n dans \mathbb{N}^* , donner une expression simple de :

$$\sum_{k=1}^n e^{2i\pi j u_k}.$$

En déduire que $(u_n)_{n \geq 1}$ est équirépartie modulo 1.

6. *Un problème de Gelfand*

a) Vérifier l'irrationalité du réel :

$$\theta = \frac{\ln(2)}{\ln(10)}.$$

b) Si r est dans $\{1, 2, \dots, 9\}$ et k dans \mathbb{N} , montrer que le premier chiffre de l'écriture décimale de 2^k est r si et seulement si :

$$\frac{\ln(r)}{\ln(10)} \leq \{k\theta\} < \frac{\ln(r+1)}{\ln(10)}.$$

c) Pour r dans $\{1, 2, \dots, 9\}$ et n dans \mathbb{N} , soit $v_r(n)$ le nombre de k de $\{1, \dots, n\}$ tels que le premier chiffre de l'écriture décimale de 2^k soit r . Montrer que la suite :

$$\left(\frac{v_r(n)}{n} \right)_{n \geq 1}$$

converge vers une limite à préciser.

IV. Suites à croissance lente

Dans cette partie, on pourra utiliser sans démonstration le théorème de Cesàro ainsi que la version intégrale de ce dernier, c'est-à-dire le résultat suivant : si u est une fonction continue de $[1, +\infty[$ dans \mathbb{R} qui tend vers 0 en $+\infty$, alors :

$$\frac{1}{x} \int_1^{x+1} u \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Soit f une application de classe C^1 de $[1, +\infty[$ dans \mathbb{R} .

7. Soit k dans \mathbb{N}^* . Vérifier :

$$|e^{2i\pi f(k)} - \int_k^{k+1} e^{2i\pi f} | \leq 2\pi \int_k^{k+1} |f(t) - f(k)| dt \leq 2\pi \int_k^{k+1} |f'|.$$

8. On suppose :

$$f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

a) Montrer :

$$e^{2i\pi f(k)} - \int_k^{k+1} e^{2i\pi f} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0,$$

$$\frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n e^{2i\pi f(k)} - \int_1^{n+1} e^{2i\pi f} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

b) Montrer que la suite $(f(n))_{n \geq 1}$ est équirépartie modulo 1 si et seulement si :

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \quad \int_1^{n+1} e^{2ij\pi f} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n).$$

9. a) Donner une primitive de :

$$g : x \in [1, +\infty[\mapsto (1 + 2i\pi x f'(x)) e^{2i\pi f(x)}.$$

En déduire :

$$\frac{1}{n} \left| \int_1^{n+1} (1 + 2i\pi x f'(x)) e^{2i\pi f(x)} dx \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

b) On suppose qu'il existe un réel a tel que :

$$xf'(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} a.$$

Trouver la limite en $+\infty$ de :

$$\frac{1}{n} \int_1^{n+1} (xf'(x) - a) e^{2i\pi f(x)} dx,$$

puis celle de :

$$\frac{1}{n} \left| \int_1^{n+1} e^{2i\pi f} \right|.$$

La suite $(f(n))_{n \geq 1}$ est-elle équirépartie modulo 1 ?

10. Soient u et v deux réels tels que $u < v$, φ une application de classe C^1 de $[u, v]$ dans \mathbb{R} , λ dans $\mathbb{R}^{+\ast}$. On suppose que φ' est monotone sur $[u, v]$, que $|\varphi'|$ est minorée par λ sur $[u, v]$.

Dans a) et b), on suppose de plus que φ est de classe C^2 .

a) Montrer :

$$\int_u^v e^{i\varphi} = \left[\frac{e^{i\varphi}}{i\varphi'} \right]_u^v + \int_u^v \frac{\varphi''}{i(\varphi')^2} e^{i\varphi}.$$

b) En déduire l'existence d'une constante absolue $C > 0$ telle que :

$$\left| \int_u^v e^{i\varphi} \right| \leq \frac{C}{\lambda}.$$

Un argument d'approximation montre que l'inégalité précédente subsiste si φ est seulement de classe C^1 . On admettra ce résultat.

11. Déduire de la question précédente le *critère de Féjer* : si f' est monotone au voisinage de $+\infty$ et si :

$$f'(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0, \quad xf'(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty,$$

alors $(f(n))_{n \geq 1}$ est équirépartie modulo 1.

12. Soit α dans $]0, 1[$, λ dans $\mathbb{R}^{+\ast}$ et, pour $x \geq 1$:

$$f_\alpha(x) = x^\alpha, \quad g_\lambda(x) = (\ln x)^\lambda.$$

Les suites $(f_\alpha(n))_{n \geq 1}$ et $(g_\lambda(n))_{n \geq 1}$ sont-elles équiréparties modulo 1 ?

V. Le théorème de Van der Corput

Soit F une fonction de \mathbb{Z} dans \mathbb{C} . On dit que F est de type positif (abrégé : F est t.p) si et seulement si, pour toute partie finie non vide A de \mathbb{Z} et toute famille $(z_k)_{k \in A}$ de complexes, on a :

$$\sum_{(k,l) \in A^2} F(i-k-l) z_k \bar{z}_l \in \mathbb{R}^+.$$

13. Pour r dans \mathbb{R} , soit F_r la fonction définie sur \mathbb{Z} par :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad F_r(k) = \delta_{0,k} + r.$$

Montrer que F_r est t.p si et seulement si $r \geq 0$.

14. Dans cette question, u est une fonction bornée de \mathbb{Z} dans \mathbb{C} nulle sur $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}^*$, φ une application strictement croissante de \mathbb{N}^* dans lui-même.

On suppose qu'il existe une fonction U de \mathbb{Z} dans \mathbb{C} telle que, pour tout k de \mathbb{Z} :

$$\frac{1}{\varphi(n)} \sum_{m=1}^{\varphi(n)} u(m+k) \overline{u(m)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} U(k).$$

a) Si k et l sont dans \mathbb{Z} , montrer :

$$\frac{1}{\varphi(n)} \sum_{m=1}^{\varphi(n)} u(m+k) \overline{u(m+l)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} U(k-l).$$

b) Montrer que U est t.p.

15. Dans cette question, f est une fonction de \mathbb{N}^* dans l'ensemble des complexes de module 1 vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n f(m+k) \overline{f(m)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On veut établir :

$$\frac{1}{n} \sum_{m=1}^n f(m) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On suppose par l'absurde que cette propriété est fautive.

a) Montrer qu'il existe une application strictement croissante φ de \mathbb{N}^* dans lui-même et un complexe non nul c tels que :

$$\frac{1}{\varphi(n)} \sum_{m=1}^{\varphi(n)} f(m) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} c.$$

On définit alors une fonction g de \mathbb{Z} dans \mathbb{C} par

$$g(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \leq 0 \\ f(n) - c & \text{sinon} \end{cases}$$

b) Soit k dans \mathbb{Z} . Montrer :

$$\frac{1}{\varphi(n)} \sum_{m=1}^{\varphi(n)} g(m+k) \overline{g(m)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \delta_{0,k} - |c|^2.$$

c) Conclure.

16. Démontrer le *théorème de Van der Corput* : si $u = (u_n)_{n \geq 1}$ est une suite réelle telle que, pour tout k de \mathbb{N}^* , la suite $(u_{n+k} - u_n)_{n \geq 1}$ soit équirépartie modulo 1, alors $(u_n)_{n \geq 1}$ est équirépartie modulo 1.

VI. Suites à croissance polynomiale

17. a) Soient p dans \mathbb{N}^* , f une application de classe C^p de $[1, +\infty[$ dans \mathbb{R} vérifiant les conditions suivantes :

$$f^{(p)}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0, \quad x f^{(p)}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty, \quad f^{(p)} \text{ est monotone.}$$

Montrer que $(f(n))_{n \geq 1}$ est équirépartie modulo 1 (*théorème de Féjer*).

- b) Quels sont les réels α de \mathbb{R}^{++} tels que la suite $(n^\alpha)_{n \geq 1}$ soit équirépartie modulo 1 ?

18. a) Montrer que si P est un polynôme réel non constant dont le coefficient dominant est irrationnel, la suite $(P(n))_{n \geq 1}$ est équirépartie modulo 1. On pourra raisonner par récurrence sur le degré de P et utiliser le théorème de Van der Corput.

- b) Soient $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ deux suites réelles, d dans \mathbb{N}^* . On suppose que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+d} - u_n \in \mathbb{Z},$$

et que pour tout j de $\{1, \dots, d\}$, la suite :

$$(v_{(n-1)d+j})_{n \geq 1}$$

est équirépartie modulo 1, est équirépartie modulo 1.

Montrer que $(u_n + v_n)_{n \geq 1}$ est équirépartie modulo 1.

- c) Démontrer que si P est un polynôme réel dont au moins un coefficient non constant est irrationnel, alors la suite $(P(n))_{n \geq 1}$ est équirépartie modulo 1.

Ce dernier résultat, qui règle la question de l'équirépartition des suites polynomiales, est dû à Weyl. Pour des suites à croissance plus rapide, l'étude de l'équirépartition devient plus difficile et les résultats sont de nature plus statistique. On sait ainsi que, pour presque tout $\theta > 1$, la suite (θ^n) est équirépartie modulo 1, mais on ne connaît aucun θ explicite vérifiant cette propriété.

L'étude de l'équirépartition se généralise sans difficulté aux suites à valeurs dans \mathbb{R}^n : on étudie alors l'équirépartition modulo \mathbb{Z}^n . Une généralisation du théorème de Weierstrass trigonométrique aux fonctions \mathbb{Z}^n -périodiques permet d'établir une version n -dimensionnelle du critère de Weyl.