

Théorème de Singer (1978)

Prérequis. Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$, continuité et dérivabilité des fonctions de la variable réelle.

Définitions et notations.

- Si f est une application de classe C^1 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , on pose

$$C(f) = \{x \in \mathbb{R}, f'(x) = 0\}.$$

Un réel de $C(f)$ sera appelé *point critique* de f .

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n = f \circ \dots \circ f$ désigne la composée de f avec elle-même n fois.

Introduction. Etant donné un intervalle I de \mathbb{R} et une fonction numérique f de I dans I , l'étude de la dynamique de f consiste à comprendre le comportement de toutes les suites récurrentes

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Les comportements peuvent être très variés, allant d'une très grande régularité au chaos. Les parties I et II du problème, fondamentales, étudient des situations régulières, et en montrent la stabilité. Les parties III et IV sont consacrées à la preuve d'un résultat récent et remarquable, qui fournit un renseignement global sur la dynamique de f sous réserve d'une hypothèse différentielle ("fonctions à Schwarzien négatif"). Il faut souligner que ce résultat s'applique en particulier aux polynômes du second degré, dont l'étude a suscité beaucoup de travaux ces trente dernières années, tant dans le domaine complexe que dans le domaine réel.

PARTIE I. Points fixes attractifs.

Soit f une application de classe C^1 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On suppose que le réel x_0 est un point fixe *attractif* de f , ce qui signifie que $f(x_0) = x_0$ et $|f'(x_0)| < 1$.

1. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, la suite $(f^n(x))_{n \geq 0}$ converge vers x_0 .

On pose $B_f(x_0) = \{x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = x_0\}$; cet ensemble est appelé *bassin d'attraction* de x_0 pour f .

2. Exemples.

- a) Pour $f(x) = x^3$ indiquer les points fixes attractifs et les bassins d'attraction correspondants.
 - b) Si $a > 0$, soit $f_a(x) = ax(1-x)$. A quelle condition la fonction f_a possède-t-elle un point fixe attractif?
3. a) Montrer que $f(B_f(x_0))$ et $f^{-1}(B_f(x_0))$ sont contenus dans $B_f(x_0)$.
- b) Soit x dans $B_f(x_0)$. Montrer qu'il existe $\beta > 0$ tel que $]x - \beta, x + \beta[$ soit inclus dans $B_f(x_0)$.
- c) On désigne par $I_f(x_0)$ le plus grand intervalle contenant x_0 et inclus dans $B_f(x_0)$. Prouver que $I_f(x_0)$ est un intervalle ouvert de \mathbb{R} .
- d) Montrer que $f(I_f(x_0)) \subset I_f(x_0)$.

Dans la suite de la partie I, on suppose que $I_f(x_0)$ est borné. On peut donc écrire $I_f(x_0) =]a, b[$ avec $a < b$.

4. Montrer que $f(\{a, b\}) \subset \{a, b\}$.
5. On fait l'hypothèse supplémentaire que f' ne s'annule pas sur $]a, b[$.
 - a) Montrer que $(f^2)'$ ne s'annule pas sur $]a, b[$.
 - b) Déterminer $f^2(a)$ et $f^2(b)$.
 - c) En déduire qu'il existe $a' \in]a, x_0[$ et $b' \in]x_0, b[$ tels que

$$(f^2)'(a') = (f^2)'(b') = 1.$$

PARTIE II. Orbites périodiques attractives.

Soit f une application de classe C^1 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On appelle *orbite périodique* de f toute partie finie non vide F de \mathbb{R} telle que :

(i) $f(F) \subset F$

(ii) si X est une partie non vide de F telle que $f(X) \subset X$, alors $X = F$.

1. Si F est une orbite périodique de f de cardinal q et si $x \in F$, montrer que

$$F = \{f^k(x), 0 \leq k \leq q-1\}.$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $(f^n)' = \prod_{i=0}^{n-1} f' \circ f^i$.

3. Soit F une orbite périodique de f de cardinal q et $x_0 \in F$. Montrer que que l'on a

$$|(f^q)'(x_0)| < 1 \iff \forall x \in F, |(f^q)'(x)| < 1.$$

Si cette condition est réalisée, on dit que que F est une *orbite périodique attractive*.

4. On garde les notations de la question 3 en supposant de plus F attractive. Si x est proche de x_0 , décrire le comportement de la suite $(f^n(x))_{n \geq 0}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

5. On considère à nouveau la famille $(f_a)_{a>0}$ de la question I.2.b).

- a) Pour quelles valeurs de a la fonction f_a admet-elle une orbite périodique de cardinal 2?
- b) Pour quelles valeurs de a la fonction f_a admet-elle une orbite périodique attractive de cardinal 2?

PARTIE III. Fonctions à schwarzien négatif.

Si f est une application de classe C^3 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , on pose

$$Sf = 2f'''f' - 3(f'')^2.$$

C'est par définition le schwarzien de f . On note E l'ensemble des applications $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^3 telle que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus C(f), \quad Sf(x) < 0.$$

1. Montrer que les fonctions suivantes sont dans E :
 - a) Les polynômes du second degré.
 - b) Les fonctions $x \mapsto \lambda \sin x$ où $\lambda > 0$.
2. a) Si f et g sont dans E montrer que $f \circ g$ est dans E .
 b) Si $f \in E$ que dire de f^n pour $n \in \mathbb{N}^*$?
3. Soit $f \in E$. Montrer que si $|f'|$ possède un minimum local en un point x alors $f'(x) = 0$.
4. Une classe générale d'exemples : soit p un polynôme réel de degré $d \geq 2$ tel que p' soit scindé sur \mathbb{R} , i.e. s'écrive $p'(x) = \lambda \prod_{i=1}^{d-1} (x - x_i)$, les x_i n'étant pas forcément distincts. Pour x dans $\mathbb{R} \setminus C(p)$, simplifier $\frac{p''(x)}{p'(x)}$ afin de prouver que $p \in E$.

PARTIE IV. Le théorème de Singer.

Dans cette partie f est un élément de E .

1. Soit x_0 un point fixe attractif de f . Démontrer que l'une au moins des trois assertions suivantes est satisfaite :
 - $[x_0, +\infty[\subset B_f(x_0)$
 - $] -\infty, x_0] \subset B_f(x_0)$
 - $C(f) \cap B_f(x_0) \neq \emptyset$.
2. Soit F une orbite périodique attractive de f de cardinal q et $x_0 \in F$. On note $B_f(F) = \{x \in \mathbb{R}, \exists p \in F, \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{qn}(x) = p\}$; c'est le bassin d'attraction de l'orbite F . Démontrer que l'une au moins des trois assertions suivantes est satisfaite :
 - $[x_0, +\infty[\subset B_f(F)$
 - $] -\infty, x_0] \subset B_f(F)$
 - $C(f) \cap B_f(F) \neq \emptyset$.
3. a) Si $C(f)$ est de cardinal $n \in \mathbb{N}$, montrer que f admet au plus $n + 2$ orbites périodiques attractives.
 b) Si $C(f)$ est de cardinal $n \in \mathbb{N}$, et s'il existe $A > 0$ tel que, pour tout x tel que $|x| \geq A$, $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ soit non bornée, montrer que f a au plus n orbites périodiques attractives.
Ces deux résultats constituent le théorème de Singer.
4. a) Soit p un polynôme réel de degré $d \geq 2$ vérifiant l'hypothèse de III.4. Établir que p admet au plus $d - 1$ orbites périodiques attractives.
 b) Que dire du nombre d'orbites périodiques attractives d'un polynôme de degré 2 ?
 c) Soit $F(x) = 4x(1 - x)$. Montrer que F n'a pas d'orbite périodique attractive. Pour $x \in [0, 1]$, on pourra poser $x = \sin^2 \theta$ où $\theta \in \mathbb{R}$.