

Suites de fonctions

1 Exemples

1. Étudier la convergence simple et uniforme des suites ci-après ; dans chaque cas, on précisera les domaines de convergence uniforme.

$$(a) (*) f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \text{Arctan}(nx)$$

$$(b) f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(nx)$$

$$(c) f_n : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R} \\ x \mapsto n^\alpha x e^{-nx}$$

$$(d) (*) f_n : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R} \\ x \mapsto n^\alpha e^{-nx} \sin x$$

$$(e) f_n : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-nx^\alpha} \sin(nx)$$

$$(f) (*) f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin((1 + 1/n)x)$$

$$x (g) (*) f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(\sqrt{x + 4\pi^2 n^2}) \quad \rightarrow 0$$

$$? x (h) f_n : [0, \pi/2] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos(x) \sin(x)^n$$

$$x (i) f_n : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\sin(nx)}{n^\alpha \sqrt{x}}$$

$$x (j) f_n : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \exp(-\sin(\frac{x}{n}))$$

$$(k) f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (1 + \frac{x}{n})^n$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{x^k}{n^k}$$

$$|\sin((1 + \frac{1}{n})x) - \sin x|$$

$$\lambda \quad (l) \quad (*) \quad f_n : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{x^n}{1+x+\dots+x^n}$$

$$(m) \quad f_n : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \cos^n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) & \text{si } 0 \leq x \leq \pi\sqrt{n}/2 \\ 0 & \text{si } x > \pi\sqrt{n}/2 \end{cases}$$

$$(n) \quad f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto n(\operatorname{Arctan}(n+x) - \operatorname{Arctan}(n-x))$$

$$(o) \quad f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{1+|x-n|}$$

$$(p) \quad f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{x}{|x|+1/n}$$

$$(q) \quad f_n : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x^{1/k}$$

$$(r) \quad f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \prod_{k=1}^n \cos(x/2^k)$$

$$(s) \quad f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 4^n (x^{2^n} - x^{2^{n+1}})$$

$$(t) \quad f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \prod_{k=0}^n \sin(2^k x)$$

- λ 2. Soit (λ_n) une suite de réels qui tend vers $+\infty$. On pose $f_n(x) = \sin(\lambda_n x)$. Montrer qu'il n'existe aucun segment non trivial de \mathbb{R} sur lequel (f_n) converge simplement.

Indication. Si $a < b$ et si φ est une fonction continue de $[a, b]$ dans \mathbb{R} , on étudiera, lorsque $n \rightarrow +\infty$:

$$\int_a^b f_n \varphi.$$

- ✕ 3. (*) On ne dérive pas une convergence uniforme
 Trouver une suite $(f_n)_{n \geq 0}$ de fonctions C^1 sur $[0, 1]$ telle que :
 - $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur $[0, 1]$,
 - si $x \in [0, 1]$, $(f_n'(x))_{n \geq 0}$ diverge.
- ✕ 4. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{array}{lcl} f_n & \mathbb{R}^+ & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{n!} x^n e^{-x} \end{array}$$

- a) Montrer que (f_n) converge uniformément vers 0 sur \mathbb{R}^+ .
 b) Que vaut $\int_0^{+\infty} f_n$? Conclure.

- ✕ 5. Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} . Pour n dans \mathbb{N} et x dans $[0, 1]$, on pose $f_n(x) = x^n f(x)$. La suite (f_n) est-elle uniformément convergente sur $[0, 1]$?
- ⊗ 6. Soit f une fonction de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} telle que : $f(0) = 0$ et $f(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de $(f_n)_{n \geq 1}$ où :

$$\begin{array}{lcl} f_n & \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(nx) \end{array}$$

- ✕ 7. (*) Soit f une fonction de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} continue. On pose, si $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = f(x/n)$. Étudier la convergence simple et uniforme de $(f_n)_{n \geq 1}$.
- ✕ 8. (*) Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On pose, si $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$f_n(x) = \sqrt{f(x)^2 + \frac{1}{n}}.$$

Étudier la convergence simple et uniforme de $(f_n)_{n \geq 1}$.

- ✕ 9. Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Pour n dans \mathbb{N} et x dans \mathbb{R} , soit

$$f_n(x) = \min\{f(x), n\}.$$

Étudier convergence simple et convergence uniforme de $(f_n)_{n \geq 0}$.

- ✕ 10. (*) Soient k dans \mathbb{N} , f une fonction de classe C^{k+1} de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} telle que :

$$\forall i \in \{0, \dots, k\}, \quad f^{(i)}(1) = 0.$$

Pour n dans \mathbb{N} et x dans $[0, 1]$, soit :

$$u_n(x) = n^k x^n f(x).$$

Montrer que $(u_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

11. Soient f et g deux fonctions continues de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} nulles en 0 et convergeant vers 0 en $+\infty$. Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$\forall n \geq 1, \quad u_n(x) = f\left(\frac{x}{n}\right) g(nx).$$

12. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . On pose, si $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$g_n(x) = n \left(f \left(x + \frac{1}{n} \right) - f(x) \right).$$

a) Montrer que (g_n) converge uniformément vers f' sur tout segment de \mathbb{R} .

b) Donner un exemple montrant que la convergence précédente n'est pas forcément uniforme sur \mathbb{R} . *exp*

c) Proposer une hypothèse raisonnable assurant la convergence uniforme de (g_n) sur \mathbb{R} .

13. (*) Soient f une fonction de classe C^∞ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels non nuls convergeant vers 0, p dans \mathbb{N} , et, pour n dans \mathbb{N} et x dans \mathbb{R} :

$$g_n(x) = \frac{1}{\lambda_n^{p+1}} \left(f(\lambda_n x) - \sum_{k=0}^p \frac{f^{(k)}(0) \lambda_n^k x^k}{k!} \right).$$

Montrer que $(g_n)_{n \geq 0}$ converge simplement sur \mathbb{R} vers une fonction à préciser, puis que la convergence est uniforme sur tout segment de \mathbb{R} .

14. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 . Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$g_n(x) = f \left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right)^n.$$

a) A quelle condition (g_n) converge-t-elle simplement sur \mathbb{R} ?

b) Si tel est le cas, montrer que la convergence est uniforme sur tout segment de \mathbb{R} .

15. Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} . On pose, si $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$:

$$u_n(x) = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{n} f \left(\frac{k}{n} \right) \right).$$

Étudier la convergence uniforme de (u_n) sur $[0, 1]$.

16. (**) Si $x \in \mathbb{R}^+$, soit :

$$f_n(x) = \sum_{p=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + p^x}}.$$

Étudier la convergence simple et uniforme de (f_n) .

17. Exponentielle complexe

Pour $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$f_n(z) = \left(1 + \frac{z}{n} \right)^n.$$

Montrer que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers la fonction exponentielle, la convergence étant uniforme sur tout compact de \mathbb{C} .

$$\int_x^{x+\frac{1}{n}} f(t) dt$$

4

$$\sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{x}{n} f \left(\frac{k}{n} \right) \right) \leq \frac{p(x)}{n}$$

18. *Itération : cas croissant*

Soit f une application croissante et continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$. Pour n dans \mathbb{N}^* , soit $f_n = f \circ \dots \circ f$ (n fois). Montrer que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers une fonction à préciser. Dire sur quels ensembles la convergence est uniforme.

19. *Itération : cas contractant*

Soient k dans $]0, 1[$, f une fonction k -lipschitzienne de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Pour n dans \mathbb{N}^* , soit $f_n = f \circ \dots \circ f$ (n fois).

a) Montrer que f a un unique point fixe, que l'on note p .

b) Montrer que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur tout segment de \mathbb{R} vers la fonction constante égale à p .

20. Soit f une fonction continue de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ telle que :

$$\forall x > 0, \quad 0 < f(x) < x.$$

Montrer, si $f_n = f \circ \dots \circ f$ (n fois), que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur tout segment de \mathbb{R}^+ .

✕ 21. (**) La fonction f est définie par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) = 2x(1 - x).$$

Étudier la convergence simple et uniforme de la suite des itérées de f .

22. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$f_0(x) = x \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad f_{n+1}(x) = \frac{x}{2 + f_n(x)}.$$

Montrer que $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur tout compact de \mathbb{R}^+ .

23. On définit une suite de fonctions de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} par :

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}^+, \quad f_0(x) = 0, \quad f_{n+1}(x) = \sqrt{x + f_n(x)}.$$

Étudier la convergence simple et uniforme de cette suite.

24. *Un exemple de convergence simple qui n'est uniforme sur aucun segment non trivial*

Pour cet exercice, on pourra utiliser l'équirépartition modulo 1 de la suite $(nx)_{n \in \mathbb{N}}$ pour x irrationnel (cf feuille sur l'approximation uniforme).

a) Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ de fonctions définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos^{2k}(2\pi kx).$$

On séparera les cas x rationnel, x irrationnel.

b) Montrer que la convergence n'est uniforme sur aucun intervalle non trivial de \mathbb{R} .¹

1. On trouvera un exemple plus simple dans les exercices sur les séries de fonctions.

25. (**) a) On considère la suite de fonctions donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f_{n+1}(x) = 2 \int_0^x \sqrt{f_n}.$$

Étudier la convergence simple et uniforme de $(f_n)_{n \geq 0}$ (on commencera par calculer $f_n(x)$).

b) Même question en prenant pour f_0 une fonction continue quelconque > 0 sur \mathbb{R}^+ .

26. *Série de Taylor, première approche*

a) Soient f une application de classe C^∞ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , $a > 0$. On suppose qu'il existe $C > 0$ et $M > 0$ tel que :

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times [-a, a], \quad |f^{(n)}(x)| \leq CM^n.$$

Montrer que si :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k,$$

alors (P_n) converge uniformément vers f sur $[-a, a]$.

b) Appliquer ce résultat à \exp , \sin , \cos .

27. (**) Pour n dans \mathbb{N} , x dans \mathbb{R} , soit :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}, \quad f_n(x) = e^x P_n(x).$$

a) Montrer que (P_n) et (f_n) convergent uniformément sur tout segment de \mathbb{R} .

b) On veut montrer que (f_n) converge uniformément sur \mathbb{R}^- . Pour n dans \mathbb{N} , x dans \mathbb{R} , soit :

$$g_n(x) = f_n(x) - e^{2x}.$$

Montrer que, pour tout n , la restriction de $|g_n|$ à \mathbb{R}^- atteint un maximum global en un point x_n .

c) Montrer que :

$$|g_n(x_n)| = \frac{e^{x_n} |x_n|^n}{2 \times (n!)}.$$

d) Calculer le maximum de

$$u \in \mathbb{R}^- \mapsto u^n e^u.$$

Conclure.

28. Développement eulérien du sinus²

Si n est dans \mathbb{N} , soit :

$$P_n = \left(1 + \frac{X}{2n+1}\right)^{2n+1} - \left(1 - \frac{X}{2n+1}\right)^{2n+1}.$$

a) Étudier la convergence simple de (P_n) sur \mathbb{C} . On rappelle :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \rightarrow e^z.$$

b) Factoriser P_n en produit d'irréductibles de $\mathbb{C}[X]$.

c) Montrer :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \sin z = z \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right).$$

29. Développement eulérien de la cotangente, méthode d'Herglotz

Pour n dans \mathbb{N}^* , la fonction f_n est définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \quad f_n(x) = \sum_{k=-n}^n \frac{1}{x-k}.$$

a) Montrer que (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, que la convergence est uniforme sur tout segment de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

b) Soit f la limite de (f_n) . Montrer que f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, impaire, 1-périodique, que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \quad f(2x) = \frac{1}{2} \left(f(x) + f\left(x + \frac{1}{2}\right) \right).$$

c) Conclure :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \quad f(x) = \pi \cotan(\pi x).$$

30. (***) Itération d'un opérateur de Bernstein

Soient E l'espace des fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} , n dans \mathbb{N} , B_n l'endomorphisme de E qui associe à f son polynôme de Bernstein d'indice n . Pour f dans E , étudier la convergence de la suite de fonctions

$$(B_n \circ B_n \circ \dots \circ B_n(f)).$$

2 Exercices plus théoriques

31. Soit (f_n) une suite de fonctions de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} telle que :

i) la suite $(\|f_n\|_\infty)$ est bornée,

ii) (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur tout segment de $[0, 1[$.

Soit φ une fonction continue de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} telle que : $\varphi(1) = 0$. Montrer que $(f_n \varphi)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0, 1]$.

2. Cet exercice et le suivant sont les deux premiers exemples de développements eulériens ; ces résultats très remarquables, découverts par Euler vers 1750, contiennent en particulier le calcul des nombre $\zeta(2k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. Ils ont eu une importance considérable dans l'histoire de l'analyse.

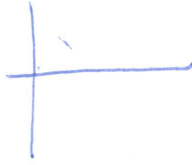
32. Donner une version uniforme du théorème de Césaro ; généraliser.
33. (*) *Composition de la convergence uniforme par une fonction continue*
 Soient S un segment de \mathbb{R} , $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite d'applications continues de S dans \mathbb{R} convergeant vers f uniformément sur S . Soit φ une fonction continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Montrer que $(\varphi \circ f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur S vers $\varphi \circ f$.
34. Soit φ une fonction continue de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} , $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels convergeant vers un réel a et, pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n(x) = \varphi(a_n, x)$. Montrer que (φ_n) converge uniformément sur tout segment de \mathbb{R} .
35. Soient (f_n) une suite de fonctions continues de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} convergeant uniformément sur tout segment de \mathbb{R}^+ vers une fonction f à valeurs dans \mathbb{R}^{+*} . On suppose que, pour tout n , f_n s'annule en x_n . Que dire de la suite (x_n) ?
36. (*) *Préservation de l'uniforme continuité*
 Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions uniformément continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On suppose que $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers f sur \mathbb{R} . Montrer que f est uniformément continue sur \mathbb{R} .
37. (**) *Convergence pour les suites équicontinues*³
 Soient S un segment de \mathbb{R} , (f_n) une suite de fonctions de S dans \mathbb{C} . On dit que (f_n) est équicontinue si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout n et tout (x, y) de S^2 , on ait :

$$|x - y| \leq \delta \implies |f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon.$$

- a) Montrer que s'il existe $M > 0$ tel que toutes les f_n soient M -lipschitziennes, alors (f_n) est équicontinue.
- b) On suppose que les f_n sont continues sur S et que (f_n) converge uniformément vers une fonction f . Montrer que (f_n) est équicontinue.
- c) On suppose f_n équicontinue. Soit D une partie dense de S . Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
- pour tout d dans D , la suite $(f_n(d))$ converge,
 - la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur S ,
 - la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur S .
38. Soient S un segment de \mathbb{R} , et $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions de S dans \mathbb{R} . On suppose que pour tout x de S , toute suite $(x_n)_{n \geq 0}$ de S tendant vers x , $(f_n(x_n))_{n \geq 0}$ converge. Montrer que f_n converge simplement vers une fonction f , que f est continue, et que la convergence est uniforme.
39. (**) Soit (f_n) une suite de fonctions convexes convergeant simplement sur \mathbb{R} vers une fonction f tendant vers $+\infty$ en $\pm\infty$.
- Montrer qu'il existe N tel que, pour $n \geq N$, f_n tend vers $+\infty$ en $\pm\infty$.
 - Vérifier que si g est une fonction convexe de \mathbb{R} dans \mathbb{R} tendant vers $+\infty$ en $\pm\infty$, alors g atteint son minimum sur \mathbb{R} et l'ensemble des points en lesquels g vaut ce minimum est un segment $[a(g), b(g)]$.
 - On fixe $\varepsilon > 0$. Montrer que pour n assez grand, on a :

$$[a_n(f), b_n(f)] \subset [a(f) - \varepsilon, b(f) + \varepsilon].$$

3. Résultat fondamental.



40. *Convergence simple et uniforme de suites de fonctions convexes.*
Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions convexes définies sur un intervalle I de \mathbb{R} , convergeant simplement vers une fonction f sur I .
- a) Montrer que si S est un segment contenu dans l'intérieur de I , il existe $C > 0$ tel que toutes les restrictions des f_n à S soient C -lipschitziennes.
- b) En déduire que la convergence des $(f_n)_{n \geq 0}$ vers f est uniforme sur tout segment contenu dans l'intérieur de I .
41. (***) *Premier théorème de Dini*
Soient $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions continues à valeurs réelles convergeant simplement sur le segment S vers une fonction continue f . On suppose que, pour tout x de S , $(f_n(x))_{n \geq 0}$ est croissante. Prouver que la convergence est uniforme.
42. *Deuxième théorème de Dini*
Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions croissantes convergeant simplement sur le segment S vers une fonction f continue. Montrer que la convergence est uniforme.
43. *Une application du second théorème de Dini*
Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions croissantes de \mathbb{R} dans \mathbb{R} ayant pour limite 0 en $-\infty$, 1 en $+\infty$. On suppose que (f_n) converge simplement sur \mathbb{R} vers une fonction f continue ayant pour limite 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$. Montrer que la convergence est uniforme sur \mathbb{R} . On pourra utiliser l'exercice précédent.
44. (***) *Théorème de Helly*
Soient S un segment de \mathbb{R} et $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions croissantes de I dans \mathbb{R} . On suppose :
- $$\exists C > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f_n(x)| \leq C.$$
- Montrer qu'il existe une extraction φ telle que $(f_{\varphi(n)}(x))_{n \geq 0}$ converge pour tout x de S .
45. Soit (f_n) une suite de fonctions de classe C^2 de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} . On suppose que (f_n) converge simplement sur $[0, 1]$ et que $(\|f_n''\|_\infty)$ est bornée. Montrer que (f_n') et (f_n) convergent uniformément sur $[0, 1]$.
46. (***) *Fonctions uniformément continues, lipschitziennes*
- a) Montrer qu'une limite uniforme de fonctions uniformément continues sur \mathbb{R} est uniformément continue.
- b) Quelles sont les fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui sont limite uniforme d'une suite de fonctions lipschitziennes ?
47. (***) *Une généralisation du théorème de primitivation de la convergence uniforme*
Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $a_1 < \dots < a_k$ des points de $[0, 1]$, (f_n) une suite de fonctions de classe C^k de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} . On suppose que la suite $(f_n^{(k)})$ converge uniformément sur $[0, 1]$ et que, pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, la suite $(f_n(a_i))$ converge. Montrer que, si $j \in \{0, \dots, k-1\}$, la suite $(f_n^{(j)})$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

48. (*) *Convergence simple de polynômes de degré borné*

Soit $(p_n)_{n \geq 0}$ une suite de polynômes de degré majorés par d . Montrer que s'il existe $d+1$ réels distincts a_0, \dots, a_d tels que, pour tout i de $\{0, \dots, d\}$, la suite $(p_n(a_i))_{n \geq 0}$ converge, alors $(p_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur tout segment de \mathbb{R} vers une fonction polynomiale de degré au plus d .

49. *Convergence simple dans des espaces fonctionnels de dimension finie*

Soit V un sous-espace de dimension finie de $B(I, \mathbb{R})$, où I est un intervalle de \mathbb{R} ; soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de V convergeant simplement sur I vers une fonction f . Montrer que $f \in V$, et que la convergence est uniforme.

50. *Inf-convolution*

Soient $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue, nulle en 0 uniquement. Si $\varphi \in C([0, 1], \mathbb{R})$, soit

$$T_g(\varphi) : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \inf_{0 \leq s \leq 1} (\varphi(s) + g(s-t))$$

L'application T_g envoie $C([0, 1], \mathbb{R})$ sur lui-même. Justifier.

a) Montrer que si $\varphi \in C([0, 1], \mathbb{R})$, $(T_g \circ \dots \circ T_g(\varphi))$ (n fois) converge uniformément vers une fonction de $C([0, 1], \mathbb{R})$.

b) Que dire si $g(u) = |u|$ pour tout u de $[-1, 1]$?

c) Que dire si $g(u) = o(u)$ quand $u \rightarrow 0$?

51. Soit f une fonction continue et majorée de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Pour $n \in \mathbb{N}$, soit :

$$f_n(x) = \sup \{ f(y) - n|y - x|, y \in \mathbb{R} \}.$$

Étudier la convergence de (f_n) .

52. (***) Soit, si I est un sous-intervalle d'extrémités a et b de $[0, 1]$, T_I l'endomorphisme de $C([0, 1], \mathbb{R})$ qui à f associe $T_I(f)$ défini par :

$$T_I(f)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \notin I, \\ \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) & \text{si } x \in I. \end{cases}$$

Soit $(I_n)_{n \geq 1}$ une suite de sous-intervalles de $[0, 1]$.

Montrer que $(T_{I_n} \circ \dots \circ T_{I_1}(f))$ converge uniformément pour toute f de $C([0, 1], \mathbb{R})$.

53. Si f est une fonction continue et bornée de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , on pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad M_f(x) = \sup \left\{ \frac{1}{2t} \int_{x-t}^{x+t} f; t \in \mathbb{R}^{+*} \right\}.$$

a) Montrer que si f est uniformément continue, il en est de même de M_f .

b) On suppose f uniformément continue. On pose :

$$f_0 = f; \quad \forall n \in \mathbb{N}, f_{n+1} = M_{f_n}.$$

Montrer que $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur tout segment de \mathbb{R} vers une fonction que l'on précisera.

$\mathcal{K}_d(X)$

Vander Monde & Lagrange

54. Sous-espaces de $C(S, \mathbb{R})$ contenant les constantes sur lesquels opère une fonction non triviale

Soient S un segment de \mathbb{R} , $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue non affine, et V un sous-espace de $C(S, \mathbb{R})$ contenant les constantes, fermé pour $\| \cdot \|_\infty$ et tel que

$$\forall f \in V, \quad \varphi \circ f \in V.$$

On se propose de prouver que V est une sous-algèbre de $C(S, \mathbb{R})$ (« théorème de de Leuw »). Dans a) et b) on suppose φ de classe C^2 et on fixe $f \in V$.

- a) Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose, si $t \in S$,

$$g_n(t) = n^2 \left(\varphi \left(t_0 + \frac{f(t)}{n} \right) - \varphi(t_0) - \frac{\varphi'(t_0)}{n} f(t) \right).$$

Étudier la convergence uniforme de $(g_n)_{n \geq 1}$ sur S .

- b) Montrer que f^2 est dans V . Conclure si φ est C^2 .

- c) Traiter le cas général.

55. Conjugaison locale des difféomorphismes

Soit f une fonction de classe C^2 de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ telle que : $f(0) = 0$ et $f'(0) = \lambda \in]0, 1[$. Pour $n \geq 1$, soient :

$$f^{[n]} = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}} \quad \text{et} \quad u_n = \frac{f^{[n]}}{\lambda^n}.$$

- a) Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que, sur $[0, r]$, $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(u_n')_{n \geq 1}$ convergent uniformément.

- b) En déduire l'existence d'une fonction h de classe C^1 sur $[0, r]$ telle que $h(0) = 0$, $h'(0) = 1$ et $h \circ f = \lambda h$.

Ainsi, au voisinage de 0, u est un C^1 -difféomorphisme qui conjugue f à l'homothétie de rapport λ .

56. Soit (f_n) une suite de fonctions continues périodiques de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , convergeant uniformément vers la fonction f sur \mathbb{R} . On suppose que, pour tout $n \geq 1$, f_n admet une période $t_n > 0$ et que (t_n) est bornée. Montrer que f a une période > 0 .

57. (***) Théorème d'Ascoli⁴

Démontrer le théorème d'Ascoli : si (f_n) est une suite équicontinue de fonctions de $S = [a, b]$ dans \mathbb{R} , s'il existe c dans S tel que la suite $(f_n(c))$ soit bornée, alors il existe une extraction φ telle que $(f_{\varphi(n)})$ converge uniformément sur S .

On pourra utiliser une partie dénombrable dense D de S , le procédé diagonal et l'exercice « Convergence pour les suites équicontinues ».

4. Nous reverrons ce résultat fondamental dans le cours de topologie.